

QUAND LES MATHS NOUS FONT VIBRER

Effondrement d'un pont, son d'une cloche, lumière du soleil... Dans ces divers phénomènes vibratoires, comment la géométrie influe-t-elle sur la propagation des ondes? **Nalini Anantharaman** montre le pouvoir fécond des mathématiques pour le comprendre.

MATHÉMATIQUES

Dans le cadre de notre partenariat avec l'Académie des sciences, les académiciens nouvellement élus fin 2019 présentent un éclairage sur leur discipline et ses enjeux scientifiques, éthiques, politiques et sociétaux, à travers leur expérience personnelle.

Le phénomène de résonance est fréquemment évoqué lors des effondrements de ponts, tels que celui d'Angers en 1850 après le passage d'une troupe de soldats, ou celui de Tacoma en 1940, suite à des oscillations spectaculaires provoquées par un vent modéré. Lorsqu'on construit un pont, il est nécessaire de connaître ses fréquences propres afin d'éviter l'entrée en résonance avec les fréquences de phénomènes naturels (vent, secousses...)

En effet, tout objet en vibration possède ses « fréquences propres », fréquences spécifiques auxquelles il se met à osciller en mode stationnaire ; ce sont aussi les fréquences qui induisent des résonances quand l'objet est soumis à un stimulus extérieur. Le spectre de fréquences propres constitue l'identité d'un phénomène vibratoire : harmoniques produites par un instrument de musique, spectre de la lumière du soleil, spectre d'énergies émises ou absorbées par un élément chimique...

LA LOI DE PROPAGATION D'UNE ONDE DANS L'ESPACE ET DANS LE TEMPS

Pour d'évidentes raisons concrètes, ou par pure soif de savoir, il est important de comprendre comment ces fréquences dépendent de la forme de l'objet : les fondeurs de cloches, par exemple, ont une connais-

sance précise, principalement empirique, du lien entre la géométrie et le son d'une cloche.

Pour les mathématiciens, tous ces exemples hétéroclites sont étroitement apparentés, car décrits par des équations similaires, appartenant à la famille des « équations d'ondes ». Celle-ci nous donne la loi de propagation d'une onde dans l'espace et dans le temps. Pour nous, l'objet de recherche est cette équation, et, selon notre style, les aspects pratiques peuvent rester très présents, ou au contraire passer à l'arrière-plan. Je me range dans la seconde catégorie. Même si l'origine concrète de l'équation joue un rôle important dans mes motivations, au quotidien, les questions géométriques et analytiques abstraites prennent complètement le dessus.

Partant de cette équation, nous voulons comprendre les liens entre la géométrie du milieu dans lequel se propage l'onde et les fréquences propres. Pour nous mathématiciens, comprendre signifie savoir énoncer et démontrer des théorèmes. Concernant les équations d'onde linéaires, un théorème fondamental, dont les origines remontent à Fourier au XIX^e siècle, mais qui a continué à être largement développé au XX^e siècle, affirme l'existence de fréquences propres : famille de fréquences auxquelles l'objet se met à vibrer en mode stationnaire. De plus, toute vibration est une superposition de ces modes. Ainsi, tout son est une superposition d'harmoniques. La lumière est une superposition de couleurs. Chaque élément chimique possède son spectre de couleurs émises ou absorbées, et c'est ainsi que les couleurs émises par une étoile permettent d'identifier les éléments qui la composent.



PROFIL

Mathématicienne, membre de l'Académie des sciences, **Nalini Anantharaman** est professeure à l'Institut de recherche mathématique avancée Irma (CNRS/université de Strasbourg). Ses travaux se situent à l'interface entre la géométrie, la théorie spectrale, la théorie des systèmes dynamiques et la physique mathématique : ils cherchent à décrire comment la géométrie influe sur la propagation d'une onde et le spectre associé.

NOËL TOIVA MATOFF

Les mathématiques ont ce pouvoir réducteur, mais extraordinairement fécond, d'unifier tous ces phénomènes en assimilant les fréquences (couleurs, hauteurs de son...) à des nombres, et les modes stationnaires à des fonctions. Cette simplification et cette unification mettent à notre disposition un arsenal de techniques de calcul, et permettent d'avoir recours à des analogies et des raccourcis de pensée d'où naissent de nouvelles idées.

POUR QU'UN INSTRUMENT DE MUSIQUE SONNE JUSTE

La théorie spectrale, née des travaux du mathématicien Von Neumann lors des débuts de la mécanique quantique (1925), développée entre autres par Gelfand et l'école russe, nous trace la voie pour calculer ces nombres et ces fonctions. Cela dit, dans la pratique, seuls des cas très simples sont calculables à la main, tels que la vibration d'une corde (objet de dimension 1), ou, parmi les cas bidimensionnels, la vibration d'une membrane carrée. Dès que la géométrie est un tant soit peu compliquée, il faut faire des calculs approchés par ordinateur, ou essayer de démontrer des théorèmes décrivant ces objets de manière qualitative.

Les premières questions sont les suivantes. Comment le spectre dépend-il de la dimension de l'objet (corde de guitare unidimensionnelle, membrane de tambour bidimensionnelle, objet tridimensionnel...)? Cette question est importante, en théorie du moins, pour la fabrication d'instruments de musique. En effet, notre gamme pythagoricienne est basée sur les fréquences d'une corde vibrante, qui

sont des nombres entiers. On considère donc qu'un instrument sonne juste si ses fréquences propres sont proches d'être des nombres entiers. Or, pour un instrument de dimension 2 ou 3, ce n'est jamais le cas : ce défaut s'appelle l'inharmonicité de l'instrument, et il s'agit d'essayer de l'atténuer – à moins que ce défaut d'harmonicité ne fasse partie de la personnalité de l'instrument, comme pour les gongs ou les cloches.

Comment le spectre dépend-il de caractéristiques géométriques, telles que courbure, structure cristalline périodique, ou au contraire défaut de structure, irrégularités de fabrication ? On peut vouloir introduire des structures irrégulières sur un mur, par exemple, pour atténuer certaines fréquences et faire de l'isolation acoustique. En physique, les structures cristallines telles que les métaux présentent de bonnes propriétés de conductivité, mais la présence de défauts peut les rendre isolants.

LE SPECTRE EST-IL VRAIMENT LA SIGNATURE D'UN OBJET ?

Deux objets différents peuvent-ils émettre le même spectre ? Peut-on construire un objet de sorte d'être sûr qu'il possède certaines fréquences propres, ou être sûr d'éviter certaines fréquences ?

Comment le spectre dépend-il de la taille de l'objet ? Comment décrire le spectre des objets infinis (ou quasiment infinis), comme le son des vagues de la mer ?

Pour ces questions, nous avons des éléments de réponse concernant les hautes fréquences grâce à l'approximation semi-classique : elle nous dit que les fronts d'ondes se déplacent à peu près en ligne droite. Plus généralement, sur des espaces courbes (autrement dit, dans des géométries non euclidiennes), ils se déplacent en suivant des géodésiques, chemins réalisant la plus petite distance entre deux points. En optique, c'est grâce à cette approximation qu'on s'autorise à parler de rayons lumineux, et qu'on peut s'aider d'une intuition géométrique pour comprendre la propagation de la lumière.

Mes travaux se basent sur l'approximation semi-classique pour comprendre le lien entre la)))

«Harmoniques d'un instrument de musique, spectre de la lumière, d'énergies d'un élément chimique... tous ces exemples sont étroitement apparentés, car décrits par des équations similaires, appartenant à la famille des "équations d'ondes".»

« La théorie des systèmes chaotiques a été conçue pour traiter de mouvement de particules et de solides, pas de propagation d'ondes. J'ai néanmoins réussi à en utiliser certains concepts... »

))) géométrie des géodésiques et celle des modes de vibration stationnaires. Imaginons le cas apparemment simple d'une onde lumineuse dans un domaine bidimensionnel, de forme arbitraire. Les géodésiques ici sont des lignes droites, qui se réfléchissent sur le bord selon la loi de Snell-Descartes. Les mathématiciens appellent ceci un « billard » car on peut aussi imaginer la trajectoire en ligne droite d'une boule de billard rebondissant sur les bords. Clairement, la forme globale des trajectoires dépend beaucoup de la forme du bord.

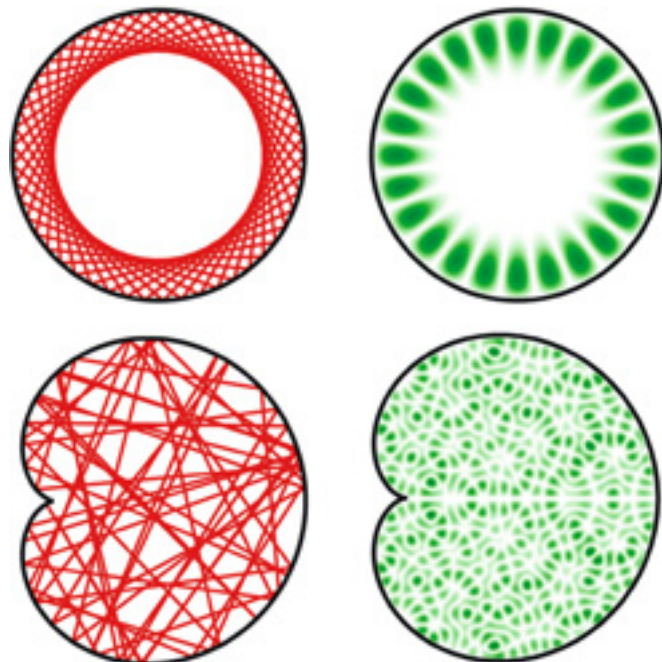
LES ONDES STATIONNAIRES

La figure (ci-contre) représente en rouge des trajectoires de deux billards, l'un circulaire, l'autre en forme de cardioïde. En vert sont représentés des modes stationnaires. On constate une certaine analogie visuelle. Dans un billard rond, les trajectoires sont organisées de manière très régulière, faciles à décrire, prévisibles ; les ondes stationnaires présentent les mêmes propriétés de symétrie. Au contraire, les trajectoires dans un billard en forme de cardioïde sont irrégulières, imprévisibles ; leur apparence désordonnée est décrite par la théorie mathématique du chaos. Les ondes stationnaires ont, elles aussi, une apparence très complexe, mais mal comprise. L'approche semi-classique consiste à dire que tout se passe comme si les ondes suivaient des rayons rectilignes ; ceci semble se confirmer, en grande mesure, de manière expérimentale. Cependant, comme dans la plupart des approximations, cet argument est difficile à justifier. Appliqué à mauvais escient, il peut même conduire à des prédictions fausses, ou à passer à côté de phénomènes de nature purement ondulatoire : interférences, diffraction par exemple. La rigueur mathématique est là pour distinguer le vrai du faux dans les intuitions physiques.

Je cherche à utiliser la théorie du chaos pour décrire précisément le désordre apparent dans les modes stationnaires. La difficulté est que cette théorie n'a pas du tout été conçue pour décrire les ondes. En fait, elle est née des travaux d'Henri Poincaré sur la stabilité du système solaire, à la fin du XIX^e siècle. Cherchant une démonstration mathématique du

caractère périodique du mouvement des planètes, Poincaré découvrit, au contraire, que celui-ci pourrait bien être instable et imprévisible sur une très longue durée. La théorie des systèmes chaotiques, développée au cours du XX^e siècle jusqu'à nos jours, est donc conçue dès le départ pour traiter de mouvement de particules et de solides, pas de propagation d'ondes. J'ai néanmoins réussi à en utiliser certains concepts, tels que celui d'entropie, pour quantifier le désordre que l'on observe dans la propagation d'ondes dans certains types de géométrie (en courbure négative, ou sur des graphes). Je m'intéresse désormais à la propagation d'ondes dans des géométries engendrées aléatoirement, il s'agit de comprendre quels phénomènes ondulatoires sont favorisés par l'introduction d'un aléa.

Nos recherches sur les géométries aléatoires ont commencé il y a deux ans. Elles se poursuivent à la maison avec papier, crayon et ordinateur pendant le confinement du printemps 2020, et elles mettront sans doute encore plus d'un an à aboutir. Cette échéance me fait parfois oublier la lenteur de l'égrènement des jours... ★



ARNOLD BÄCKER

En rouge, les trajectoires de deux « billards », l'un circulaire, l'autre en forme de cardioïde. En vert, des modes stationnaires. Dans un billard rond, les trajectoires, régulières, sont faciles à décrire ; dans un billard en forme de cardioïde, elles sont imprévisibles. Leur apparence désordonnée est décrite par la théorie du chaos.

EN SAVOIR PLUS

Le site de l'Académie des sciences : www.academie-sciences.fr

« Les figures «sonores» de Chladni », de Serge Cantat et Luc Hillairet, 2012, en ligne sur Images des mathématiques (site du CNRS qui présente au grand public la recherche mathématique et le métier de mathématicien) : <https://images.math.cnrs.fr/Les-figures-sonores-de-Chladni.html>

« Chaos et stabilité », de Jérôme Buzzi. Éditions le Pommier, 2005.