

# LES MATHÉMATIQUES, UNE LANGUE POÉTIQUE À APPRIVOISER

L'imagination des physiciens a produit la mécanique quantique pour expliquer l'infiniment petit. Une théorie qui a bouleversé les mathématiques. **Laure Saint-Raymond** éclaire l'invention de ces nouveaux et féconds outils, leur beauté et leur utilité.

**M**étier ? Mathématicienne... J'aurais pu répondre « chaman » ou « marabout », cela susciterait probablement la même perplexité chez mon interlocuteur qui classe les mathématiques au rang des pratiques ancestrales obscures.

## TRIBUNE

Dans le cadre de notre partenariat avec l'Académie des sciences, des académiciens nous montrent comment des théories, des résultats ou des applications peuvent dépasser ce qui avait été imaginé par les chercheurs... ouvrant ainsi de nouvelles et insoupçonnables perspectives.

« Scientifique » serait plus respectable parce qu'on associe volontiers la science avec le progrès et la modernité. « Artiste » m'attirerait sûrement plus de sympathie, même si l'esthétique ne fait pas toujours l'unanimité.

À mon tour, je suis perplexe : que s'imaginerait-il ? Que je calcule mieux et plus vite que lui ? Pas sûr. Que je connais par cœur toutes les décimales de Pi, ou que

je jongle toute la journée avec des triangles rectangles et des droites parallèles ? Là il se trompe carrément...

Le mathématicien tente d'apprivoiser un langage qui a son vocabulaire spécifique, sa propre grammaire. Comme toutes les autres langues vivantes, les mathématiques ont leur poésie, avec une esthétique qui se mesure à la concision, à l'originalité, au jaillissement lumineux des arguments. Les mathématiques se développent aussi pour essayer d'appréhender le monde qui nous entoure, avec cette particularité d'en

chercher les règles logiques. Elles s'enrichissent par l'interaction avec d'autres disciplines, en particulier historiquement avec la physique. Cette fertilisation vient parfois de rapprochements inattendus : les chemins de la découverte sont tortueux et imprévisibles !

Une révolution majeure de la physique au XX<sup>e</sup> siècle est l'avènement de la mécanique quantique. Cette nouvelle théorie proposée notamment par Planck, de Broglie, Heisenberg et Schrödinger a permis de rendre compte de phénomènes observés à l'échelle atomique qui échappaient totalement aux prédictions de la mécanique classique. Une manifestation particulièrement frappante de ces effets quantiques est l'effet tunnel : une particule quantique possède en effet la propriété de franchir une barrière de potentiel même si son énergie est inférieure à la différence de potentiel, un peu comme si nous pouvions passer d'une vallée de montagne à une autre sans avoir à franchir un col.

## PROBABILITÉS ET PRINCIPE D'INCERTITUDE

Pour obtenir une explication cohérente de ces phénomènes, la description classique basée sur les positions et les vitesses des particules est insuffisante. Il faut franchir un obstacle conceptuel majeur : il est impossible de connaître, de façon certaine et précise, à la fois la position et la vitesse d'une particule, c'est le principe d'incertitude. La particule peut se trouver dans différents états proches dont on connaît seule-



## PROFIL

Mathématicienne, professeure à l'École normale supérieure de Lyon, membre de l'Académie des sciences, **Laure Saint-Raymond** mène des travaux à l'interface avec la physique, à l'origine de plusieurs résultats décisifs, notamment sur les équations aux dérivées partielles et leurs applications en mécanique des fluides et en physique des plasmas.

ment la probabilité. Cette description requiert une grande capacité d'abstraction car elle est contraire à l'intuition qu'on peut se forger en observant le monde.

Cette description est aussi infiniment plus complexe et a nécessité l'introduction de nouveaux outils mathématiques pour en comprendre les spécificités. La différence majeure avec la mécanique classique est qu'on remplace une position et une vitesse par une probabilité, qui est une fonction de la position : à la place de deux nombres inconnus, on en a maintenant une infinité (qui sont toutes les valeurs de la fonction).

Pour prédire l'évolution d'un système, il faut alors introduire des opérateurs, c'est-à-dire des transformations qui agissent de façon globale sur les fonctions et qui modélisent les différentes forces en présence. Les opérateurs qui interviennent dans la dynamique

**La représentation mathématique des phénomènes physiques permet d'en extraire les lois fondamentales, et donc de prédire des comportements non encore observés. On peut alors identifier des régimes intéressants, et en trouver des applications inattendues.**

sont extrêmement compliqués, ils mélangent beaucoup d'informations. Leur étude a fait émerger une nouvelle branche des mathématiques qui est encore aujourd'hui très active.

En plus de la satisfaction de comprendre les observations expérimentales, ce processus de modélisation apporte la possibilité d'explorer de nombreuses situations où l'expérience n'est pas forcément possible. La représentation mathématique des phénomènes physiques permet en effet d'en extraire les lois fondamentales, et donc de prédire des comportements non encore observés. On peut alors identifier des régimes intéressants, et en trouver des applications inattendues. Celles de la mécanique quantique, basées sur la superposition de plusieurs états d'un système, sont déjà innombrables (microscope à effet tunnel, horloges atomiques de précision inégalée, clés de sécurité dans les réseaux de communication...), et encore pleines de promesses.

## ARTICULER LE CLASSIQUE ET LE QUANTIQUE

Du point de vue théorique, outre les nombreuses difficultés techniques que pose la construction mathématique de la théorie quantique, une question naturelle est de comprendre comment elle s'articule avec la mécanique classique dont les modèles donnent des prédictions très conformes aux observations des systèmes à notre échelle. En effet, on ne peut pas se contenter de remplacer sans autre forme de procès une théorie qui est défailante dans certaines situations extrêmes, par une nouvelle théorie, sans s'assurer qu'elles ont un minimum de cohérence. Ce souci d'axiomatisation de la physique avait déjà été présenté comme un défi par Hilbert au Congrès international des mathématiciens à Paris en 1900 : son sixième problème consiste à établir des correspondances rigoureuses entre les descriptions continues des fluides proposées par Euler au XVIII<sup>e</sup> siècle ou Navier et Stokes au XIX<sup>e</sup> siècle et les descriptions atomiques reposant sur le principe de Newton. Au sein même de la mécanique classique, l'unité des théories physiques est un véritable enjeu, qui nécessite une analyse mathématique fine des modèles et de leurs propriétés qualitatives.

Cette question s'est posée de façon toujours plus insistante au cours du XX<sup>e</sup> siècle, avec les nouveaux développements de la physique. Physique de l'infiniment petit qui nécessite l'introduction de la mécanique quantique pour prendre en compte les propriétés étranges des atomes. Physique de l'infiniment grand qui inspire à Einstein la théorie de la relativité pour modéliser l'évolution des systèmes cosmiques, et qui permettra de prédire – bien )))

## Les méthodes développées permettent d'analyser et souvent de simplifier des problèmes qui font intervenir plusieurs échelles. Ainsi, on a pu étudier des problèmes issus de la géophysique, par exemple la formation des grands tourbillons océaniques...

avant leur observation – les ondes gravitationnelles.

Le processus d'unification de ces théories a généré une multitude de travaux, dont ceux d'Einstein combinant la loi de la gravitation de Newton et la relativité restreinte au sein de la relativité générale, mais reste une source d'inspiration pour des développements très variés.

Dans le cas de la transition du quantique au classique, la question principale est d'expliquer pourquoi l'aspect probabiliste disparaît à l'échelle macroscopique, c'est-à-dire pourquoi les différents états quantiques superposés sont indifférenciables à notre échelle d'observation. Cela suppose d'abord de donner un sens précis à la notion d'échelle. Prenons un exemple d'objet que l'on peut observer : une bille de 1 g se déplaçant à une vitesse moyenne de 1 mm/s, dont l'énergie est environ  $10^{-9}$  J. Cette bille est constituée d'atomes, dont on ne peut prédire théoriquement que la probabilité d'états. La différence typique d'énergie entre deux états quantiques d'un atome est mesurée par la constante de Planck, elle est de l'ordre de  $10^{-19}$  J. Cette incertitude se moyenne sur tous les atomes : on peut alors prédire le comportement de la bille avec une marge d'erreur  $\epsilon \sim 10^{-5}$ , et montrer qu'il satisfait effectivement les lois de la mécanique classique.

Pour ce faire, il faut développer des outils mathématiques d'analyse asymptotique, c'est-à-dire des

méthodes d'approximation lorsque  $\epsilon$  est très petit. La difficulté est de relier les opérateurs quantiques, qui agissent sur des fonctions et dont la manipulation est délicate, aux variables plus simples de la mécanique classique. Les techniques qui permettent de faire le lien entre les opérateurs et leurs représentations classiques puisent leurs sources dans l'analyse de Fourier, mais requièrent des généralisations subtiles pour pouvoir tracer à la fois des informations sur la localisation spatiale et sur la fréquence d'oscillation. Les travaux initiés par Maslov, Leray, puis Hörmander dans la deuxième moitié du XX<sup>e</sup> siècle ont conduit au développement du calcul pseudo-différentiel et de l'analyse microlocale, qui sont devenus des outils fondamentaux en analyse.

### L'ANALYSE MICROLOCALE À LA RESCOURSE

Les méthodes développées en analyse microlocale sont en fait extrêmement robustes. Elles permettent d'analyser et souvent de simplifier des problèmes qui font intervenir plusieurs échelles. Ainsi, on a pu étudier des problèmes issus de la géophysique, par exemple la formation des grands tourbillons océaniques, sous l'effet combiné des courants marins et des ondes de Rossby créées par le vent et la force de Coriolis. La taille des océans, de 1 000 à 10 000 km, est en effet extrêmement grande par rapport à l'échelle des ondulations dues à la rotation de la Terre qui est de l'ordre de 10 km. Cette séparation d'échelle permet de remplacer le comportement compliqué des ondes par un effet moyen à grande échelle, et d'obtenir des équations simplifiées pour la localisation des tourbillons.

En l'absence de petit paramètre naturel, l'analyse microlocale permet quand même de localiser les singularités qui peuvent se former dans un système. Par exemple, on peut montrer que les ondes internes qui se propagent dans un fluide stratifié en densité sous l'effet de la gravité interagissent avec la géométrie du domaine pour concentrer toute leur énergie sur quelques zones privilégiées.

L'analyse microlocale est aussi à l'origine du développement de la théorie des ondelettes, une avancée majeure pour le traitement et la compression des images. Les chemins de la découverte regorgent de surprises! ★

### EN SAVOIR PLUS

**Le site de l'Académie des sciences :**

[www.academie-sciences.fr](http://www.academie-sciences.fr)

**« Les 7 Merveilles de la mécanique quantique » sur**

**« Science étonnante »**, le blog de vulgarisation scientifique de David Louapre :

<https://sciencetonnante.wordpress.com/2013/09/30/>

[les-7-merveilles-de-la-mecanique-quantique](https://www.breves-de-maths.fr/regarder-les-tourbillons-oceaniques-a-la-loupe)

**Sur le site « Brèves de maths »**

(qui présente, pour le grand public, des problèmes scientifiques et la place qu'y tiennent les mathématiques) :

<http://www.breves-de-maths.fr/regarder-les-tourbillons-oceaniques-a-la-loupe>

<http://www.breves-de-maths.fr/couches-limites-le-long-des-cotes>



NICOLAS LE CORREZ/GAMMA-PAPHO VIA GETTY IMAGES

**L'analyse microlocale permet de localiser les singularités qui peuvent se former dans un système. Par exemple des tourbillons dans un océan de plusieurs milliers de kilomètres.**