

Présentation à l'Académie des sciences

par Alain Connes
Membre de l'Académie des sciences

• 9 novembre 2004 •

Introduction

Ce Rapport sur la Science et la Technologie est un plaidoyer sur l'importance du rôle des mathématiques dans les sciences contemporaines. Le rapport se présente comme un court résumé suivi de la réunion de plusieurs chapitres :

- Mathématiques et physique par Roger Balian, Jean Zinn-Justin ;
- Mathématiques et astronomie par Albert Bijaoui ;
- Mathématiques et sciences chimiques par Mireille Defranceschi, Denis Gratias, Hervé Toulhoat et Christian Vidal ;
- Le rôle des mathématiques dans les sciences biologiques et médicales par Pierre Auger, Jacques Demongeot, Jim Murray et Michel Thellier ;
- Mathématiques, biologie et médecine par Jean-Pierre Françoise ;
- Modèles mathématiques en biologie et en écologie par Régis Ferrière ;
- Les liens entre mathématiques et neurosciences par Alain Berthoz¹ ;
- Mathématiques et informatique par Gérard Huet et Philippe Flageolet ;
- La modélisation mathématique en économie par Yvar Ekeland et Elyes Jouini ;
- De nouveaux champs d'action pour les mathématiques dans la société par Jean-Pierre Bourguignon.

Le tout est suivi de recommandations très brèves quant aux programmes des cycles licence et maîtrise.

J'ai commencé l'étude de ce rapport avec appréhension en gardant en mémoire la préface à un livre de vulgarisation sur les mathématiques, écrite par Gian Carlo Rota, mathématicien et philosophe du MIT, où il faisait la liste des erreurs à éviter à tout prix lorsque les mathématiciens veulent « vendre » leur discipline. L'une d'entre elles figurait en bonne place et s'énonce ainsi :

« Les mathématiques ont beaucoup d'applications »...

La première impression qui s'est dégagée à la lecture de ce rapport est je pense l'opposé exact : il met en lumière de manière claire le rôle incontournable des mathématiques dans la modélisation des systèmes complexes. De plus, il ne s'agit pas toujours de mathématiques connues depuis longtemps et l'interaction a lieu dans les deux sens. Il en ressort également que l'on ne peut ignorer le couplage nécessaire des mathé-

1. Avec la contribution de Daniel Andler, Daniel Bennequin, Jacques Droulez, Olivier Fau-geras, Giuseppe Longo, Stéphane Mallat et Jean Petitot.

324 LES MATHÉMATIQUES DANS LE MONDE SCIENTIFIQUE CONTEMPORAIN —

matiques abstraites avec l'informatique même s'il faut éviter les conclusions simplistes comme « l'ordinateur va bientôt réduire les mathématiciens au chômage » ou que le ressort ultime de ces « applications » ne dépend finalement que de la puissance de calcul des ordinateurs au temps t .

Il y a d'excellents textes parmi ceux du rapport mais l'ensemble est inégal et mon exposé comportait une analyse critique détaillée de leur contenu, nécessaire pour obtenir un résultat qui soit conforme à ce que l'on est en droit d'attendre d'un rapport approuvé par l'Académie sur un sujet aussi délicat. Comme ces critiques ont pour l'essentiel joué leur rôle et permis de modifier le rapport initial, je les ai supprimées ce qui donne à la version ci-jointe un côté lénifiant que mon exposé n'avait certainement pas au départ.

1 ■ Mathématiques et physique

L'article de Roger Balian et Jean Zinn-Justin est un texte intéressant et structuré sur les relations entre physique et mathématiques qui sont analysées en profondeur. Je rajouterai à la description de l'évolution récente de l'influence de la physique sur les mathématiques les deux points suivants : alors que les mathématiciens se comportent en général comme des fermions (c'est-à-dire préfèrent en général travailler seuls) les physiciens, eux, obéissent à la statistique des bosons et se rassemblent en groupes très nombreux pour étudier tel ou tel problème. La nouveauté récente est la « bosonisation » de certains sujets des mathématiques envahis par l'influence des physiciens. Un autre phénomène relié qui a pris récemment une ampleur considérable est l'existence d'un nombre croissant de chercheurs qui ne sont ni physiciens (au sens où leurs découvertes ne sont pas confrontées de près ou de loin au test de l'expérience) ni mathématiciens (au sens où le critère de la validation d'un résultat par la démonstration n'est plus appliqué).

2 ■ Mathématiques et astronomie

Il s'agit d'un bon texte qui montre très clairement que l'on ne peut réduire le rôle des mathématiques en astronomie à celui d'un langage ou d'un ensemble d'outils pour les astronomes, et qu'elles sont un moyen indispensable pour avancer dans la compréhension des phénomènes. La conclusion sur la nécessité d'une meilleure formation mathématique des astronomes est convaincante ainsi que la discussion du rôle crucial des ordinateurs dans l'implémentation des calculs astronomiques. Il y a bien sûr quelques redites par rapport à la première partie du chapitre 1 comme sur la « géométrisation de la gravitation » par Ein-

stein. Par ailleurs qualifier cette « géométrisation » d'interprétation par les mathématiques peut prêter à confusion car il s'agit là du cœur de la théorie de la gravitation qui n'existerait pas sans la géométrie de Riemann (le physicien Steven Weinberg a écrit un ouvrage sur la relativité générale où le parti-pris est d'ignorer la signification géométrique des champs, le résultat est très peu convaincant).

3 ■ Mathématiques et sciences chimiques

Il s'agit là d'un excellent texte, l'un des meilleurs du rapport, je ne m'étendrai donc pas trop sur son contenu. Le rôle des mathématiques y est parfaitement analysé dans trois domaines : Celui de la chimie quantique avec l'équation de Schrödinger et les problèmes rencontrés dès que le nombre d'électrons est grand et où l'analyse mathématique permet de donner un sens rigoureux aux approximations impliquant des problèmes aussi délicats que le choix de bons espaces fonctionnels. Celui des quasi-cristaux (pavages de Robinson-Penrose par exemple) et des nouvelles « symétries » qui les gouvernent, avec des problèmes aussi fascinants que ceux de la « non-localité » de la construction de ces quasi-cristaux qui existent néanmoins dans la nature ! Celui de la chimie des réactions avec plusieurs voies réactionnelles et de l'instabilité de Turing dans la diffusion. On apprend toute sorte de choses intéressantes dans ce texte.

Il reste compréhensible tout en allant en profondeur y compris dans l'aspect « sociologique » : les Français se distinguant dans la discipline par leur apport conceptuel, là où les Anglo-Saxons ont le monopole des logiciels efficaces.

4 ■ Le rôle des mathématiques dans les sciences biologiques et médicales

Il s'agit d'une description des objectifs et des limites de la nouvelle discipline appelée « biologie-mathématique », issue de l'utilisation de plus en plus répandue de concepts et de modèles mathématiques dans les sciences biologiques et médicales.

Les mathématiques sont le moyen de jeter un pont entre le niveau cellulaire et le niveau macroscopique accessible à nos sens. Les exemples donnés sont très convaincants, comme la multiplication du nombre d'options possibles dans les traitements qui nécessitent la simulation pour pouvoir comparer l'efficacité relative des différents choix. L'exemple de l'application des modèles mathématiques dans les traitements des cancers par une chimiothérapie en deux temps révèle à quel point cette discipline est proche du réel. Dans ces applications, on ne

326 LES MATHÉMATIQUES DANS LE MONDE SCIENTIFIQUE CONTEMPORAIN

cherche pas à obtenir un modèle qui prenne en compte tous les processus individuels mais à capter l'essence des interactions. À un niveau plus fondamental, on est encore loin de pouvoir donner des modèles fiables pour le développement des systèmes biologiques mais il s'agit bien entendu d'un but fascinant. Enfin le rôle de l'informatique dans la modélisation du génome est analysé en détail. Les conclusions sur les moyens à utiliser pour former en France des chercheurs dans ce domaine interdisciplinaire, en mettant à leur disposition des filières spécifiquement organisées pour une formation pluridisciplinaire, sont également convaincantes.

5 ■ Mathématiques, biologie et médecine

Il s'agit d'un chapitre plus « pointu » que le précédent mais qui renforce vraiment sa portée en donnant des exemples, dans les deux sens, des apports croisés entre mathématiques d'une part et biologie et médecine de l'autre. Ceci va du développement de la théorie de Fisher en statistique, qui joue un rôle important en mathématiques pures (information de Fisher), au rôle crucial de la transformée de Radon en imagerie médicale. La conclusion est la même que dans l'article précédent avec la proposition de créer des enseignements joints de biologie et mathématiques. Cet article est très bien venu pour renforcer celui sur le rôle des mathématiques dans les sciences biologiques et médicales. Il y a certaines « redites » mais cela est sans importance.

6 ■ Modèles mathématiques en biologie et en écologie

Ce chapitre assez court rajoute aux deux précédents plusieurs exemples convaincants d'application des mathématiques à la médecine et l'écologie. L'auteur rappelle d'ailleurs au départ l'exemple de D. Bernoulli, qui, grâce au calcul des probabilités, avait apporté une réponse positive à l'estimation du rôle de la vaccination dans les épidémies de variole au XVIII^e siècle (il s'agissait d'une pratique « empirique » dont il fallait établir la validité). Il explique en détails l'apparition d'équations non linéaires et leur rôle mis en évidence par M. May dans les années récentes. Il explique aussi l'apparition dans la théorie de l'évolution d'une échelle de temps comparable à celle de l'écologie et la nécessité d'une nouvelle théorie, celle des « dynamiques adaptatives » pour en tenir compte en affinant ainsi la théorie de Darwin. C'est une bonne addition aux deux chapitres précédents avec bien sûr des redites à nouveau.

7 ■ Les liens entre mathématiques et neurosciences

Ce rapport est très bien rédigé et l'on voit qu'un travail de synthèse a été fait pour obtenir un résultat cohérent à partir sans doute de plusieurs contributions vu le nombre de ses auteurs. En particulier, les conclusions sur l'enseignement des mathématiques contiennent des idées très intéressantes mais expriment un point de vue très partiel qu'il serait dangereux de considérer comme unanimement partagé par les académiciens.

8 ■ Mathématiques et informatique

Ce chapitre est excellent et donne une image précise de la vitalité du sujet : l'informatique et de la profondeur de ses relations aux mathématiques. Ainsi la logique, qui s'était développée en grande partie dans les années 1930, à propos du problème des fondements, a été redéplacée pour se trouver aujourd'hui au cœur des préoccupations de l'informatique. Il est impressionnant de voir le λ -calcul inventé en logique par Church dans les années 1930 se transformer en un outil de programmation informatique où le mécanisme de la preuve devient programme informatique. Les mathématiques jouent un rôle essentiel dans l'analyse des algorithmes de D. Knuth, dans l'approche probabiliste de la conception d'algorithme de Michael Rabin. La théorie des nombres est bien entendu l'outil essentiel de la cryptographie. La recherche en informatique n'a pas été avare en retombées en mathématique pure. Elle est par exemple à l'origine de la nouvelle théorie de la complexité qui, combinée au théorème de Gödel, change radicalement la perception que nous avons des assertions démontrables en mathématique, en montrant que « la plupart » des assertions vraies ne sont pas démontrables. Autre exemple, la théorie de l'information de Shannon qui a pour origine le problème de compression des données et a joué un rôle clé en théorie ergodique. Suit une discussion du rôle « direct » de l'ordinateur en mathématique et une description du calcul formel et de ses limites. L'ensemble du texte est très bien rédigé et fait le tour de la question.

9 ■ La modélisation mathématique en économie

La motivation de ce chapitre ainsi que le point de vue conceptuel adopté sont exemplaires. Ce texte est le bienvenu pour tordre le cou aux idées reçues sur l'économie mathématique telles que :

– en économie les modèles mathématiques sont complètement déconnectés de la réalité ;

328 LES MATHÉMATIQUES DANS LE MONDE SCIENTIFIQUE CONTEMPORAIN

- les mathématiques utilisées en économie sont triviales ;
- l'économiste ne teste jamais ses modèles théoriques.

10 ■ De nouveaux champs d'action pour les mathématiques dans la société

Ce dernier chapitre est un rapport détaillé et convaincant sur les rapports entre mathématiques et société en particulier par le rôle qu'elles peuvent et doivent jouer dans les développements de nouvelles technologies. Une dualité, sans doute un peu simplificatrice mais utile pour structurer l'argumentation, est introduite entre la démarche « analytique », qui va du complexe vers les structures élémentaires, et la démarche « synthétique » qui reconstruit le complexe en terme de constituants élémentaires donnés *a priori*. Cela permet d'opposer les démarches utilisées dans l'acquisition du savoir à l'université (ou la recherche dans le cadre universitaire) par opposition aux écoles d'ingénieurs et au développement de technologies nouvelles. Le texte analyse les changements apparus récemment dans la place des mathématiques dans la recherche en général, y compris dans l'industrie à cause de l'accélération considérable dans la création de nouvelles technologies. Des conclusions intéressantes en sont tirées en ce qui concerne la nécessité de faciliter, par un changement substantiel dans l'organisation de la recherche et de l'évaluation, le développement de disciplines transversales qui échappent au découpage traditionnel.

Conclusions

L'ensemble de ces chapitres présente une somme considérable d'arguments montrant la vitalité des interactions entre les mathématiques et les autres sciences « dures ». Il s'en dégage une impression forte sur l'importance du rôle des mathématiques abstraites couplées à l'informatique dans des domaines aussi variés que la création de nouvelles technologies, la médecine, les technologies de l'information, les neurosciences et l'économie, sans parler de la biologie ! Il est clair qu'il faut en tirer les conclusions quant à l'enseignement des mathématiques et la structure de la recherche pour faciliter la création des domaines émergents, des recommandations dans ce sens sont faites brièvement à la fin du rapport.

Mathématiques et sciences mécaniques

Olivier Pironneau
Délégué de la section des Sciences mécaniques
et informatiques de l'Académie des sciences

Bien évidemment, les mathématiques sont au cœur de la mécanique, et de l'analyse numérique. La mécanique est aussi source d'inspiration mathématique puisqu'elle pose des problèmes nouveaux aux mathématiciens dont certains, comme les équations de la mécanique des fluides et le passage de la mécanique quantique à la mécanique des milieux continus, ne sont que partiellement résolus. Bien qu'elle reste encore mal comprise, la turbulence a aussi inspiré un grand nombre de théories mathématiques, comme la théorie du chaos et les développements asymptotiques multi-échelles.

Ce rapport a choisi de ne pas parler des sciences mécaniques car le sujet mérite un rapport à lui seul. Rappelons cependant que les ordinateurs ont bouleversés les sciences de l'ingénieur en permettant, entre autre de résoudre numériquement les équations aux dérivées partielles fondamentales de la physique et même d'optimiser automatiquement leurs paramètres. C'est peut-être, en fait, le domaine le plus visible de l'application des mathématiques puisque presque tous les objets technologiques de notre environnement ont donné lieu à des développements mathématiques intensifs : grands ouvrages comme le viaduc de Millau, centrales nucléaires, avions, voitures, téléphone cellulaires et même jusqu'au simple joint de caoutchouc qui a été en général optimisé pour durer. Qu'un tremblement de terre force 7 passe dans une ville sans faire de dégât est une grande victoire de la simulation et donc des mathématiques.

Ainsi pourrait-on citer de très nombreux exemples d'échange entre les mathématiques et les sciences mécaniques et si le prix Abel de mathématique 2005 a été décerné à un scientifique qui s'est illustré en donnant une théorie complète des ondes de chocs aérodynamiques, c'est encore une preuve de l'imbrication entre mathématiques et sciences mécaniques.