INSTITUT DE FRANCE
Académie des sciences

Réception des Associés étrangers élus en 2005 / 12 décembre 2006

COORDONNÉES COMPLEXES EN GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE ET EN TOPOLOGIE

Simon K. DONALDSON
Professeur de Mathématique
Imperial College à Londres (UK)

Au cours de mes recherches en Mathématiques, je me suis intéressé à ce que l'on appelle la Géométrie et plus particulièrement à ses interactions avec l'Analyse, l'Algèbre et la Physique mathématique.

Si je devais trouver dans l'ensemble de mon travail un lien entre tous ces domaines, il me viendrait à l'esprit la notion de nombre complexe et son rôle clé en Géométrie. Vous connaissez très certainement cette idée, originellement due à Descartes, de décrire des points de l'espace avec des coordonnées dans un repère : deux coordonnées réelles pour un point du plan, trois pour un point de l'espace et ainsi de suite. La généralisation naturelle de cette idée conduit à introduire ce que l'on appelle une variété de dimension n, où les points sont décrits localement par n coordonnées. Ici, une subtilité réside dans le fait que l'on ne peut pas forcément utiliser les mêmes coordonnées sur tout l'espace (songez à une surface en forme de sphère ; c'est bien une variété pour laquelle latitude et longitude permettent de repérer tous les points sauf les pôles). L'espace-temps de dimension 4 d'Einstein ou bien les espaces de conjurations de systèmes mécaniques sophistiqués ou encore les modèles économiques fournissent tous des exemples de variétés, preuve de la richesse de ce concept.

Jusque là, nous avons pensé à décrire les points de l'espace avec des coordonnées données par des nombres réels. Mais il existe des situations où il est à la fois avantageux et pertinent de décrire ces points en utilisant des nombres complexes (un exemple fort simple résulte de l'identification d'un point du plan avec un nombre complexe : ainsi la rotation de 90 degrés est juste la multiplication par le nombre imaginaire pur i). Cela nous conduit à la notion de variété complexe. Je dois dire que cela n'est pas en soi une idée nouvelle : les variétés complexes ont été étudiées depuis de nombreuses années et il y a toute une littérature à ce sujet. Une part importante de ma recherche a été d'explorer en profondeur cette idée et de découvrir des connexions insoupçonnées avec d'autres domaines. Donnons maintenant quelques détails, en commençant par parler de topologie.

Par topologie, nous entendons l'étude des propriétés d'un objet qui restent inchangées lors d'une déformation continue de celui-ci. La topologie en dimension 4 réelle a des caractéristiques très particulières qui la rendent difficile à comprendre, et il reste encore beaucoup de questions ouvertes et fondamentales dans ce domaine. En tout état de cause, dans ce monde de la dimension 4, se distingue la famille des variétés complexes de dimension 2, c'est à dire les variétés où chaque point peut être décrit par 2 coordonnées complexes. Par exemple, si nous considérons l'équation z4 1 + z4 2 + z4 3 = 1, l'ensemble des solutions de cette équation forme une variété complexe de dimension 2. Les variétés complexes sont en fait mieux comprises et une large part de mon travail a été de transcrire les idées de leur monde dans le contexte plus général des variétés de dimension 4 réelles.

Dans ma thèse et au cours des années qui ont suivi, j'ai utilisé les instantons de Yang-Mills, un concept qui provient des théories de Gauge en physique des particules pour les variétés de dimension 4. Ces instantons sont intimement reliés à la notion de fibres vectorielles holomorphes au-dessus de variétés complexes. Leur étude a révélé des phénomènes nouveaux pour la topologie des variétés de dimension 4, que l'on considérait auparavant comme très différente de la topologie des variétés complexes (Ces idées ont connu un développement spectaculaire avec l'arrivée des invariants de Seiberg-Witten et pour les variétés de dimension 4, la découverte de classe de base analogue de la bien connue classe du diviseur canonique pour une variété complexe). De la même manière, j'ai développé des techniques similaires à celles présentes dans la théorie classique de Picard-Lefschetz du monde complexe pour décrire des variétés de dimension 4 en toute généralité (et en particulier pour les variétés symplectiques).

Pour conclure, je tiens à décrire une autre direction de mes recherches : la géométrie différentielle des métriques Kählériennes sur les variétés complexes. Les équations d'Einstein de la Relativité générale constituent un système extrêmement compliqué d'équations à dérivées partielles non linéaires mais dans le cadre des variétés complexes ces équations sont considérablement plus simples à formuler. Le modèle standard en coordonnées complexes devient l'équation dite de Monge-Ampère det $\partial^2\varphi / \partial z_i \partial z_j = 1$. C'est un sujet immense qui a été exploré par Calabi, Yau, Tian et bien d'autres mathématiciens, mais pour lequel il reste encore de nombreuses conjectures très difficiles à résoudre. Par exemple, l'une d'elle est de savoir si une variété complexe possède une métrique d'Einstein ou plus généralement une métrique à courbure scalaire constante. Cette dernière question est encore plus délicate parce que le système différentiel à considérer est d'ordre 4 mais il semble depuis peu que se dessine une solution à ce problème ardu. Il y a des analogies importantes entre cette théorie et celle des équations précédentes de Yang-Mills et la plupart de ces idées ne peuvent être étudiées que dans le cadre de la géométrie des variétés de dimension infinie. D'autre part, en exploitant le lien entre géométrie algébrique et les calculs asymptotiques de la théorie des Quantas, ces notions permettent d'introduire de nouveaux algorithmes pour trouver des approximations numériques aux solutions des équations d'Einstein sur des variétés complexes.

COMPLEX CO-ORDINATES IN DIFFERENTIAL GEOMETRY AND TOPOLOGY

My work falls in the domain of mathematics called Geometry, but with connections to other branches such as Analysis, Algebra and Mathematical Physics.

Searching for a simple connecting theme to describe my work, it seemed to me that the application and investigation of the role of complex numbers in Geometry might be appropriate. You are probably all familiar with the idea, going back to Descartes, of describing points in space by numerical coordinates: two real coordinates to determine a point in a plane, three for a point in space, and so on. The generalisation of this idea leads to the notion of a manifold—of an arbitrary dimension n—in which points are locally described by n coordinates, but one may not be able to use the same coordinates over the whole of the space. (For example, the surface of a sphere is a manifold: latitude and longitude give coordinates over most of the surface, but not at the poles.) Einstein's four-dimensional space-time, con- figuration spaces of complicated mechanical systems or economic models provide other examples where this concept of a manifold is very fruitful.

So far, we have been thinking of the coordinates we use to describe points as real numbers. But there are situations in which it valuable and interesting to describe points using complex numbers as coordinates. (In the simplest example, we can identify points in the plane with complex numbers and then rotation of a vector through a right angle is just multiplication by i.) This leads to the notion of a complex manifold. I must stress that this is not a new idea: complex manifolds have been studied for many years, and there is an enormous body of knowledge about them. But exploring various ramifications of this idea, and unexpected connections with other fields, has been one of the main themes of my own research.

Going now into more detail: I will first discuss questions of the topology of manifolds, the study of properties that are unchanged by continuous deformations. Topology in 4 real dimensions has special features which make it particularly difficult, with many fundamental questions about which we are ignorant. However within this world of 4-dimensional manifolds there is a subclass of two-dimensional complex manifolds, with points described locally by 2 complex coordinates. For example if we take an equation like z4 1 + z4 2 + z4 3 = 1, the set of solutions forms a two dimensional complex manifold. These complex manifolds are better understood, and much of my work has involved transporting ideas from this theory to the more general situation of 4-manifold topology. In my thesis, and the following years, I exploited the use of Yang-Mills instantons—a concept which arose in the Gauge theories of particle physics in 4-manifold topology. These are intimately related to holomorphic bundles over complex manifolds, and revealed new phenomena in 4-manifold topology which had previously been thought to be special to the complex situation. (These ideas came to full flowering later with the introduction of the Seiberg-Witten invariants and the discovery of "basic classes" for 4-manifolds, analogous to the classical "canonical divisor class" of complex manifolds.) In a similar vein, I developed techniques modelled on the classical Picard-Lefschetz theory in complex geometry to describe general 4-manifolds (and particularly the important class of "symplectic manifolds").

Finally I turn to my other main research area: differential geometry of Kahler metrics on complex manifolds. The Einstein equations of General Relativity form an immensely complicated system of nonlinear partial differential equations, but it turns out that on complex manifolds the analogous equations are much easier to write down. The basic model in local coordinates is the complex Monge-Ampere equation $\det \partial^2\varphi / \partial z_i \partial z_j = 1$*.This is a huge subject, which has been developed by Calabi,Yau,Tian and many other mathematicians, but there are a many difficult open questions: asking when a particular complex manifold has an Einstein metric, or a metric satisfying the more general condition of constant scalar curvature. This latter is a significantly harder problem because the relevant partial* *differential equation is of fourth order, but a detailed picture of what one might hope to be true is starting to emerge. There are valuable analogies between this theory and that of the Yang-Mills equation mentioned above, and many of these ideas are profitably studied in the framework of geometry in infinite-dimensional manifolds. At the same time, these ideas lead to new schemes for finding approximate numerical solutions to Einstein's equations on complex manifolds, exploiting links between algebraic geometry and classical asymptotics in Quantum Theory.*