INSTITUT DE FRANCE
Académie des sciences

Séance solennelle de remise des Prix le 13 octobre 2009

Harmonie ou Chaos dans les Systèmes Dynamiques
par **Étienne Ghys, Membre de l'Académie des sciences**

Il y a trois cent quarante-trois ans — l'année de la fondation de l'*Académie des Sciences* — un tout jeune homme allait révolutionner notre point de vue sur le monde. Pour lui, cette année 1666 fut merveilleuse : son *annus mirabilis* comme diront les historiens. Il découvrait que, contrairement à ce que pensaient les Anciens, les forces qui animent le monde sont universelles, partout de même nature, que ce soit lors du mouvement de la Lune ou de la chute d'une pomme. Mais aussi, il inventait un outil mathématique merveilleux — le *calcul différentiel*, qu'il appelait le *calcul des fluxions* — qui permet de *prévoir* les mouvements. Prévoir l'avenir... le vieux rêve de la Science. Isaac Newton mettra vingt ans pour rédiger son chef d'œuvre, les « *Principes mathématiques de philosophie naturelle* », les Principes mathématiques de Physique, dirait-on aujourd'hui. Il craint que son principal rival Leibniz ne revendique également cette découverte du calcul différentiel, ce qui d'ailleurs serait justifié. Il lui écrit une lettre le 26 octobre 1676 dans laquelle il cache son secret sous forme codée :

« 6a, 2c, d, ae, 13e, 2f, 7i, 3l, 9n, 4o, 4q, 2r, 4s, 8t, 12v, x »

Leibniz n'a pas décodé ce message mais les historiens des sciences, probablement aidés par des cruciverbistes latinistes, ont fini par décrypter la phrase latine qui se cachait dans l'anagramme :

« Data aequatione quotcunque fluentes… »

Je vous fais grâce de la suite. En français, cela veut dire : « *Étant donnée une équation mettant en jeu des variables, trouver ses dérivées, et vice versa* ». Le calcul différentiel et intégral est une boule de cristal incroyablement efficace pour prédire l'avenir : il permet de calculer le mouvement futur d'un système en connaissant sa situation présente et les forces qui lui sont appliquées. On dit qu'on résout une *équation différentielle* ou qu'on trouve ses solutions.

La première période de l'histoire de la Dynamique — la science du mouvement — venait de commencer. *On vous donne une équation différentielle et votre mission est d'en trouver les* *solutions !* Voilà le message codé de Newton.

La tâche était immense. Les mathématiciens et les physiciens — la distinction n'avait pas grand sens à l'époque — vont s'y attaquer avec frénésie. On trouverait difficilement un mathématicien dans les deux siècles qui suivent qui ne se soit pas préoccupé d'équations différentielles, d'une manière ou d'une autre. Il est vrai, chers confrères, que notre Compagnie acceptera difficilement qu'un anglais ose bouleverser la Science et va lui préférer pendant un temps une théorie des tourbillons, un peu fumeuse mais due à notre compatriote Descartes !

Le monde de Newton est hérité des Anciens : l'« *harmonie des sphères* » de Pythagore. Le paradigme est celui du mouvement périodique : le Soleil se lève tous les matins, mon cœur bat soixante ou soixante-dix fois par minute, la Terre tourne autour du Soleil en trois cent soixante-cinq jours six heures neuf minutes neuf secondes et soixante-seize centièmes de seconde. Un monde harmonieux et *prévisible* fait de cycles qui se superposent. La croyance —le mythe — le dogme — que les mouvements, peut-être après une courte période de transition, finissent par se stabiliser, soit en s'arrêtant, soit en oscillant périodiquement, dominera longtemps la Science. Qui n'a pas étudié le mouvement d'oscillation harmonique d'une masse suspendue à un ressort, en travaux pratiques de Physique, en classe de seconde ?

Les dix-huitième et dix-neuvième siècles virent le triomphe de l'*Analyse mathématique*. On résolvait des équations différentielles à tour de bras. On inventait de nouvelles fonctions pour les analyser. On calculait l'avenir. Le Verrier découvrait par exemple la planète Neptune par le calcul différentiel, « *du bout de sa plume* » comme dira Arago. L'optimisme était grand. Voici par exemple une citation célèbre de Laplace, datant de 1814, restée comme l'une des définitions classiques du déterminisme.

« Nous devons envisager l'état de l'Univers comme l'effet de son état antérieur et la cause de ce qui va suivre. Une intelligence qui pour un instant donné connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée et la situation respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ces données à l'analyse, embrasserait dans la même formule le mouvement des plus grands corps de l'Univers et ceux du plus léger atome : rien ne serait incertain pour elle, l'avenir comme le passé serait présent à ses yeux. »

Laplace avait vu juste : pour prévoir l'avenir, il faut... une intelligence assez vaste !

Vers la fin du dix-neuvième siècle, la machine s'essoufflait et les progrès devenaient rares. On prit conscience que l'immense majorité des équations différentielles étaient si complexes qu'il était illusoire d'en expliciter les solutions. Notre intelligence n'était pas assez vaste. La boule de cristal « calcul différentiel » devenait trouble.

Il fallait de nouvelles idées.

*
* *

Il y a cent vingt-huit ans, un tout jeune homme — français cette fois — maître de conférences à Caen — eut une idée révolutionnaire. Il proposa d'être modeste. Je dois vous dire que la modestie n'est pas la qualité première des mathématiciens. Henri Poincaré suggère une approche qualitative. Lorsqu'on apprend au lycée à étudier une courbe, on commence par déterminer les éléments remarquables, les maxima, les minima, les points d'inflexions, les asymptotes etc. Ensuite, on dispose d'assez d'informations pour se faire *une idée* de la courbe et on peut la tracer à main levée, ce qui est bien souvent tout aussi utile, sinon plus, que la courbe tracée par une calculette. De la même manière, Poincaré développe une théorie qualitative qui permet de se faire une idée des solutions d'une équation différentielle sans avoir besoin de la résoudre.

Son grand mémoire de 1881 « *Sur les courbes définies par des équations différentielles* » marque le début de la deuxième période de la théorie des systèmes dynamiques. *On vous donne une équation différentielle et votre mission n'est plus d'en trouver les solutions mais, plus modestement, de dire quelque chose sur les solutions, d'intéressant si possible.* Par exemple, plutôt que d'essayer de déterminer l'équation exacte de l'orbite de la Lune — ce qui serait irréalisable— peut-on au moins s'assurer qu'elle ne va pas s'écraser sur la Terre ?

La méthode fonctionna à merveille dans un premier temps, tout au moins pour les « petits systèmes », à deux degrés de liberté comme on dit, et sembla confirmer le mythe des mouvements cycliques harmonieux. Poincaré montre en effet que dans ce cas les mouvements finissent par se stabiliser sur des cycles. Mais il rencontre également, dans des systèmes plus importants, des phénomènes dynamiques d'une complexité extrême — qu'on appelle aujourd'hui *chaotiques* — qui ne se stabilisent pas sur des cycles, dont le comportement semble erratique, totalement imprévisible, et sur lesquels … il ne sait pas trop quoi dire. Lui, le géomètre par excellence, renonce même à les dessiner. Voici ce qu'il écrit dans les « *Méthodes nouvelles de la mécanique céleste* » :

« On sera frappé de la complexité de cette figure, que je ne cherche même pas à tracer. Rien de plus propre à nous donner une idée de la complication du problème des trois corps et en général de tous les problèmes de la Dynamique. »

Il rencontre cette complexité en mécanique céleste mais il en donne également un exemple météorologique dans « *La Science et la Méthode* » en 1908. Voici ce qu'il écrit :

« Pourquoi les météorologistes ont-ils tant de peine a prédire le temps avec quelque certitude ? [...] Nous voyons que les grandes perturbations se produisent généralement dans les régions où l'atmosphère est en équilibre instable. Les météorologistes voient bien que cet équilibre est instable, qu'un cyclone va naître quelque part ; mais où, ils sont hors d'état de le dire ; un dixième de degré en plus ou en moins en un point quelconque, le cyclone éclate ici et non pas là, et il étend ses ravages sur des contrées qu'il aurait épargnées. Si on avait connu ce dixième de degré, on aurait pu le savoir d'avance, mais les observations n'étaient ni assez serrées, ni assez précises, et c'est pour cela que tout semble dû à l'intervention du hasard. Ici encore nous retrouvons le même contraste entre une cause minime, inappréciable pour l'observateur, et des effets considérables, qui sont quelquefois d'épouvantables désastres. »

Comment comprendre ces situations chaotiques dans lesquelles toute prévision semble vouée à l'échec ? Faut-il se résigner à ce constat d'imprévisibilité et parler de l'intervention du hasard au risque de ne plus rien prévoir ?

*
* *

Il y a cinquante ans, un jeune américain, Steve Smale, propose une nouvelle approche. Son article « *Les systèmes dynamiques différentiables* » allait modifier le paysage en profondeur. Smale sait bien qu'on ne connaît que rarement la position présente d'un système avec une précision totale et que ceci entraîne des incertitudes considérables sur le comportement futur. Mais surtout, il observe que bien souvent on ne connaît même pas les forces qui agissent avec précision. On se trouve donc dans cette situation apparemment désespérée dans laquelle on ne connaît même pas l'équation différentielle qu'il s'agit de résoudre !

C'est la troisième période de la théorie — la période actuelle — *On ne vous donne pas une équation différentielle et votre mission est de dire quelque chose d'intéressant sur ses solutions !*

Dans un premier temps, le jeune Smale fait preuve d'un optimisme étonnant. Il pense que le chaos n'est qu'une exception rarissime. Si cela avait été le cas, les systèmes chaotiques n'auraient pas véritablement mérité qu'on les étudie. Un point de vue dans l'esprit de René Thom : le mathématicien doit se concentrer sur les objets génériques et négliger les cas exceptionnels.

Mais l'optimisme ne dura pas. Smale ne tarda pas à réaliser que le chaos n'est pas rare, et que nous sommes donc dans l'obligation de l'étudier de près. Il découvre un exemple — dit-on en réfléchissant sur la plage de Copacabana à Rio de Janeiro— qu'il baptise « *fer à cheval* ». Newton n'avait-il pas dit qu'*« il était comme un petit garçon qui joue sur la plage prenant plaisir à trouver de-ci de-là un galet un peu plus lisse, ou un coquillage un peu plus beau qu'à l'ordinaire »* ? Smale, quant à lui, trouve un fer à cheval dans le sable ! Il s'agit d'un système dynamique qui allie deux propriétés en apparence contradictoires : chaos et stabilité. D'abord, le fer à cheval est chaotique ; son mouvement semble complètement imprévisible. Mais aussi, le fer à cheval est stable, structurellement stable comme disent les mathématiciens. Cela signifie que si l'on modifie légèrement la dynamique, si on considère un fer à cheval un peu déformé, eh bien, la nouvelle dynamique sera essentiellement la même qu'auparavant et présentera en particulier le même chaos. Le chaos est présent et bien présent, indestructible, et pourtant la dynamique globale avec toute sa complexité, est stable, insensible aux perturbations. Même en ignorant les détails d'un fer à cheval, on a une bonne idée de son comportement, pourtant chaotique.

Poincaré l'avait pressenti lorsqu'il écrivait en 1908 :

« Vous me demandez de vous prédire les phénomènes qui vont se produire. Si, par malheur, je connaissais les lois de ces phénomènes, je ne pourrais y arriver que par des calculs inextricables et je devrais renoncer à vous répondre ; mais, comme j'ai la chance de les ignorer, je vais vous répondre tout de suite. Et, ce qu'il y a de plus extraordinaire, c'est que ma réponse sera juste. »

La coexistence du chaos et de la stabilité structurelle est un fait absolument remarquable.

L'école mathématique qui s'est développée à la suite de Smale est bien vivante aujourd'hui. L'exemple initial du fer à cheval a été assimilé et généralisé. Aujourd'hui on parle de *systèmes chaotiques hyperboliques*. Une terminologie abominable et sans imagination : les mathématiciens ont malheureusement une fâcheuse tendance à coller le qualificatif « *hyperbolique* » à presque tous les concepts qu'ils rencontrent ! La clef du mécanisme du chaos dans ces systèmes hyperboliques réside dans un judicieux mélange de dilatation et de contraction. On donne souvent l'exemple du boulanger qui pétrit sa pâte en l'étirant dans certaines directions et en la contractant dans d'autres. Cinquante ans plus tard, ces systèmes chaotiques hyperboliques n'effraient plus personne et on dispose d'une théorie solide pour les décrire. Nos ordinateurs nous permettent même de faire ce que Poincaré ne savait pas faire : les dessiner. Et on voit alors apparaître une beauté surprenante.

Un moment, Smale, un peu moins jeune mais toujours optimiste, a pensé qu'il avait atteint son but, et qu'il ne pouvait essentiellement exister que deux sortes de dynamiques, quitte à négliger des cas exceptionnels. La première sorte contient les dynamiques régulières, prévisibles, héritières des cycles harmonieux, et la seconde contient les dynamiques chaotiques hyperboliques, structurellement stables et bien comprises. Hélas — ou heureusement — on sait aujourd'hui que ces deux sortes de dynamiques sont très loin de représenter toutes les possibilités. Dans l'imaginaire des chercheurs, les fers à cheval et leurs généralisations hyperboliques occupent une place qui diminue de jour en jour.

Alors, c'est qu'il existe d'autres mécanismes pour décrire le chaos. Pour en donner une idée, le mieux est de citer Edward Lorenz. Vers 1960, ce physicien météorologiste insiste sur l'importance concrète des systèmes chaotiques dans les phénomènes naturels. Vous savez, le fameux « *effet papillon* » si médiatisé :

« Le battement des ailes d'un papillon au Brésil peut-il engendrer un ouragan au Texas ? »

Ce serait une erreur que de limiter la théorie du chaos à un tel constat. Si un papillon peut engendrer un ouragan, tous les autres papillons ont le même « pouvoir » et, comme il y a beaucoup de papillons, cela semble rendre toute prévision chimérique. Sans parler des autres espèces animales, qui peuvent être autrement plus dangereuses, à commencer par l'Homme... Une théorie ne peut se fonder sur un constat d'échec. Voici par contre ce qu'écrit Lorenz :

« J'avance l'idée qu'au fil des années les petites perturbations ne modifient pas la fréquence d'apparition des événements tels que les ouragans : la seule chose qu'ils peuvent faire, c'est de modifier l'ordre dans lequel ces événements se produisent. »

Voilà un énoncé scientifique ! Le but de la prévision n'est plus de déterminer la température qu'il fera à Paris le 13 octobre 2019 par exemple — ce serait vain — mais plutôt d'essayer de prévoir des moyennes, des statistiques, comme par exemple le nombre de jours de pluie à Paris en octobre 2019. L'idée est que ces statistiques sont — peut-être — insensibles aux conditions initiales : les papillons brésiliens n'y peuvent rien ! Cette hypothèse — non démontrée — la possible coexistence d'un chaos météorologique dans lequel les mouvements futurs sont sensibles aux conditions initiales, et d'une stabilité statistique, insensible aux conditions initiales, mettra longtemps avant d'être formulée mathématiquement. Lorenz travaillait dans une discipline différente de celle de Smale, et le contact ne fut pas facile. Les barrières entre disciplines sont plus nombreuses que jamais.

En termes techniques, on dit aujourd'hui qu'un système dynamique possède une « *mesure de Sinai-Ruelle-Bowen* » si la statistique de son futur est insensible aux conditions initiales. Aujourd'hui, déterminer si un système chaotique possède une telle stabilité statistique est un enjeu majeur de la théorie. Il y a quinze ans, Jacob Palis a formulé tout un ensemble de conjectures selon lesquelles la quasi-totalité des systèmes dynamiques — des équations différentielles si vous préférez — devraient posséder cette stabilité statistique. Tout un groupe de mathématiciens s'attaquent énergiquement à ces conjectures et semblent les résoudre en ce moment, petit bout par petit bout, méthodiquement... Une image globale semble émerger. Cette image est-elle une fois de plus trop optimiste ? L'avenir le dira.

*
* *

Depuis près de trois siècles et demi, les mathématiciens étudient les systèmes dynamiques. Depuis la vision presque arrogante d'un Laplace qui envisageait d'« *embrasser dans la même formule le mouvement des plus grands corps de l'Univers et ceux du plus léger atome »*, nous ne voyons plus le monde de la même façon. Les cycles harmonieux et prévisibles ont dû faire une place aux fers à cheval chaotiques, dont il a fallu apprivoiser la dynamique.

Mais quelle place faut-il faire au chaos ? Comment expliquer qu'on a mis si longtemps avant de remarquer les phénomènes chaotiques ? L'importance relative des comportements harmonieux et prévisibles, par rapport aux comportements chaotiques, reste le grand problème du moment. Quel est le comportement le plus fréquent dans la Nature ? Bien sûr, vous avez compris que lorsque je parle de Nature, je parle tout autant du monde physique que du monde mathématique, infiniment plus étendu.

Vaste programme de recherche sur lequel un grand nombre de mes collègues mathématiciens travaillent actuellement avec enthousiasme. Je voudrais terminer en formulant le vœu que ces collègues n'oublieront pas les leçons de l'Histoire, qu'ils ne s'isoleront pas dans leur monde mathématique, et qu'ils sauront tirer tout le parti possible d'interactions avec toutes les autres sciences. Qu'ils n'oublient pas que Newton et Poincaré étaient aussi des physiciens.

*
* *