INSTITUT DE FRANCE
Académie des sciences

Séance solennelle de l'Académie des sciences / 16 juin 2009
Réception des nouveaux Membres sous la coupole de l'Institut de France

Évolutions aléatoires complexes
Wendelin Werner

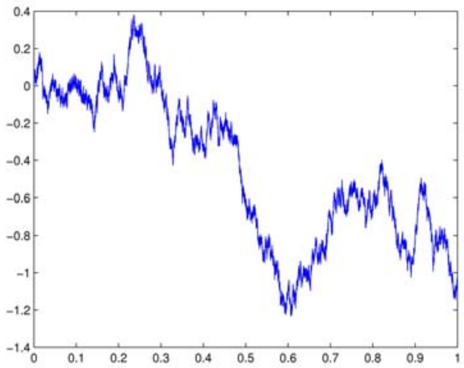
C'est avec une humilité non feinte que je me présente devant vous aujourd'hui. J'ai bien conscience que mon élection à l'Académie à un stade relativement précoce de ma vie académique est liée à la médaille Fields que j'ai reçue voici trois ans et qui n'est attribuée qu'aux mathématiciens de moins de quarante ans. Mon expérience est donc limitée, et j'ai véritablement l'impression de ne pas savoir tellement plus de choses que lorsque j'étais étudiant.

Ces dernières années, j'ai été souvent sollicité pour donner mon avis scientifique sur de nombreux articles, dossiers et chercheurs, et j'ai découvert que celui-ci était maintenant bien plus écouté. Mais dans de nombreux cas, je ne me sens tout simplement pas compétent, et il me semble alors important d'insister sur mon ignorance. Je ne comprends bien qu'une toute petite partie de la science; ce qui m'intéresse avant tout, c'est de continuer à apprendre et à transmettre, et non d'évaluer ou juger à droite et à gauche, hors de mon champ d'expertise.

Ma thématique de recherche, la théorie des probabilités, a connu un essor certain au cours de ce dernier demi-siècle. Je pense par exemple au calcul stochastique, développé depuis Kyoshi Itō et Paul Lévy, et pour lequel on peut dire qu'une "école française" a joué un rôle important. Je n'oublie pas que mes travaux se situent dans la lignée de ceux de nombreux chercheurs auxquels je dois, ainsi qu'à mes professeurs (comme mon patron de thèse Jean-François Le Gall), une grande partie de ce que je sais aujourd'hui. Les probabilités ont été, pendant toute une période, relativement isolées du reste des mathématiques. Du coup, une sorte de rattrapage s'est effectué lors de cette dernière décennie, et le rapprochement entre les probabilités et les autres branches des mathématiques a permis des avancées parfois surprenantes.

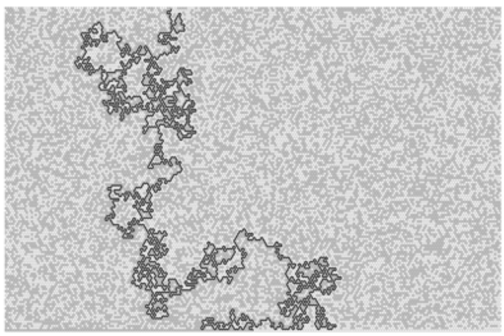
Je ne vais bien entendu pas vous faire ici un exposé mathématique mais je ne résiste pas à la tentation de vous donner une description impressionniste de quelques idées sous-jacentes à mes préoccupations scientifiques :

Le mouvement brownien joue un rôle tout à fait fondamental dans la théorie du calcul stochastique. Rappelons qu'il s'agit d'une courbe aléatoire, qui peut être comprise comme la limite à grande échelle et convenablement normalisée d'une très longue marche aléatoire, qui à chaque pas, tire à pile ou face pour choisir de monter ou de descendre. Le mouvement brownien est intrinsèquement lié à la notion de loi gaussienne. L'une de ses principales caractéristiques est le fait que les incréments se répartissent de manière relativement homogène au cours du temps. Si l'on décompose le temps en toutes petites portions, les contributions de chacune d'entre elles sont en quelque sorte de même importance.



Le même type de phénomène se produit de manière plus générale pour toute une classe d'évolutions continues dans les espaces de dimension finie. Elles peuvent en fait être définies (c'est justement l'objet du calcul stochastique) à partir de trajectoires browniennes, comme des solutions d'équations différentielles stochastiques.

Si l'on devait essayer de dégager un thème général de mes travaux, ce serait sans doute la recherche, la définition et l'étude de processus aléatoires inspirés par la physique qui sortent de ce cadre. En voici un exemple:



On peut comprendre cette courbe aléatoire de la manière suivante: elle croît au hasard dans le plan, mais on lui interdit (à chaque pas) de se recouper. Cet algorithme semble simple, mais il s'avère très ardu d'étudier le comportement à grande échelle d'une telle trajectoire. La solution a consisté à utiliser des outils d'analyse complexe (c'est à dire de voir le plan comme l'ensemble des nombres imaginaires et d'utiliser la théorie des transformations conformes développée depuis Riemann, et en particulier une idée de Charles Loewner) qui permettaient de définir ces courbes via l'itération de transformations conformes indépendantes, et de les étudier en détail (ce sont les évolutions de Schramm-Loewner).

Mes travaux ont été motivés et inspirés par ceux de nos amis physiciens théoriciens sur ces mêmes questions qui se trouvent en fait être reliées aux transitions de phase pour des modèles naturels de la mécanique statistique comme la percolation ou le modèle d'Ising. Ils ont été très généreux (je pense par exemple à Michael Aizenman, John Cardy, Bertrand Duplantier et Bernhard Nienhuis) en venant vers nous autres mathématiciens pour nous présenter ces problèmes, et en accueillant nos contributions de manière ouverte et positive.

Je ne peux bien entendu pas clore cette intervention sans mentionner mes coauteurs principaux, Bálint Tóth, Greg Lawler et Oded Schramm, avec lesquels j'ai eu le privilège de travailler. C'était une chance, tant sur le plan scientifique que sur le plan humain. J'ai en ce jour une pensée toute particulière pour Oded Schramm, disparu tragiquement en montagne voici moins d'un an, sans lequel je ne me trouverais certainement pas devant vous aujourd'hui, et je me remémore ces moments, où, en bermudas et sandales devant un tableau rempli, nous nous sommes rendus compte que nous venions de comprendre quelque chose. Ces instants simples et magiques sont sans doute parmi les plus précieux dans la vie d'un mathématicien.

Je vous remercie de votre attention.