Introduction

Dès leurs premiers pas, les mathématiques sont ancrées dans des problèmes concrets : il s'agit de mesurer des distances, des angles, des surfaces – que l'on pense à l'étymologie du mot géométrie – de décrire les mouvements des corps sur la sphère céleste, mais aussi de faciliter les transactions financières.

Le XVII^{e} siècle voit une (première) explosion simultanée des mathématiques et de la physique, avec l'avènement concomitant, sous l'égide de Newton, du calcul différentiel et de la mécanique. On y constate un principe qui aura nombre d'autres applications : créé pour pouvoir écrire les lois de la mécanique, le calcul différentiel prend rapidement son autonomie et, support de l'analyse, ouvre aux mathématiciens un terrain de recherches d'une ampleur sans pareille. Les siècles suivants verront d'autres exemples de cet enrichissement mutuel des sciences physiques et mathématiques : équations aux dérivées partielles, électromagnétisme et propagation de la chaleur ou ondes, géométrie riemannienne et relativité générale, théorie spectrale et mécanique quantique... Les plus grands mathématiciens – Newton, Euler, Gauss, Lagrange, Laplace, Poincaré – introduisent pour l'étude de la mécanique céleste des outils qui ne tardent pas à irriguer l'ensemble du champ mathématique.

C'est dire que les relations des mathématiques avec l'astronomie, la physique, et aussi la chimie depuis la révolution quantique, sont de longue date extrêmement fructueuses, et continuent à l'être aujourd'hui.

Notre époque voit de surcroît l'établissement de nouvelles interactions entre mathématiques et autres disciplines scientifiques. En effet, dans de nombreux domaines des sciences de la vie, on assiste à un passage progressif du qualitatif vers le quantitatif. Le même phénomène se produit pour certaines sciences sociales, en particulier l'économie.

Ces domaines s'ouvrent donc aux outils de la modélisation mathématique ; si, dans certains cas, des outils qui avaient été créés à une autre occasion peuvent être efficacement employés, il est d'autres situations ou seule une coopération intense entre mathématiciens et économistes ou biologistes permettra d'inventer les concepts nécessaires.

L'autre phénomène marquant est bien sûr l'explosion de l'informatique, qui entretient avec la mathématique une relation particulière : elle seule, en effet, valide ses résultats par la démonstration, comme c'est le cas en mathématique.

L'histoire des mathématiques est caractérisée par des phases d'expansion et des phases de consolidation.

Dans les phases d'expansion, les mathématiciens élargissent le périmètre de leur science en s'attaquant à des problèmes et en élaborant des concepts d'un type nouveau. Ces problèmes et concepts trouvent souvent leur origine dans la dynamique interne de la discipline : le dernier théorème de Fermat, récemment démontré par Wiles, a ainsi motivé la création au XIX^{e} siècle de la théorie algébrique des nombres. Mais, plus souvent encore, cette expansion s'est nourrie d'une problématique issue des applications et en particulier des relations avec les autres disciplines scientifiques.

Ces phases d'expansion ne sont pas sans affecter la solidité de l'édifice mathématique, les nouvelles méthodes introduites n'ayant pas toujours la rigueur indispensable. Des phases de consolidation sont alors nécessaires. Il en est ainsi pour l'analyse au XIX^{e} siècle avec Cauchy et Weierstrass établissant des bases solides aux formidables travaux d'Euler. La géométrie algébrique obéira au même phénomène, après les succès de l'école italienne, à partir des années 1930. La propre crise des fondements au début du XX^{e} siècle est de cette nature. L'édifice une fois solidement étayé, l'expansion peut redémarrer.

Les interactions des mathématiques avec les autres disciplines scientifiques, auxquelles ce rapport est consacré, sont donc enrichissantes pour les deux parties.

Avant de détailler son contenu, signalons d'emblée ce qu'on ne trouvera pas dans ce rapport.

Ce rapport n'est pas un panorama sur les évolutions récentes – considérables – des sciences mathématiques ; des thèmes centraux tels que le programme de Langlands, qui irriguent théorie des nombres et géométrie arithmétique, n'y seront pas évoqués.

Ce rapport ne prétend pas plus couvrir l'ensemble du champ des applications des mathématiques. Celles-ci sont de plus en plus importantes et diversifiées, de l'industrie traditionnelle à la finance. Un tel sujet mériterait un rapport à lui seul.

La place des mathématiques dans le système éducatif, leur rôle comme instrument de sélection dans certaines filières prestigieuses, le rejet que celui-ci peut entraîner chez une fraction du public éducatif, ces sujets importants ne sont pas plus discutés ici. Mais, évidemment, les conclusions de ce rapport et les recommandations qui en découlent concernent essentiellement tout le système de formation comme celui de la recherche.

Même à l'intérieur du cadre choisi, celui des interactions avec les autres disciplines scientifiques, ce rapport ne saurait être exhaustif ni même complet. La démarche choisie a été de jeter des coups de projecteurs sur certains secteurs qui nous semblaient importants et représentatifs, dans l'espoir que ce kaléidoscope donne une image fidèle d'un ensemble riche et varié. Le format imposé nous a amené à passer sous silence des domaines entiers : c'est ainsi que les sciences humaines n'apparaissent qu'à travers l'économie, alors que pourtant la sociologie a recours à des outils mathématiques, et en particulier statistiques, de plus en plus sophistiqués.

Il était évidemment illusoire de prétendre couvrir en quelques pages – et même en un seul volume – l'extraordinaire richesse des relations entre physique et mathématique, qui remontent à l'origine de ces deux sciences. Newton, Euler, Gauss, Boltzmann, Poincaré ont marqué de leur empreinte les deux disciplines. En notre époque de spécialisation quelquefois trop poussée, une communauté très active de physique mathématique assure l'interface formidablement diversifié entre les deux sciences ; il n'est pas de branche de la physique ou des mathématiques qui ne soit concernée.

Roger Balian et Jean Zinn-Justin ouvrent ce chapitre par une analyse générale, éclairée par l'histoire des deux disciplines, de ces interactions foisonnantes. Pour donner un contenu plus concret à cette analyse, une « étude de cas » est ensuite proposée ; ils ont choisi la théorie quantique des champs comme exemple d'une thématique centrale de la physique contemporaine où apparaissent la variété et la complexité des relations entre physique et mathématique. Les techniques sophistiquées d'intégrales de chemin et de renormalisation ont prouvé, par l'extraordinaire précision de leurs prédictions, leur pertinence physique, mais elles présentent aux mathématiciens le formidable défi de les intégrer dans un édifice logiquement cohérent.

Roger Balian et Jean Zinn-Justin proposent en conclusion de nombreuses pistes pour renforcer les interactions, pistes qu'il serait vain de résumer ici en quelques lignes, mais qui pourraient améliorer, tant dans l'enseignement que dans la recherche, le dialogue si nécessaire entre les deux communautés scientifiques.

Que ce soit dans la vision classique de Newton, où la loi de gravitation universelle gouvernant le mouvement des corps célestes est le paradigme de la mécanique hamiltonienne, ou dans la vision contemporaine d'Einstein, où la gravitation façonne la géométrie même de notre univers, les mathématiques ont été de tous temps indissociables de l'astronomie et de la cosmologie. S'y ajoute aujourd'hui la nécessité de traiter, à l'instar d'autres disciplines scientifiques, les quantités prodigieuses de données que nous offrent les moyens expérimentaux actuels. Albert Bijaoui propose un survol de ces différents aspects des relations très anciennes entre astronomie et mathématiques et de leurs développements récents.

Mireille Defranceschi, Denis Gratias, Hervé Toulhoat et Christian Vidal ont choisi d'illustrer la richesse des interactions entre chimie et mathématiques en présentant trois domaines de recherche caractéristiques. Le premier est celui de la chimie quantique, qui se propose de prédire et d'expliquer la stabilité et la réactivité des édifices moléculaires. Tout repose en principe sur l'équation de Schrödinger, mais sa complexité en interdit l'usage direct en pratique. Ceci mène à une activité intense de modélisation moléculaire dont les enjeux industriels sont considérables. La cristallographie est le second domaine choisi. Les réseaux cristallins, contrepartie chimique des solides platoniciens, sont au coeur de la géométrie euclidienne la plus classique. La découverte il y a une vingtaine d'années des quasi-cristaux a suscité un intérêt considérable des chimistes et mathématiciens pour des structures quasipériodiques qui n'apparaissaient jusque-là que comme curiosités isolées. Le troisième thème abordé est celui de la dynamique et la géométrie des réactions chimiques. Avec l'attracteur de Lorenz, issu de la météorologie, la réaction de Belousov-Zhabotinski a suscité chez les mathématiciens de nombreux travaux pour comprendre ces dynamiques chaotiques. De nombreux probabilistes se penchent aujourd'hui sur les très beaux problèmes posés par les modèles stochastiques de croissance d'agrégats et les géométries fractales qu'ils engendrent.

La complexité des systèmes étudiés caractérise, voire définit les sciences du vivant par rapport à celles de la matière. Elle explique aussi pourquoi les interactions avec les mathématiques sont plus récentes, et n'ont pas encore la même intensité. Mais les dernières décennies ont vu, au-delà des relations avec la statistique qui sont plus anciennes, l'émergence d'une véritable communauté de biologie mathématique et/ou de biologie théorique, interface crucial qu'il apparaît vital de développer et densifier.

Pierre Auger, Jacques Demongeot, Jim Murray et Michel Thellier nous offrent un panorama impressionnant de la variété des domaines concernés, tant au niveau biomédical que mathématique. Quant au premier point, cela va de la morphogenèse, avec la cicatrisation des blessures ou la croissance des tumeurs du cerveau, à l'écologie, la dynamique des populations et les sciences de l'environnement, en passant par la modélisation de la dynamique des systèmes biologiques et des rythmes biologiques et bien sûr la modélisation du génome et des protéines. Équations différentielles et aux dérivées partielles, déterministes et stochastiques, théorie des nœuds, analyse harmonique classique et moderne sont quelques-uns parmi les très nombreux domaines mathématiques concernés.

Jean-Pierre Françoise offre ensuite un point de vue plus pointu, assorti d'une très riche bibliographie, sur quelques aspects de ces interactions : équations de réaction-diffusion, imagerie médicale, modèles mathématiques en physiologie et écologie. Ces modèles inspirent aussi le court texte de Régis Ferrière.

Alain Berthoz, secondé par Daniel Andler, Daniel Bennequin, Jacques Droulez, Olivier Faugeras, Giuseppe Longo, Stéphane Mallat et Jean Petitot, explore les relations complexes qui se sont tissées ces dernières décennies entre mathématiques et neurosciences intégratives et cognitives. Une première partie passe en revue les nombreux outils mathématiques intervenant dans l'analyse des signaux neuronaux et la modélisation des processus intervenant aux divers niveaux du système nerveux. La deuxième partie, plus prospective, relie la construction mathématique de la géométrie à la perception qu'en a notre cerveau, et suggère qu'une compréhension intégrée de ces mécanismes cérébraux est indissociable d'une nouvelle vision mathématique de la géométrie.

La technologie informatique a envahi durant les dernières décennies tous les aspects de la vie quotidienne. Dans le même temps, l'informatique fondamentale a pris place dans le paysage scientifique. Cette place est singulière car, au contraire des sciences de la nature ou de la vie, où les théories doivent être validées par l'expérience, c'est par la démonstration que sont validés les résultats, comme c'est le cas en mathématiques. Philippe Flajolet et Gérard Huet dressent un tableau des principaux courants organisant cette discipline :

– l'algorithmique trouve ses origines dans le calcul et est une source prodigieuse de concepts et problèmes nouveaux en mathématiques, *via* entre autres les théories de la complexité et de l'information ;

– la programmation est l'avatar moderne de la logique et de la démonstration ; on y trouve de fortes connections avec entre autres les sciences cognitives et la linguistique. Ils passent ensuite en revue quelques domaines-frontière.

Ivar Ekeland et Elyes Jouini expliquent l'interdépendance croissante des mathématiques et de l'économie. Le mécanisme de formation des prix sous-tend le passage de la microéconomie à la macroéconomie et la théorie de l'équilibre général. Les modèles qui le décrivent, et la validation de ces modèles, font appel à des outils mathématiques sophistiqués et posent au mathématicien des problèmes nouveaux. Ils conduisent, à travers la théorie de l'arbitrage, à des outils opérationnels qui ont envahi les salles de marché.

Jean-Pierre Bourguignon plaide pour un nouveau schéma dans l'organisation de la recherche. La distinction traditionnelle entre analyse et synthèse, recherche fondamentale et recherche appliquée, illustrée par la dichotomie bien française entre Université et grandes écoles, n'est plus adaptée à un monde où science et technologie sont rapprochées par des courts-circuits inattendus. L'évolution nécessaire devra surmonter des différences culturelles bien enracinées.