INSTITUT DE FRANCE
Académie des sciences

Réception des Membres élus en 2004
le 14 juin 2005

L'analogie en mathématiques
Gérard Laumon

Je remercie l'Académie de l'honneur qu'elle m'a fait en m'accueillant.

Une façon efficace et séduisante de progresser en mathématiques est de procéder par analogie. Deux contextes a priori fort éloignés peuvent recéler des similitudes inattendues et se révéler en définitive intimement liés.

Un exemple classique est l'analogie entre les corps de nombres et les corps de fonctions. D'une part, on a les nombres entiers et les nombres rationnels, d'autre part on a les polynômes à une variable et les fractions rationnelles sur un corps fini. De la simple division euclidienne au très élaboré programme de Langlands, toute une branche des mathématiques peut être développée en parallèle sur les corps de nombres et sur les corps de fonctions. C'est André Weil qui le premier a réalisé l'importance de cette analogie en démontrant l'hypothèse de Riemann sur les corps de fonctions, le cas des corps de nombres étant encore ouvert à ce jour.

Dans la rénovation de la géométrie algébrique par Alexandre Grothendieck et Jean-Pierre Serre entre 1950 et 1970, de nouveaux objets ont été introduits tels les schémas et les faisceaux sur ces schémas. Ces objets fort abstraits sont des analogues des notions plus familières que sont les variétés comme la droite, le plan ou la sphère, et les fonctions sur ces variétés comme les fonctions d'une ou plusieurs variables réelles, Š La formule des traces et le formalisme des six opérations d'Alexandre Grothendieck permettent de traduire des opérations sur les fonctions en des opérations sur les faisceaux.

Un des aboutissements les plus spectaculaires et aussi les plus profonds de cette rénovation de la géométrie algébrique est la démonstration donnée en 1964 par Alexandre Grothendieck pour une partie, puis en 1973 par Pierre Deligne pour l'autre partie, de conjectures formulées par André Weil en 1949. Ces résultats ont permis à Pierre Deligne, en utilisant le formalisme des six opérations, d'obtenir des majorations de sommes exponentielles jusque là inaccessibles. Dans une suite naturelle à ces travaux sur les sommes exponentielles, Pierre Deligne a montré que la transformation de Fourier, si utile en physique et dans le traitement des informations, avait un analogue dans le cadre des faisceaux étales.

C'est en prolongeant cette analogie au principe de la phase stationnaire que j'ai réussi à démontrer une formule du produit pour les constantes d'équations fonctionnelles de fonctions L et à effectuer par là même une étape dans le programme de Langlands sur les corps de fonctions, programme si brillamment conclu par Laurent Lafforgue.

En utilisant la force de cette transformation de Fourier au niveau des faisceaux, j'ai pu également donner une démonstration de la conjecture de Weil mentionnée précédemment plus directe que celle donnée par Pierre Deligne.

Dans les tentatives des mathématiciens pour comprendre certaines théories physiques récentes et en particulier la théorie des bosons de Higgs, Nigel Hitchin a introduit par analogie une fibration qui porte maintenant son nom.
Il n'y avait aucun lien évident entre cette construction et le programme de Langlands géométrique, proposé par Vladimir Drinfeld par analogie avec le programme de Langlands arithmétique. Pourtant, j'ai pu démontrer que la fibre en 0 de cette fibration joue un rôle crucial dans le programme de Langlands géométrique.

Il n'y avait pas non plus de relation a priori entre la fibration de Hitchin et une conjecture technique, mais centrale, du programme de Langlands, connue sous la terminologie un peu baroque de « Lemme fondamental ». En collaboration avec Ngô Bao Châu, j'ai montré qu'il n'en était rien et qu'en fait la magnifique construction de Nigel Hitchin, ou plutôt son analogue arithmétique, était précisément l'outil qui manquait pour démontrer ce Lemme fondamental pour les groupes unitaires.

L'approche d'un problème non résolu par analogie avec un autre pour lequel une solution est connue n'est certes ni nouvelle, ni limitée aux mathématiques. Mais comme elle m'a beaucoup servi et m'a permis de répondre à quelques questions, il m'a paru naturel de la mettre en valeur dans ce discours.

Je vous remercie.