

## Académie des sciences

Séance solennelle de réception des Membres élus en 2002

17 juin 2003

---

### **Mathématiques de la physique virtuelle** **Maxime Kontsevitch**

La physique théorique moderne est aujourd'hui dans une situation extraordinaire, qu'elle n'avait jamais connue auparavant. Le modèle dominant des forces fondamentales est la théorie des cordes (ou plutôt Mthéorie) ; il y a très peu, voire même aucune chance qu'on puisse la vérifier expérimentalement.

D'après ce que je comprends, on considère la Mthéorie comme hérétique du point de vue de la physique traditionnelle c'est-à-dire l'étude du monde réel. Néanmoins, ce nouveau développement dans la physique est extrêmement positif pour les mathématiques.

Au milieu des années 80, quand j'étais jeune étudiant à Moscou, j'ai personnellement eu l'occasion d'être le témoin de la naissance d'une des pierres angulaires de la physique théorique moderne, à savoir la théorie des champs conformes dans la dimension deux.

L'impact sur les mathématiques de nouvelles découvertes en physique théorique est énorme. On peut dire qu'auparavant, dans les mathématiques, il y avait un centre principal de mystères c'est-à-dire le groupe de toutes les conjectures qui lient la théorie des nombres, les motifs des variétés algébriques par l'intermédiaire des fonctions L (la généralisation de fonction de zeta de Riemann) aux formes automorphes, c'est à dire l'analyse harmonique sur l'espace localement homogène.

Maintenant la théorie de champs quantiques et la théorie des cordes sont un deuxième centre de mystères et donnent une autre profondeur et des nouvelles perspectives aux mathématiques.

Les règles du jeu dans la nouvelle physique virtuelle ne sont pas fixes, mais on peut y voir quelques modèles communs.

Un mot clé est "quantification" à savoir le passage pas bien défini de la théorie classique des champs (fonctionnelle d'action) à la théorie des champs quantiques. Un autre mot clé est "supersymétrie" c'est à dire l'utilisation des variables impaires (fermions) ainsi que des variables habituelles paires (bosons).

Un de mes contributions a été l'introduction de la technique des diagrammes de Feynman à l'étude de diverses questions en algèbre et topologie. Je les ai employées dans la preuve de la conjecture de Witten sur la topologie des espaces de modules des courbes algébriques, dans la construction des invariants des noeuds (ainsi que les généralisations haut-dimensionnelles) utilisant des algèbres de Lie, et dans la construction de la quantification (dans le sens de la théorie de déformation formelle) des variétés de Poisson.

Pour cette dernière application, ce fut une surprise de constater que la résolution du problème fondamental dans le programme de Bayen, Flato, Fronsdal et Strenheimer sur la quantification des systèmes mécaniques classiques était basée sur un nouveau type de théorie des cordes.

Cela m'amène à vous parler d'une autre chose que nous avons apprise pendant la dernière décennie : la théorie des matrices aléatoires, la topologie dans la dimension deux et l'algèbre non

commutatif (et également l'algèbre homologique) sont étroitement liés. Dans un sens, c'est exact, au point que pour écrire des formules mathématiques nous devons employer du papier bidimensionnel.

Lors du congrès international des mathématiciens à Zurich (1994), j'avais proposé une interprétation de la symétrie miroir (une des merveilleuses découvertes mathématiques des physiciens), comme équivalence dans un sens non commutatif entre les variétés algébriques complexes et les variétés symplectiques réelles.

Pour faire cette correspondance on emploie une notion mathématique très abstraite, les catégories triangulées, introduite par J.-L. Verdier et A. Grothendieck dans les années 60. Maintenant les spécialistes de la théorie des cordes emploient librement cette notion, nous parlons donc vraiment la même langue !

Un des corollaires de la symétrie miroir est que, typiquement, le groupe des symétries d'une catégorie triangulée associée à une variété algébrique est le groupe fondamental d'une autre variété algébrique complexe.

Un autre enseignement de la théorie des cordes a été une nouvelle représentation d'effondrement en géométrie riemannienne, particulièrement pour les variétés avec la métrique qui satisfait l'équation d'Einstein..

J'ai trouvé une relation de cette représentation avec la géométrie algébrique sur les corps non-archimèdiens.

Je ne m'attarderai pas sur les autres impacts très importants de la physique théorique notamment sur les applications de la topologie dans la dimension quatre (par l'intermédiaire de la théorie de gauge), et sur les applications du modèle Wess-Zumino-Witten en théorie des représentations des algèbres de Lie affines et la correspondance géométrique de Langlands, et aussi en théorie des groupes quantiques, parce que je ne suis pas un expert dans ces domaines.

Pour moi qui suis mathématicien, il est très intéressant de déchiffrer les règles du jeu en physique théorique. Finalement on ne voit pas beaucoup les structures mais surtout la symétrie, la localité et la linéarité des quantités observables. Il est très surprenant que ces contraintes faibles mènent finalement à des structures très riches et compliquées.

Il n'y a pourtant aucune définition générale satisfaisante de la théorie des champs quantiques (sauf la théorie des champs conformes dans la dimension deux). Cela pose de nombreux problèmes intrigants comme celui d'interpréter la super-symétrie dans un sens plus large comme la géométrie complexe dans la dimension infinie.

Je finirai ce discours par quelques mots de politique scientifique.

Nous vivons aujourd'hui une nouvelle période très heureuse pour le développement des mathématiques. Psychologiquement la situation pour les physiciens est plus compliquée. C'est pourquoi je voudrais demander aux physiciens expérimentaux de ne pas faire trop de pression sur les théoriciens dont les accomplissements intellectuels collectifs des vingt dernières années représentent un bijou précieux dans l'histoire de l'esprit humain.