



INSTITUT DE FRANCE
Académie des sciences

Séance solennelle de l'Académie des sciences / 17 juin 2008
Réception sous la coupole de l'Institut de France des Membres élus en 2007

Méthodes analytiques nouvelles en géométrie algébrique complexe
Jean-Pierre Demailly

Depuis les travaux de Bernhard Riemann autour de 1860, les mathématiciens ont utilisé des méthodes issues de la théorie du potentiel pour aborder des questions de géométrie ou de topologie.

Ce point de vue a été considérablement approfondi par Henri Poincaré, comme on l'a vu récemment de manière spectaculaire avec la résolution par Grigori Perelman de la conjecture de Poincaré. Celle-ci énonce une caractérisation topologique de la sphère de dimension 3, et sa solution repose sur l'analyse d'équations d'évolution liées aux équations de la gravitation d'Einstein.

J'ai moi-même contribué modestement à ce courant d'idées en introduisant depuis 1985, et jusqu'aux années récentes, un certain nombre de méthodes analytiques nouvelles permettant de mieux comprendre la géométrie des variétés algébriques. Les objets auxquels je m'intéresse sont les variétés algébriques ou analytiques complexes, c'est-à-dire les ensembles de solutions des équations polynomiales ou analytiques à coefficients complexes. Le problème est de comprendre leur géométrie de divers points de vue : courbure, propriétés topologiques ou arithmétiques.

En 1985, j'ai établi un théorème connu maintenant sous le nom "d'inégalités de Morse holomorphes", qui relie de manière précise la courbure de ces variétés à l'existence de certaines structures algébriques ou analytiques. On utilise pour cela la théorie spectrale de l'oscillateur harmonique en grande dimension, combinée à des considérations de convexité holomorphe. En 1987, Jean-Michel Bismut a pu entrevoir une nouvelle approche probabiliste de ces résultats, en étudiant l'équation de la chaleur de manière approfondie.

Dans les années 1990-2000, je me suis intéressé à l'étude des équations d'Einstein dans le cadre complexe, en particulier à un théorème démontré à la suite des travaux de Thierry Aubin, dont le point final a été apporté en 1977 par Shing-Tung Yau, récompensé par la médaille Fields en 1982. J'ai pu démontrer en particulier des théorèmes de géométrie algébrique effective : la connaissance précise de certaines solutions singulières des équations d'Einstein permet de prédire l'existence d'objets purement algébriques. Ici, on trouve une alliée précieuse dans la théorie des fonctions plurisousharmoniques et celle des courants positifs introduites par mon confrère et ancien maître Pierre Lelong dans les années 1942-

1960. Ces méthodes ont ensuite été développées dans diverses directions par plusieurs équipes de géométrie algébrique dans le monde, sur une durée d'une bonne dizaine d'années.

Depuis 2000, en collaboration avec mon ancien étudiant Mihai Paun, maintenant professeur à l'Université de Nancy, j'ai repris ces techniques dans un cadre un peu différent pour comprendre la géométrie des variétés dites kählériennes : il s'agit des variétés qui interviennent par exemple en théorie des cordes, et qui possèdent une structure extrêmement "symétrique".

Dans ce cadre, Mihai Paun et moi-même avons utilisé les équations d'Einstein pour déterminer de manière précise la relation entre ce que les mathématiciens appellent les "classes de cohomologie positive", d'une part, et la structure topologique des sous-variétés analytiques et algébriques, d'autre part. Ces résultats ont été exposés en séance plénière lors du Congrès International des Mathématiciens à Madrid, en 2006.

Depuis 1993 environ, je poursuis parallèlement un programme de recherches visant à comprendre la géométrie des variétés algébriques dites hyperboliques, en relation avec les propriétés globales des systèmes d'équations différentielles. Ces développements encore en cours ont des applications potentielles en théorie des nombres, à partir des travaux fondamentaux de Faltings et Vojta.

Au delà des mathématiques, je me suis beaucoup impliqué pour tenter de favoriser le développement des logiciels libres dans notre pays, en particulier dans le secteur de l'enseignement et de la recherche. Je suis également très préoccupé par ce qui me semble être une dégradation continue de notre système éducatif depuis 3 ou 4 décennies. Cette dégradation s'est accélérée depuis le milieu des années 1990 et se traduit aujourd'hui par une certaine désaffection pour les sciences. Il me semble urgent que l'Académie des sciences poursuive ses efforts pour remettre en place des programmes d'enseignement riches, structurés et progressifs, afin de remédier à un effritement des contenus provoqué par une succession de réformes régressives sur le plan des connaissances enseignées. Je compte bien tenter d'y contribuer dans la mesure de mes moyens.