Monsieur le Président,
Monsieur le Vice-Président,
Madame et Monsieur les Secrétaires Perpétuels,
Chères Consœurs, Chers Confrères,
Mesdames, Messieurs,

J'étais adolescent quand j'appris avec émerveillement comment l'arithmétique a parfois recours à des arguments de nature géométrique. Que l'on sache compter des formes ou des figures est bien naturel, mais que ce comptage nous apporte parfois de nouvelles connaissances sur les nombres eux-mêmes, et que notre intuition visuelle puisse être utilisée pour dévoiler certains mystères numériques, voilà qui a de quoi nous étonner.

Car marier géométrie et arithmétique ne va pas de soi. Fermât écrivait : "II est à peine quelqu'un qui propose des questions purement arithmétiques, il est à peine quelqu'un qui sache les résoudre. Est-ce parce que l'Arithmétique a plutôt été traitée jusqu 'à présent au moyen de la Géométrie que par elle-même ? C'est la tendance qui apparaît dans la plupart des ouvrages tant anciens que modernes, et dans Diophante lui-même. Car s'il s'est écarté de la Géométrie un peu plus que les autres .. ., il ne s'en est pas dégagé tout à fait... Cependant l'Arithmétique a un domaine qui lui est propre". En somme, Fermât se proposait de soustraire l'arithmétique à l'influence néfaste et émolliente de la géométrie.

Ces deux disciplines se distinguent fondamentalement par le choix des nombres qu'elles emploient. L'arithmétique étudie les "nombres entiers" l, 2, 3, 4, 5, etc. .., auxquels on ajoute, par commodité, 0, -l, -2, -3, ... Mais pour décrire une figure il faut beaucoup plus de nombres, le nombre TT par exemple, et tous les nombres décimaux avec éventuellement une infinité de chiffres après la virgule, ce qu'on appelle les "nombres réels". Or les propriétés des nombres entiers et des nombres réels sont très différentes.

On peut ajouter, soustraire, multiplier ou diviser les nombres réels. Mais pour les nombres entiers, si l'on dispose de l'addition, de la soustraction et de la multiplication, il nous manque la division : 12 est divisible par 2 et 3 mais pas par 5 ou 13. Il fallut attendre le dix-neuvième siècle pour que l'algèbre des ensembles de nombres sans division prenne son essor. Une longue maturation conduisit ensuite à penser cette algèbre en termes géométriques. Elle aboutit, dans les années 1960, à la notion de "schéma", mise en oeuvre par Grothendieck.

C'est un des outils les plus puissants de l'arithmétique contemporaine.

Par ailleurs, si les nombres réels forment un continuum, les nombres entiers sont isolés parmi les nombres réels. La "géométrie des nombres", créée par Minkowshi à la fin du dix-neuvième siècle, vise à exploiter ce contraste entre le continu et le discret. Elle étudie les "réseaux euclidiens". Les sommets d'un quadrillage du plan sont un réseau euclidien. Plus généralement, si l'on pave régulièrement le plan avec un parallélogramme et ses translatés, les sommets de cette figure forment un réseau euclidien. La même construction peut être faite eu dimension trois ou plus. Les atomes d'un cristal forment un réseau euclidien. Il en est de même des centres des alvéoles d'une ruche, ou des signaux d'un code performant - ce dernier exemple explique peut-être que l'étude des réseaux euclidiens soit un des thèmes privilégiés par le millier de mathématiciens qui travaillent aujourd’hui, dans le plus grand secret) pour la National Security Agency des Etats-Unis.

La géométrie des nombres permet de relier la surface de la maille élémentaire d'un réseau à la distance minimale entre deux de ses points. Et ce type de résultats géométriques s'avère étonnamment efficace en théorie des nombres.

Au début des années mille neuf cent soixante dix, un jeune mathématicien russe, du nom d'Arakelov, proposa une synthèse nouvelle, subtile et harmonieuse, entre la théorie des schémas de Grothendiech et la géométrie des nombres de Minkowski. C'est au développement de cette "géométrie d'Arakelov" que je me suis consacré dans les vingt dernières années, avec mon collègue Henri Gillet, un mathématicien Irlandais établi à Chicago. Arakelov avait dû arrêter prématurément les mathématiques. Sa théorie n'était comprise qu'en dimension deux. Nous avons décidé de l'étendre en toutes dimensions et de démontrer les théorèmes dans le cadre le plus général possible.

L'analogie avec d'autres contextes géométriques fut notre fil d'Ariane. Nous avons bientôt rencontré de grosses difficultés analytiques, et nous ne serions jamais parvenus au but cherché si nous n'avions fait équipe avec Jean-Michel Bismut, dont le talent et la puissance de travail me remplissent d'admiration.

C'était une expérience passionnante que de vivre une telle collaboration scientifique, où l'on dépasse l'esprit de compétition habituel pour partager ses intuitions et poursuivre à plusieurs un objectif commun. Nous nous sommes remarquablement entendus et avons réussi ce qu'aucun de nous n'aurait pu faire isolément.

Ces nouvelles méthodes ont contribué à la démonstration, par Faltings, Vojta et Ullmo, de certaines conjectures célèbres concernant les équations diophantiennes. Par ailleurs, nous avons eu la surprise de voir apparaître dans nos calculs des valeurs inhabituelles de la fonction zêta de Riemann; ceci est à l'origine de brillants -résultats, obtenus récemment par Maillot et Roessier, sur les valeurs de fonctions L.

Je continue aujourd'hui l'étude de cette théorie. Car je suis convaincu que la géométrie d'Arakelov nous fournira encore à l'avenir de très beaux théorèmes arithmétiques.

C.Soulé