

Titres et travaux

Claire Voisin

Claire Voisin,
née le 4 mars 1962 à Saint-Leu-la-forêt (Val d'Oise),
mariée, cinq enfants.
Professeur au Collège de France.

Carrière

1981 Entrée à l'ENS Sèvres
1983 Agrégation
1986 Thèse (directeur A.Beauville) ; entrée au CNRS.
1989 Habilitation à diriger des recherches.
1995 Directrice de recherche à l'Institut de Mathématiques de Jussieu. Classe exceptionnelle depuis 2010.
2007-2009 Mise à disposition de l'IHES.
2012-2014 Professeur à temps partiel à l'Ecole polytechnique, membre du Centre de mathématiques Laurent Schwartz.
2016- Professeur au Collège de France.

Distinctions

- Médaille de bronze du CNRS (1988).
- Prix IBM jeune chercheur (1989).
- Cours Peccot (1992) “*Variations de structure de Hodge et cycles algébriques*”.
- Prix de la Société Européenne de Mathématiques (1992).
- Prix Servant décerné par l'Académie des Sciences (1996).
- Prix Sophie Germain décerné par l'Académie des Sciences (2003).
- Médaille d'argent du CNRS (2006).
- Membre étranger de l'Istituto Lombardo (2006-).
- Satter Prize décerné par l'American Math. Society (2007).
- Clay Research Award décerné par le Clay Institute (2008).
- Membre de la Deutsche Akademie der Naturforscher Leopoldina (2009-).
- Membre de l'Académie des Sciences (2010-)
- Membre étranger de l'Accademia Nazionale dei Lincei (2011-).
- Membre honoraire de la London Mathematical Society (2012-).
- Membre de l'Academia Europaea (The Academy of Europe), (2014-).
- Heinz Hopf prize (ETH Zürich, 2015).

Séries de leçons et invitations principales

- Conférence parallèle au congrès international des mathématiciens (Zürich, 1994).
- Chaire Lagrange (Rome, 1996).
- Conférence plénière au 4ème congrès européen de Mathématiques (Stockholm, juillet 2004) : “*Recent progresses in Kähler and complex algebraic geometry*”.
- Takagi lectures (Kyoto, novembre 2006) : “*Some aspects of the Hodge conjecture*”.
- Adrian Albert lectures de l’Université de Chicago (avril 2007) : “*Hodge structures in Kähler and/or algebraic geometry*”.
- Clay senior scholar, MSRI 2009.
- Alfred Brauer lectures , (UNC, Chapel Hill, février 2009) : “*Curves and their Jacobians; from canonical syzygies to Hodge theory and algebraic cycles of Jacobians*”.
- Conférence plénière au congrès international des mathématiciens (Hyderabad, août 2010) : “*On the cohomology of algebraic varieties*”.
- Ellis R. Kolchin Memorial Lecture, (Columbia University, March 2011).
- Rademacher lectures (University of Pennsylvania, Philadelphie, octobre 2011) : “*Chow rings, decomposition of the diagonal and the topology of families*”.
- Hermann Weyl lectures (IAS, Princeton, novembre 2011). “*Chow rings, decomposition of the diagonal and the topology of families*”.
- Abel lecture, (Oslo, Mai 2013). “*Mixed Hodge structures and the topology of algebraic varieties*” (présentation des travaux de Deligne).
- Coxeter lectures, (Fields Institute, November 2013).
- British Mathematical Colloquium, plenary lecture, (Queen Mary University of London, Avril 2014).
- Lezione Leonardesca : *Birational invariants and applications to rationality problems*, (Milan, mai 2014).
- Distinguished visiting professor, IAS 2014-2015.

Activités hors recherche

Direction de recherche

- *Anna Otwinowska, Maître de conférences à l’Université d’Orsay* , thèse soutenue en janvier 2000.
- *Lorenz Schneider*, thèse soutenue en décembre 2001.
- *Gianluca Pacienza, Maître de conférences à l’Université de Strasbourg*, thèse soutenue en janvier 2002.
- *Catriona Maclean, Maître de conférences à l’Institut Fourier, Grenoble*, thèse soutenue en avril 2003.
- *Thomas Dedieu, Maître de conférences à l’Université de Toulouse*, thèse soutenue en novembre 2008.

- *Julien Grivaux*, Chargé de recherche CNRS à l'Université de Marseille, thèse soutenue en octobre 2009.
- *François Charles*, Professeur à l'Université d'Orsay, thèse soutenue en avril 2010.
- *Lie Fu*, Maître de conférences à l'Université de Lyon. Thèse soutenue en octobre 2013.
- *Hsueh-Yung Lin*. Thèse soutenue en novembre 2015.
- *René Mboro*. Thèse commencée en septembre 2014.
- *Ivan Bazhov*. Thèse commencée en septembre 2014.

Édition

Fonctions éditoriales passées

J'ai été éditrice de

- Mathematische Zeitschrift (1997-2004).
- Annales de l'ENS (1999-2004),
- Journal of Algebraic Geometry (2004-2007).
- Journal of the European Math. Society (JEMS) (1998-2014).
- J. Differential Geometry (2004-2007).
- Duke Math. Journal (1996-2009).
- Forum of Mathematics Sigma (2013-2014)

Fonctions éditoriales présentes

Je suis actuellement éditrice de

- Publications Mathématiques de l'IHES depuis 2007 (Editrice en chef depuis 2011).
- Communications in Contemporary Mathematics depuis 2007.
- Journal de mathématiques pures et appliquées depuis 2009.
- Communications in Analysis and Geometry depuis 2012.
- Journal de l'École polytechnique (2014-).

Responsabilités diverses

- Membre du conseil scientifique de la SMF en 2007.
- Membre du jury IUF junior en 2006 et 2007.
- Membre du comité des programmes pour le congrès international de Madrid.
- Membre du conseil scientifique du MFO (Oberwolfach), (2009-2012).
- Membre du jury de la chaire Blaise Pascal, (2009-2014).
- Membre du conseil scientifique du CIRM (2009-2014).
- Membre du conseil scientifique de l'ENS (2011-2014).
- Membre du jury de l'IUF Senior en 2011 et 2012.

- Membre du comité des programmes pour le "European Congress of Mathematicians" 2012, Cracovie.
- Membre du conseil scientifique du Fields Institute (2013-).
- Membre du comité de la médaille Chern (décernée par l'IMU au cours de l'ICM 2014).

Enseignement

Cours de second et 3ème cycle

- Cours de DEA *Théorie de Hodge*, 1998-99.
- Cours de DEA "avancé" *Théorie de Hodge*, 1999-00, suite du cours précédent. Ces cours ont donné lieu à la publication du livre [**Courspe02**].
- Novembre 2006-février 2007 : Cours de M2 de géométrie algébrique à P.6/P.7.
- Janvier-avril 2008, Cours de M2 spécialisé "*Géométrie algébrique, espaces de modules et invariants géométriques*"

Cours de second cycle : J'ai enseigné pendant deux ans (2012-2013 et 2013-2014) à l'École polytechnique. J'ai donné des cours de géométrie différentielle aux élèves de 3ème année et assuré les TD correspondants. J'ai aussi écrit des notes de cours à cette occasion :

- 2012-2013 Géométrie différentielle, courbure et théorème de Frobenius
- 2013-2014 Géométrie différentielle complexe, faisceaux et cohomologie

Minicours

École d'été de Théorie de Hodge, directeur scientifique : A.Beauville ; en collaboration avec J.Carlson, C.Peters, C.Simpson, (Nice, 1991).

- Cours du CIME (1993) thème : *Algebraic cycles and Hodge theory*, directeur scientifique F.Bardelli. Ce cours a donné lieu à la publication [**CIME94**] (cf. liste de publications).
- Cours à l'IHP (semestre de géométrie algébrique du centre Emile Borel) : *Symétrie miroir*, mars-avril 1995. Ce cours a donné lieu à la publication de la monographie [**Pano96**].
- Chaire Lagrange, (Rome, octobre 1996) : *Variations of Hodge structures of Calabi-Yau threefolds*. Ce cours est publié dans la monographie [**VHSCY98**].
- En avril 2000, j'ai donné un cours condensé à Strasbourg sur le théorème de connexité de Nori, à l'invitation d'Olivier Debarre et Michèle Audin.
- En mars 2002 à Tucson (Ecole d'hiver d'Arizona, organisée par W. Raskind), et en mai 2002 en Italie (Ecole d'été européenne, organisateurs C. Ciliberto et W. Decker), j'ai donné un cours condensé sur le thème *Filtrations sur les groupes de*

Chow.

- Juillet 2005, Seattle. Série de conférences plénières au “AMS Summer Institut”, Algebraic Geometry, .
- Mars 2006, Bedlovo, Pologne. Cours “Théorie de Hodge”, dans le cadre de GAEL.
- Septembre 2009, CIRM, Trento. Cours dans le cadre de l’école d’été “Hodge Theory and Algebraic Geometry”, (organisateurs Simon Salamon et Gianfranco Casnati).
- Janvier 2011, Minicours au CIRM “*Classes de Hodge entières, cohomologie non ramifiée, et invariants birationnels*” dans le cadre de la rencontre annuelle du gdr de géométrie algébrique.
- Automne 2011, IAS, Princeton, et Université de Philadelphie. Hermann Weyl lectures et Rademacher lectures. Ces cours ont donné lieu à la monographie [PUP14].
- Juin 2012, Nordfjordeid, Norvège. Minicours “*Deformation of pairs and Noether-Lefschetz type loci*” dans le cadre de l’Ecole d’été “Geometry of Moduli”.
- Mars 2013 Strasbourg. Minicours “Chow rings of hyper-Kähler manifolds”, dans le cadre de l’Ecole organisée par le GRIFGA.
- Juin 2013, CRM, Montréal. Minicours “Recent progress on zero cycles on surfaces”, dans le cadre du mois spécial “Rational points, ”Rational Curves and Entire Holomorphic Curves on Projective Varieties”.
- Octobre 2013, BICMR, Beijing. Minicours “Algebraic cycles and Hodge structures”

1 Description détaillée de mes travaux

Mon domaine de recherche se situe entre la géométrie algébrique et la géométrie complexe kählérienne. Une place importante est occupée par la théorie de Hodge, outil précieux pour étudier la topologie des variétés algébriques complexes, mais mes principales motivations viennent de la géométrie algébrique, et en particulier des très importantes conjectures sur les cycles algébriques formulées par Hodge bien sûr, mais aussi Grothendieck et plus tard Bloch.

La théorie de Hodge apparaît dans mes travaux par le biais de la notion de structure de Hodge introduite par Griffiths (voir paragraphe 1.0.1). On peut utiliser ces structures de Hodge en géométrie algébrique soit pour paramétrer les structures complexes sur une variété projective via l’application des périodes (voir paragraphe 1.0.1), soit pour comprendre et étudier les groupes de Chow de ces variétés (voir sections 1.0.2 et 1.0.3).

Plus récemment, j’ai réalisé que la notion de structure de Hodge sur une algèbre de cohomologie permet de déduire de la théorie de Hodge des énoncés portant soit sur les restrictions topologiques satisfaites par les variétés kählériennes compactes, soit sur les différences topologiques entre les variétés projectives complexes et les variétés kählériennes compactes (voir paragraphe 1.0.4).

Un aspect de mes travaux, disjoint du précédent, et beaucoup plus proche de la géométrie algébrique classique, concerne la géométrie projective des courbes dans leur plongement canonique, domaine dans lequel j'ai obtenu des résultats de façon sporadique, et en particulier une preuve de la conjecture de Green pour les courbes génériques de gonalgéité fixée (cf. paragraphe 1.0.6).

Je me suis beaucoup intéressée à la fameuse "symétrie miroir", qui est un aspect du lien entre géométrie algébrique et géométrie symplectique créé par la théorie de Gromov-Witten. J'ai contribué au sujet par la construction de familles miroir explicites, et par un calcul d'invariants de Gromov-Witten (voir paragraphe 1.0.5). Je suis en général très intéressée par l'interface géométrie algébrique-géométrie symplectique, où beaucoup de choses restent à découvrir : quels invariants d'une variété projective complexe sont des invariants de la variété symplectique sous-jacente ? J'ai construit par exemple des analogues symplectiques des schémas de Hilbert ponctuels des surfaces complexes. J'ai obtenu des résultats en dimension 3 sur le problème de caractériser symplectiquement les variétés algébriques rationnellement connexes.

Un dernier aspect de mes travaux concerne les propriétés d'hyperbolicité des variétés algébriques. On étudie ici d'un point de vue assez algébrique (reflété par les propriétés des sous-variétés) les propriétés de "courbure" du fibré tangent. L'étude des courbes rationnelles ou de petit genre dans une variété, ainsi que celle de ses auto-applications ou auto-correspondances relève de ce thème qui a été lié de façon tout aussi conjecturale que fascinante par Lang et d'autres aux propriétés diophantiennes de la variété considérée (voir paragraphe 1.0.7).

Dans ce qui suit, je décris un peu plus précisément les problèmes que j'ai étudiés et les résultats que j'ai obtenus dans chacun de ces domaines. Pour éviter une énumération fastidieuse de résultats, j'ai essayé de mettre l'accent ici sur les problèmes et les objets mathématiques qui m'intéressent et les résultats qui m'ont paru significatifs.

1.0.1 Théorèmes de Torelli ([Invent86], [DMJ88], [Newtrends97])

Lorsque j'ai préparé ma thèse sous la direction d'Arnaud Beauville, j'ai découvert la beauté de certaines géométries particulières (variétés de Fano, dont le fibré canonique est négatif et la géométrie est très riche, variétés hyperkähleriennes, qui jouent un rôle-clé dans la classification des variétés algébriques). Mais je me suis surtout familiarisée avec la notion de structure de Hodge, introduite par Griffiths, et généralisée par Deligne sous la forme des structures de Hodge mixtes.

Lorsqu'on considère une variété complexe, on peut décomposer ses formes différentielles complexes en somme de formes de type (p, q) qui s'expriment dans des coordonnées holomorphes locales comme des combinaisons de monômes $dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_q}$. Cette décomposition n'est pas préservée par la différentielle extérieure. Pourtant, si la variété considérée X est projective ou plus généralement compacte kählienne, on a le théorème de décomposition de Hodge :

$$H^k(X, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(X),$$

où $H^{p,q}(X)$ est l'ensemble des classes de cohomologie représentables par une forme fermée de type (p, q) . Une propriété importante ici est la *symétrie de Hodge* :

$$\overline{H^{p,q}(X)} = H^{q,p}(X).$$

La notion de structure de Hodge (entière ou rationnelle) émerge de cet énoncé : la cohomologie à coefficients complexes se calcule par le théorème de changement de coefficients par la formule :

$$H^k(X, \mathbb{C}) = H^k(X, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}.$$

Ainsi, l'espace vectoriel complexe $H^k(X, \mathbb{C})$ est muni d'une structure entière (qui ne dépend que de la topologie), et aussi de sa décomposition de Hodge, qui dépend de la structure complexe.

Une telle donnée, satisfaisant la symétrie de Hodge, est appelée une structure de Hodge de poids k . Il est particulièrement intéressant de travailler avec $H^n(X, \mathbb{Z})$, $n = \dim_{\mathbb{C}} X$. Dans ce cas, on dispose d'une forme d'intersection sur la cohomologie de degré n , qui est compatible de façon évidente avec la décomposition de Hodge :

$$\langle H^{p,q}, H^{p',q'} \rangle = 0, (p', q') \neq (n-p, n-q).$$

Avec certaines conditions supplémentaires de signes, ce qu'on obtient alors est une structure de Hodge polarisée de poids n .

Ces objets sont magnifiques. Pour s'en convaincre, il suffit de regarder le cas de poids 1 : une structure de Hodge entière de poids 1 est la même chose qu'un tore complexe : en effet, un tore complexe est la donnée d'un réseau de rang pair Γ et d'une structure complexe sur l'espace vectoriel réel $\Gamma_{\mathbb{R}}$ engendré par Γ . Mais une structure complexe est la même chose qu'une décomposition

$$\Gamma_{\mathbb{C}} = \Gamma_{\mathbb{C}}^{1,0} \oplus \overline{\Gamma_{\mathbb{C}}^{1,0}},$$

d'où finalement une structure de Hodge entière de poids 1 sur Γ . Les structures de Hodge polarisées de poids 1 correspondent aux tores complexes projectifs, ou encore aux variétés abéliennes.

On peut voir les structures de Hodge sur les groupes de cohomologie d'une variété projective X comme des miniatures de la structure complexe, vu qu'elles reflètent la bigraduation du complexe de de Rham induite par la structure complexe. Dans les problèmes de type Torelli, on étudie la façon dont la structure de Hodge sur la cohomologie d'une variété algébrique ou kählérienne compacte X varie avec la structure complexe sur X , (ce qui donne lieu à l'application des périodes introduite par Griffiths,) et plus précisément on se demande si la classe d'isomorphisme de la structure de Hodge polarisée sur $H^k(X, \mathbb{Z})$ détermine la classe d'isomorphisme de la variété X . Ici il faut supposer que cette classe d'isomorphisme varie dans un espace de modules déterminé. Dans l'article [**Invent86**], (dont j'ai corrigé récemment l'argument final qui était insuffisant,) j'ai montré un tel énoncé pour les hypersurfaces cubiques de \mathbb{P}^5 . On savait par un résultat de Beauville et Donagi [B-D] que ces structures de Hodge étaient particulièrement intéressantes, puisqu'elles sont "de type $K3$ ", et sont en fait, à un décalage de bidegré près, des structures de Hodge sur le H^2 de variétés hyperkähleriennes de dimension 4, construites en prenant la variété des droites de la cubique considérée. (On connaît peu de telles familles complètes de variétés hyper-Kähleriennes polarisées de dimension 4, et dans l'article [**crelle10**] écrit avec Olivier Debarre, nous en avons construit une autre.)

Théorème 1 *La classe d'isomorphisme d'une hypersurface cubique lisse $X \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^5$ est déterminée par la classe d'isomorphisme de la structure de Hodge polarisée sur $H^4(X, \mathbb{Z})$.*

La preuve comporte deux parties distinctes ; dans la première, je montre qu'on peut caractériser par leur structure de Hodge les hypersurfaces cubiques contenant un plan. Cette partie fait abondamment intervenir la correspondance entre la cubique et sa variété des droites. Dans la seconde, je montre comment le théorème de Torelli pour les cubiques contenant un plan se ramène au cas des surfaces $K3$.

Ce théorème a été récemment redémontré par Looijenga [Loo] par une méthode très différente.

L'article [DMJ88] explique également comment reconstruire un revêtement double de \mathbb{P}^3 ramifié le long d'une quartique à partir de sa structure de Hodge polarisée sur H^3 . Dans ce cas, cette structure de Hodge est à un décalage près une structure de Hodge de poids 1, et elle correspond à un tore complexe qui est en fait une variété abélienne grâce à la polarisation. Ces tores introduits par Griffiths [Gri] sont appelés "jacobienes intermédiaires".

Dans l'article [Newtrends97], j'ai montré un théorème de Torelli générique pour les hypersurfaces quintiques de \mathbb{P}^4 .

1.0.2 Groupes de Chow, conjectures de Hodge et de Bloch ([IMRN02], [CompoMath07], [AnnPisa92], [AnnMath99], [Taniguchi94])

Un aspect fondamental de la notion de structure de Hodge dans le cadre de la géométrie algébrique est qu'elle permet conjecturalement de prédire des énoncés de structure sur les sous-variétés d'une variété projective lisse donnée X . Plus précisément, on introduit les groupes de Chow $CH^k(X)$, qui sont les quotients des groupes de cycles $Z^k(X)$, groupes abéliens librement engendrés par les sous-variétés de X de codimension k , par la relation d'équivalence rationnelle.

Conjecture de Hodge. Ces groupes sont en relation avec les groupes de cohomologie de X , d'une façon qui tient compte des structures de Hodge sur X . La première relation est donnée par l'application classe de cycle, qui à une sous-variété $Z \subset X$ de codimension k associe la classe $[Z] \in H^{2k}(X, \mathbb{Z})$ duale au sens de Poincaré de la classe d'homologie fondamentale de Z . Ces classes sont des classes de Hodge entières, c'est-à-dire que vues comme classes de cohomologie complexe, elles sont de type (k, k) dans la décomposition de Hodge. La conjecture de Hodge prédit que si X est projective, toute classe de Hodge rationnelle est une combinaison à coefficients rationnels des classes du type ci-dessus. Pour les classes à coefficients entiers, on sait par [AH] qu'il y a des obstructions supplémentaires liées au cobordisme complexe.

Dans le cas kählérien compact, on peut aussi définir les classes de cycles analytiques, qui sont des classes de Hodge. Mais pour obtenir le maximum de classes de Hodge dans le cas kählérien, il faut considérer plus généralement les classes de Chern de faisceaux cohérents, qu'on peut voir grosso modo comme des faisceaux de sections de "fibrés vectoriels holomorphes avec des singularités". Dans l'article [IMRN02], j'ai montré le résultat suivant :

Théorème 2 *Il existe des variétés kählériennes compactes X de dimension 4, qui possèdent des classes de Hodge rationnelles non nulles de degré 4, mais satisfont*

$$c_2(\mathcal{F}) = 0 \text{ dans } H^4(X, \mathbb{Q})$$

pour tout faisceau cohérent \mathcal{F} sur X .

La preuve fait appel au théorème d’Uhlenbeck-Yau [U-Y] sur l’existence de métriques d’Hermite-Einstein sur les fibrés stables. Dans le même article, je montre également que les faisceaux cohérents sur les variétés kählériennes compactes n’admettent pas nécessairement de résolution localement libre finie.

Ceci montre qu’il n’y a guère d’espoir d’approcher la conjecture de Hodge d’un point de vue analytique. En fait l’analyse est même utilisée ici pour produire des conditions supplémentaires pour qu’une classe de Hodge provienne d’objets holomorphes. (Ces conditions supplémentaires sont automatiquement satisfaites dans le cas projectif.)

Dans le cas projectif, on peut étudier la conjecture de Hodge d’un point de vue plus “motivique”. On considère des variétés algébriques complexes X , définies par des polynômes à coefficients complexes. Un automorphisme τ de \mathbb{C} agit sur ces coefficients et fournit une variété X_τ , qui n’est pas nécessairement homéomorphe à X , bien que très proche de X du point de vue de la géométrie algébrique. Un résultat dû à Serre-Grothendieck montre qu’on peut calculer la cohomologie $H^{2k}(X, \mathbb{C})$ en utilisant seulement la variété algébrique X définie sur \mathbb{C} . Ce même résultat montre qu’on a un isomorphisme

$$H^{2k}(X, \mathbb{C}) \cong H^{2k}(X_\tau, \mathbb{C})$$

qui est $\tau(\mathbb{C})$ -linéaire, et qui envoie la classe du cycle $Z \subset X$, correctement normalisée par une puissance de $2\iota\pi$, sur celle de $Z_\tau \subset X_\tau$. Ainsi, via ces isomorphismes de comparaison, qui pourtant ne préservent nullement la cohomologie rationnelle, les classes de cycles normalisées $[Z]_{alg}$, qui sont rationnelles à une puissance de $2\iota\pi$ près, sont toujours envoyées sur des classes de cycles normalisées, et donc sont encore *rationnelles* à une puissance de $2\iota\pi$ près.

Ceci donne lieu à la notion de classe de Hodge absolue (version de Rham), due à Deligne [Del]. Deligne montre que les classes de Hodge sur les variétés abéliennes sont absolues, c’est-à-dire qu’elles se comportent comme si elles étaient des classes de cycle.

J’ai mis longtemps à réaliser que cette notion était en fait liée à une propriété de structure de ce que je connaissais sous le nom de “lieux de Hodge” ou “lieu des classes de Hodge”. En fait si on part d’une classe de Hodge normalisée α sur X , on peut étudier les déformations (X_t, α_t) de la paire (X, α) , telles que α_t est une déformation localement constante de α qui reste de type (k, k) sur X_t . Dans l’article [CompoMath07], je montre que la classe α est absolue si et seulement si ce lieu est algébrique, défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$ et ses transformés sous $Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sont des lieux du même type.

J’étudie également cette propriété pour le “lieu de Hodge B_α de α ”, qui est la projection dans l’espace des déformations de X du lieu précédent. Cette propriété est intéressante car on a (cf. [CompoMath07]) :

Proposition 1 *Si B_α est défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$, la conjecture de Hodge pour α est entraînée par la conjecture de Hodge pour les classes de Hodge sur des variétés définies sur des corps de nombres.*

Je donne un critère simple, utilisant le théorème d’algébricité de Cattani-Deligne-Kaplan (cf. [CDK]), pour que ce lieu de Hodge B_α soit défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$ et que ses transformés sous $Gal \overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$ soient des lieux du même type :

Théorème 3 *Si les seules sous-structures de Hodge localement constantes $L \subset H^{2k}(X_t, \mathbb{Q})$, $t \in B_\alpha$, $2k = \deg \alpha$ sont de type (k, k) , B_α est défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$.*

L'intérêt de ce critère est qu'il peut se vérifier par des calculs locaux (à l'ordre fini par exemple). On est donc dans une situation curieuse où on peut montrer qu'un ensemble algébrique fermé est défini sur un corps de nombres par l'étude de son comportement à un ordre fini au voisinage d'un point !

Conjecture de Bloch. Pour en revenir aux groupes de Chow, lorsqu'on considère les cycles Z de codimension k annulés par l'application "classe", c'est-à-dire homologues à 0, on peut faire la construction suivante, dite d'Albanese dans le cas $k = n = \dim X$, de Picard dans le cas $k = 1$, et due à Griffiths et appelée "application d'Abel-Jacobi" dans les cas intermédiaires : on associe à Z une classe $\Phi_X(Z)$ dans la jacobienne intermédiaire $J^{2k-1}(X) = H^{2k-1}(X, \mathbb{C}) / (F^k H^{2k-1}(X) \oplus H^{2k-1}(X, \mathbb{Z}))$, qui est un tore complexe. Ici

$$F^k H^{2k-1}(X) = H^{2k,0}(X) \oplus \dots \oplus H^{k,k-1}(X).$$

Cette construction est très bien comprise et essentiellement classique pour $k = n$ et $k = 1$ (on peut citer les noms de Riemann, Abel, Jacobi dans le cas des courbes). Dans les cas intermédiaires, elle a permis à Griffiths [Gri] de montrer des résultats très importants comme l'existence de cycles homologues à 0 mais non algébriquement équivalents à 0.

Lorsqu'on cherche à aller plus loin, on est confronté au théorème de Mumford [Mum], qui dit que le noyau de l'application d'Abel-Jacobi (c'est-à-dire d'Albanese dans ce cas) n'a pas de bonne structure comme groupe, dans le cas des 0-cycles sur les surfaces avec $h^{2,0} > 0$. Ce noyau n'est pas une extension d'un groupe discret par une variété abélienne, et en fait cela ressemble à une variété algébrique de dimension infinie et horriblement singulière.

Bloch a conjecturé dans [Bl1] dans le cas des surfaces, (cette conjecture a été ensuite généralisée par Bloch et Beilinson pour inclure tous les groupes de Chow sur des variétés de n'importe quelle dimension) que le noyau de l'application d'Albanese $CH^2(S)_{hom} \rightarrow Alb(S)$ est réduit à $\{0\}$ si $h^{2,0}(S) = 0$.

Dans l'article [AnnPisa92], j'ai montré le résultat suivant :

Théorème 4 *La conjecture de Bloch est vraie pour les surfaces de type Godeaux, obtenues comme des quotients de surfaces intersections complètes par des groupes finis.*

Dans l'article [AnnMath99], j'ai étudié la construction due à Mark Green (cf. [Gr3], [Gr4]) d'une application d'Abel-Jacobi supérieure, permettant d'analyser le noyau de l'application d'Abel-Jacobi. Mark Green pensait que sa construction décrivait exactement le noyau de l'application d'Albanese, dans le cas des 0-cycles pour les surfaces. J'ai montré deux résultats, l'un positif, l'autre négatif, concernant sa construction. Tout d'abord j'ai donné un exemple où son application d'Abel-Jacobi supérieure n'est pas injective. D'autre part j'ai montré le résultat suivant, qui montre que son invariant est assez riche pour redonner les invariants du type Mumford :

Théorème 5 *Soit S une surface complexe lisse, et soit $\Gamma \subset B \times X$ une 0-correspondance entre une variété projective lisse B et S . Supposons que pour tout $b \in B$, le 0-*

cycle $\Gamma_*(b) \in CH^2(S)$ soit homologue à 0, Albanese-équivalent à 0 et annulé par l'application d'Abel-Jacobi supérieure de Green. Alors pour toute 2-forme holomorphe ω sur S , on a $\Gamma^*\omega = 0$ dans $H^0(B, \Omega_B^2)$.

Dans l'article [Taniguchi94], j'ai commencé à étudier de façon expérimentale la relation entre les cycles sur les puissances X^l d'une variété X et ceux de X . Ceci a été récemment étudié par Kimura qui obtient des résultats très intéressants, quoique conditionnels. J'y montre aussi indépendamment le théorème de nilpotence de Voevodsky (formulé cependant sous une forme moins générale).

Théorème 6 *Soit Z un cycle algébriquement équivalent à 0 sur $X \times X$. Alors pour un entier $k > 0$, on a $Z^{\circ k} = 0$ dans $CH(X \times X)$, où \circ est la composition des correspondances.*

Enfin je montre que si une surface S satisfait la propriété que

$$CH_0(S) \cong CH_0(S \times S)$$

(hypothèse qui entraîne $h^{2,0} = 0$), elle satisfait aussi la conjecture de Bloch.

1.0.3 Variations de structures de Hodge et cycles algébriques ([CRAS88], [JAG92], [AnnENS94], [DMJ00], [MathAnn94])

Les méthodes infinitésimales en théorie de Hodge sont introduites dans l'article [CGGH]. On étudie comment se déforme la structure de Hodge sur le groupe de cohomologie $H^k(X, \mathbb{Z})$ avec la structure complexe de X . Même en considérant les choses seulement au premier ordre, les informations qu'on obtient sont souvent très riches, du fait que l'espace tangent au domaine des périodes est contenu dans l'espace tangent à un espace de drapeaux.

Mes contributions au sujet concernent principalement les applications aux cycles algébriques. Grâce à des méthodes infinitésimales, on peut montrer aussi bien des résultats d'existence que de non-existence de cycles algébriques intéressants. Par exemple, j'ai montré (résultat non publié car obtenu de façon concomitante par M. Green (cf. [Gr2])) :

Théorème 7 *Soit $X \subset \mathbb{P}^4$ une hypersurface lisse de degré au moins 6 et générale en modules. Alors l'image de l'application d'Abel-Jacobi $\Phi_X : CH^2(X)_{\text{hom}} \rightarrow J^3(X)$ de X est contenue dans la torsion de $J^3(X)$.*

Ce théorème est en contraste avec ce qui avait été montré par Griffiths [Gri], puis Clemens [Cl1] pour le cas de degré 5 : l'image de l'application d'Abel-Jacobi est dans ce cas pour X générale en modules un sous-groupe dénombrable de rang infini de $J^3(X)$.

Par ailleurs j'ai utilisé des méthodes infinitésimales pour montrer dans [JAG92], [AnnENS94] et [DMJ00] le résultat suivant, qui généralise à des variétés de Calabi-Yau arbitraires le théorème de Clemens :

Théorème 8 *Soit X une variété de Calabi-Yau de dimension 3, non rigide. Alors pour une déformation générale X_t de la structure complexe de X , l'image de l'application d'Abel-Jacobi de X_t est un sous-groupe de rang infini de $J^3(X_t)$.*

Ici des méthodes infinitésimales permettent tout d’abord de produire des 1-cycles intéressants dans X ou X_t : ils sont obtenus en étudiant le lieu de Noether-Lefschetz qui paramètre les fibrés en droites sur les surfaces lisses de X ou de X_t . Dans un second temps, les méthodes infinitésimales sont utilisées pour montrer que le groupe qu’on obtient est de rang infini. Il faut utiliser les “invariants infinitésimaux des fonctions normales” définis par Griffiths, qui sont des invariants extraits de la différentielle de l’application d’Abel-Jacobi en famille. Ces méthodes ont été reprises dans [A-C]. Elles permettent aussi de montrer (cf. [ICM94]) des résultats analogues pour l’application régulateur sur les groupes de Chow supérieurs $CH^2(X, 1)$ introduits dans [B12], où X est une surface.

Dans l’article [CRAS88], j’ai par ailleurs donné une interprétation géométrique de l’invariant infinitésimal de Griffiths : si on a une famille $\mathcal{X} \rightarrow B$ de variétés lisses, et un cycle relatif $\mathcal{Z} \subset \mathcal{X}$ de codimension k qui est homologue à zéro sur les fibres, on a l’application d’Abel-Jacobi relative qui fournit une section $\nu_{\mathcal{Z}}$ de la famille de jacobiniennes intermédiaires $J(X_t)_{t \in B}$. Je montre comment l’invariant infinitésimal $\delta\nu_{\mathcal{Z}}$ se calcule en fonction de la classe de cohomologie de de Rham du cycle \mathcal{Z} dans $H^k(\mathcal{X}, \Omega_{\mathcal{X}}^k)$.

Ceci m’a menée à généraliser ces invariants dans [MathAnn94], et à considérer d’autres invariants associés à des familles de cycles, obtenus en allant plus loin dans la filtration de Leray de $H^k(\mathcal{X}, \Omega_{\mathcal{X}}^k)$. A l’aide de ces invariants, je montre dans cet article les résultats suivants :

Théorème 9 *Soit $S \subset \mathbb{P}^3$ une surface lisse de degré ≥ 7 , générale en modules. Alors on a :*

1) *Si $C := S \cap \mathbb{P}^2$, et $j : C \rightarrow S$ est l’inclusion, le noyau de $j_* : J(C) \rightarrow CH^2(S)$ est réduit à la torsion de $J(C)$.*

2) *Deux points distincts de S ne sont pas rationnellement équivalents.*

1.0.4 Théorie de Hodge et topologie des variétés kählériennes ([JdiffGeom90], [Invent04], [MathAnn08])

Dans les articles [JdiffGeom90], [Invent04], [MathAnn08], je me suis intéressée à des applications plus topologiques de la théorie de Hodge. Dans l’article [JdiffGeom90], j’ai étudié les fibrations de Lefschetz au-dessus d’un disque, lisses au-dessus du disque épointé, et avec une singularité quadratique ordinaire au-dessus de 0. Je considère le cas où les fibres sont de dimension paire. La formule de Picard-Lefschetz dit que la monodromie est d’ordre fini. En fait Morgan a montré que la fibration de classe C^∞ qu’on obtient au-dessus du disque épointé devient différentiablement triviale après un changement de base fini. Dans le cas des fibres de dimension 2, le théorème de résolution simultanée d’Atiyah [At] dit qu’après un changement de base fini, on peut compactifier la fibration lisse au-dessus du disque épointé en une fibration *holomorphe* lisse au-dessus du disque, en un mot faire disparaître la singularité en modifiant la fibre centrale, ce qui est évidemment plus fort que le théorème de trivialité différentiable de Morgan.

Je montre dans [JdiffGeom90] que cet énoncé devient faux en dimension supérieure pour une famille de variétés à fibré canonique trivial si l’on suppose de plus que la fibre centrale est cohomologiquement kählérienne (il est conjecturé que c’est toujours le cas).

Mes travaux plus récents reposent sur l'étude non pas des structures de Hodge individuelles sur chaque groupe de cohomologie d'une variété kählérienne ou projective, mais sur la prise en compte du fait que le cup-produit

$$\cup : H^l(X, \mathbb{Z}) \otimes H^k(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^{k+l}(X, \mathbb{Z})$$

est compatible avec la décomposition de Hodge, au sens où

$$H^{p,q}(X) \cup H^{p',q'}(X) \subset H^{p+p',q+q'}(X).$$

J'ai utilisé cette compatibilité dans l'article [**Invent04**] pour montrer le résultat suivant (qui est probablement mon résultat le plus important) :

Théorème 10 *Il existe des variétés kählériennes compactes qui n'ont pas le type d'homotopie de variétés projectives.*

Encore une fois, ce théorème montre une différence entre les dimensions ≤ 2 et les dimensions supérieures, car dans le cas des surfaces, Kodaira montre dans [Ko] que toute surface kählérienne compacte admet une déformation (de la structure complexe) qui est une surface projective.

La preuve de ce théorème repose sur la notion de structure de Hodge polarisée. Pour les variétés projectives, l'existence d'une classe de Kähler entière permet de mettre une structure de Hodge polarisée sur chaque groupe de cohomologie. Je construis des variétés kählériennes compactes X qui ont une algèbre de cohomologie très riche de sorte que :

1) Si on se donne une structure de Hodge de poids k sur chaque $H^k(X, \mathbb{Z})$ satisfaisant la condition de compatibilité ci-dessus, la structure de Hodge sur $H^1(X, \mathbb{Z})$ (ou $H^2(X, \mathbb{Z})$ si on veut fabriquer un exemple simplement connexe) possède un endomorphisme de structure de Hodge dont la classe de conjugaison est spécifiée.

2) Je montre que pour certaines classes de conjugaison, la présence de tels endomorphismes est incompatible avec l'existence d'une polarisation.

Ainsi, les exemples que j'obtiens n'ont pas l'anneau de cohomologie d'une variété projective.

Dans l'article [**MathAnn08**], je suis revenue à ces conditions de compatibilité, et j'ai montré qu'elles fournissent de nombreuses restrictions sur les algèbres de cohomologie à coefficients rationnels de variétés kählériennes, indépendantes des nombres de Hodge $h^{p,q}$. Ces restrictions sont des restrictions algébriques sur la structure de \mathbb{Q} -algèbre de l'algèbre de cohomologie et donnent des conditions topologiques explicites et nouvelles pour qu'une variété différentiable compacte admette une structure complexe kählérienne. Ces restrictions s'appliquent à des exemples de variétés symplectiques satisfaisant la propriété de Lefschetz difficile, la propriété de formalité, et qui sont simplement connexes.

1.0.5 Géométrie algébrique et géométrie symplectique, liens avec la physique mathématique ([Astérisque93], [CompoMath96], [Pano96])

Si X est une variété projective complexe lisse ou une variété kählérienne compacte, les formes de Kähler sur X forment un ensemble connexe de formes symplectiques. Oubliant la structure complexe, on a donc une classe de déformation de variétés symplectiques associée à X . Dans l'article révolutionnaire [Gro], Gromov

a observé qu’une variété symplectique possède une famille connexe de structures presque complexes compatibles. De plus il a montré que la théorie des courbes pseudo-holomorphes se comporte à bien des égards comme celles des courbes holomorphes dans une variété complexe : il n’y a pas de problèmes locaux liés à la non-intégrabilité de la structure presque complexe. Enfin, son fameux théorème de compacité lui permet de compactifier l’espace des applications pseudo-holomorphes d’une courbe de genre g vers X (une structure presque complexe sur X étant fixée), de classe d’homologie donnée. Ici le point-clé est le fait que l’aire de la courbe se calcule comme l’intégrale sur la courbe de la forme symplectique, et comme celle-ci est fermée, cette aire ne dépend que de la classe d’homologie de la courbe considérée.

Ceci a donné lieu à la théorie des invariants de Gromov-Witten, obtenus par comptage des courbes pseudo-holomorphes de classe fixée (cf. [RT]). Les géomètres symplectiques aiment choisir une structure presque complexe générique, et les géomètres algébristes préfèrent garder leurs structures complexes, qui ne sont pas génériques, et appliquer des formules d’excès (cf. [Be-Fa]).

Dans l’article [CompoMath96], j’ai calculé la contribution excessive des revêtements ramifiés de degré d et de genre 0 d’une courbe rationnelle rigide de classe A aux invariants de Gromov-Witten dans la classe dA .

La symétrie miroir (cf. [Pano96]) relie de façon spectaculaire la géométrie algébrique et les variations de structure de Hodge d’une part, la géométrie symplectique et les invariants de Gromov-Witten d’autre part. Dans la formulation conjecturale plus récente due à Kontsevich, la symétrie miroir est présentée comme une équivalence de catégories entre catégorie dérivée de faisceaux cohérents d’un côté, et catégorie de Fukaya de l’autre côté. Mais originellement, la symétrie miroir s’est présentée comme un isomorphisme de variations de structures de Hodge. Partant d’une variété de Calabi-Yau X de dimension n , on peut considérer la variation de structure de Hodge sur $H^n(X, \mathbb{Z})$, paramétrée par la famille de déformations universelles de X qui est lisse de dimension $h^1(X, T_X)$. Le miroir est une variété de Calabi-Yau \widehat{X} qui satisfait $h^{1,1}(\widehat{X}) = h^1(X, T_X)$ et plus généralement $h^i(X, \Omega_X^j) = h^i(X, \wedge^j T_X) = h^i(X, \Omega_X^{n-j})$, la dernière égalité étant due à la trivialité du fibré canonique. On voit maintenant $H^1(\widehat{X}, \Omega_{\widehat{X}})$ comme $H^2(\widehat{X}, \mathbb{C})$ et on utilise les invariants de Gromov-Witten de \widehat{X} pour construire une variation de structure de Hodge “quantique” de base $H^2(\widehat{X}, \mathbb{C})$ (ou un ouvert) sur le fibré trivial de fibre $H^{2*}(\widehat{X}, \mathbb{C})$. La filtration de Hodge est triviale, mais l’ingrédient-clé est la connexion quantique, dont les coefficients structurels sont construits à l’aide de la multiplication quantique.

La symétrie miroir est un isomorphisme entre ces deux variations de structure de Hodge. En dimension 3, on peut aussi la formuler comme une égalité entre deux potentiels, l’un étant donné par le potentiel de Gromov-Witten du côté symplectique, l’autre étant donné par un potentiel dont les dérivées troisièmes fournissent les accouplements de Yukawa du côté variation de structure de Hodge.

Dans l’article [Astérisque93], j’ai construit et étudié des paires miroirs en considérant des surfaces $K3$ munies d’une involution i agissant par -1 sur la forme de type $(2, 0)$. Je regarde des variétés de dimension 3 du type $X = E \times \widetilde{S}/(-Id, i)$, où le $\widetilde{\cdot}$ désigne une désingularisation naturelle. J’ai construit les miroirs comme étant des variétés du même type, mais pour une involution d’un type topologique différent. Pour ces exemples, j’ai pu construire explicitement l’application miroir entre les deux espaces de modules, et vérifier au moins asymptotiquement les prédictions concer-

nant les accouplements de Yukawa.

Indépendamment de la symétrie miroir, la relation entre géométrie algébrique et géométrie symplectique me semble extrêmement importante. Dans les articles [AnnFourier00] et [ContMath02], j'ai montré qu'on pouvait construire un schéma de Hilbert ponctuel presque complexe (symplectique) pour les variétés presque complexes (symplectiques) de dimension réelle 4. Le but était de comprendre le résultat de [EGL] disant que la classe de cobordisme complexe du schéma de Hilbert d'une surface complexe compacte ne dépend que de celle de la surface. Dans l'article [Astérisque08], je me suis penchée sur un problème intéressant, posé par Kollár. Kollár et Ruan ont montré indépendamment que si X est une variété projective complexe uniréglée, c'est-à-dire balayée par des courbes rationnelles, et Y est une variété projective symplectiquement équivalente à X , alors Y est également uniréglée. La question posée concerne l'énoncé analogue pour la propriété de connexité rationnelle, où on demande que deux points quelconques de X soient reliés par une chaîne de courbes rationnelles. En dimension 1 et 2 c'est une conséquence facile du résultat de Kollár-Ruan. En dimension 3 j'ai montré que la réponse est positive lorsque X est une variété de Fano, ou satisfait $b_2(X) \leq 2$.

1.0.6 Géométrie classique, syzygies ([Crelle88], [JEMS02], [CompoMath05], [Acta92])

Je me suis intéressée aux propriétés géométriques des courbes dans leur plongement canonique dans les articles [Crelle88], [Acta92], [JEMS02], [CompoMath05]. On considère une courbe lisse projective C de genre g , et on introduit l'anneau canonique de C :

$$R_C := \bigoplus_{n \geq 0} H^0(C, K_C^{\otimes n}),$$

où K_C est le fibré canonique, ou fibré des différentielles de C . Les propriétés algébriques de cet anneau gradué dépendent de la géométrie des systèmes linéaires sur C , comme le montrent les théorèmes de Noether et de Petri. Le théorème de Noether dit que cet anneau est engendré en degré 1 si et seulement si la courbe n'est pas hyperelliptique, c'est-à-dire un revêtement double de la droite projective. Le théorème de Petri dit que si la première condition est satisfaite, l'idéal de C dans son plongement canonique, c'est-à-dire le noyau du morphisme d'anneaux

$$\text{Sym } H^0(C, K_C) \rightarrow R_C$$

est engendré en degré 2 si et seulement si la courbe n'est pas trigonale ou une quintique plane.

Ces théorèmes ont actuellement des démonstrations très élégantes (cf. [G-L]). Mark Green a conjecturé dans [Gr1] que ces énoncés n'étaient que le début d'une série d'énoncés reliant les syzygies de l'anneau R_C , (ou encore l'allure de sa résolution minimale comme $\text{Sym } H^0(C, K_C)$ -module) à l'indice de Clifford de C :

$$\text{Cliff}(C) := \text{Min}_{L, h^0(L) \geq 2, h^1(L) \geq 2} d(L) - 2r(L)$$

où pour L un fibré inversible sur C , $d(L) := \text{deg } L$ et $r(L) + 1 := h^0(C, L)$.

Dans l'article [Crelle88], j'avais montré le cas suivant le théorème de Petri dans cette série : on étudie alors les relations entre les équations quadratiques définissant C , et on veut montrer qu'elles sont engendrées par les relations linéaires, sauf si C

est tétragonale ou une sextique plane. Ce résultat a été obtenu indépendamment par Schreyer [S].

Dans les articles [JEMS02] et [CompoMath05], j'ai montré la conjecture de Green pour les courbes génériques de gonalité fixée (supérieure ou égale à $g/3$, le cas de gonalité $\leq g/3$ ayant été traité par Teixidor [Te]). L'espace de modules \mathcal{M}_g paramétrant les courbes lisses de genre g est stratifié par la gonalité, c'est-à-dire le plus petit degré d'un morphisme non constant d'une courbe vers \mathbb{P}^1 (c'est une fonction semi-continue inférieurement sur \mathcal{M}_g). La gonalité d'une courbe générique est à peu près $g/2$. Je montre :

Théorème 11 *La conjecture de Green est satisfaite dans un ouvert dense de Zariski de chacune des strates.*

La preuve donnée dans [JEMS02] est surtout intéressante par son point de départ qui consiste à interpréter les syzygies, objets algébriques compliqués à calculer, comme des sections de fibrés en droites sur une variété adéquate (un schéma de Hilbert). Par ailleurs, je considère le cas de courbes sections hyperplanes de surfaces $K3$, et j'analyse la situation géométrique sur la surface $K3$, ce qui s'avère beaucoup plus faisable. La démonstration fait aussi pleinement intervenir la géométrie du schéma de Hilbert ponctuel d'une surface $K3$, ce qui est un déplacement assez surprenant du problème.

Une autre de mes contributions dans ce domaine est l'article [Acta92], où j'analyse l'application de Wahl d'une courbe canonique. C'est essentiellement une version projective de l'application de Gauss. Wahl a montré que cette application n'est pas surjective lorsque la courbe est section hyperplane d'une surface $K3$. Je montre le lien entre la non-surjectivité de l'application de Gauss d'une courbe C et l'existence de fibrés vectoriels de rang 2 possédant beaucoup de sections, comme on s'y attend si la courbe est tracée sur une surface $K3$. Cela va dans la direction d'une réciproque au théorème de Wahl.

1.0.7 Courbes rationnelles, hyperbolicité ([Fanoconf04], [DMJ08], [JdiffGeom96])

La classification birationnelle des variétés algébriques complexes fait apparaître comme premier invariant la dimension de Kodaira $\kappa(X)$, qui mesure la positivité du fibré canonique. Dans un second temps, pour les variétés X de dimension de Kodaira $-\infty$, on peut faire intervenir un invariant plus subtil $\kappa'(X)$ introduit par Campana, qui est le rang maximal d'un sous-faisceau cohérent \mathcal{F} de Ω_X tel que $\det \mathcal{F}$ possède une section non nulle.

Conjecturalement, cette seconde dimension peut se calculer à l'aide de l'étude des courbes rationnelles dans X . En fait, on devrait avoir $\kappa(X) = -\infty$ seulement pour les variétés balayées par des courbes rationnelles et $\kappa'(X)$ devrait être la dimension de la base de la fibration rationnellement connexe de X . Demailly et ses collaborateurs ont fait un beau progrès dans cette direction, mais ces questions restent ouvertes.

Dans le cas de variétés de dimension de Kodaira $\kappa(X) \geq 0$, on a l'alternative suivante : soit elles sont de type général, (à fibré canonique presque ample), soit elles admettent une fibration rationnelle dont les fibres ont leur fibré canonique numériquement trivial.

Les variétés de type général et les variétés à fibré canonique numériquement trivial occupent donc une place très spéciale dans la géométrie en dimension supérieure.

Les variétés à fibré canonique numériquement trivial ne peuvent pas être balayées par des courbes rationnelles, et les variétés de type général ne peuvent pas être balayées par des courbes elliptiques. En dehors de ces évidences, on ne sait pas dire grand chose. Par contre, on a un ensemble impressionnant de conjectures dues à Lang, Green-Griffiths, Kobayashi-Ochiai, qui mixent la géométrie diophantienne, la géométrie algébrique et la géométrie complexe.

Le point de vue de la géométrie complexe est dû à Kobayashi [Kob]. Celui-ci introduit une pseudo-métrique sur toute variété complexe X , ainsi qu'une pseudo-forme volume Ψ_X , construites à l'aide des disques holomorphes $f : D \rightarrow X$, resp. des polydisques holomorphes $f : D^n \rightarrow X$, $n = \dim X$. Ici D est le disque unité de \mathbb{C} .

Cette pseudo-métrique est nulle en un point x si pour tout vecteur tangent complexe u à X en x il existe des applications holomorphes $f_i : D \rightarrow X$, $i \in \mathbb{N}$, telles que $f_{i*}(\frac{\partial}{\partial z})$ soit un multiple arbitrairement grand de u . De même la pseudo-forme volume est nulle en un point s'il existe des applications holomorphes $f_i : D^n \rightarrow X$ centrées en ce point et à jacobien arbitrairement grand en 0.

On a le résultat suivant [Kob-Oc] :

Théorème 12 *Si X est projective de type général, notant μ_X une forme volume sur X , il existe un ouvert de Zariski non vide U de X et un réel $\epsilon > 0$ tels que $\Psi_X \geq \epsilon \mu_X$ sur U .*

La réciproque de cet énoncé est conjecturée. Même dans le cas des variétés à fibré canonique trivial, elle n'est pas connue.

Dans l'article [Fanoconf04], j'ai construit une variante Φ_X de la forme volume de Kobayashi, où l'on remplace les applications holomorphes par ce que j'ai appelé les K -correspondances entre le polydisque et X . Ces K -correspondances sont des applications holomorphes multivaluées pour lesquelles on peut définir un analogue du jacobien. Je montre le résultat suivant :

Théorème 13 *La pseudo-forme volume Φ_X satisfait la conclusion du théorème de Kobayashi-Ochiai pour les variétés projectives X de type général. De plus, elle est nulle presque partout pour une classe assez large de variétés à fibré canonique trivial.*

La preuve du second énoncé passe par la construction de K -autocorrespondances dilatantes de ces variétés, ce qui utilise le théorème de Mumford [Mum] et l'étude du groupe des 0-cycles.

Concernant la pseudo-distance ou pseudo-métrique de Kobayashi d'une variété complexe X , on sait par le théorème de Brody que si X est compacte, elles sont non-dégénérées si et seulement si il n'existe pas d'application holomorphe non constante de \mathbb{C} dans X . (L'image d'une telle application est appelée "courbe entière" de X .) On a deux conjectures fascinantes dues à Green-Griffiths et à Lang-Vojta, établissant un parallèle entre géométrie complexe et géométrie diophantienne :

Conjecture 1 *Si X est de type général, les courbes entières ne sont pas denses pour la topologie de Zariski dans X , c'est-à-dire sont toutes contenues dans une sous-variété algébrique propre de X .*

Conjecture 2 *Si la variété projective X est définie sur un corps de nombres et est de type général, les points rationnels de X ne sont pas potentiellement denses dans X .*

Ici, les points rationnels sont dits “potentiellement denses” s’il existe un corps de nombres k pour lequel $X(k)$ est dense pour la topologie de Zariski dans X .

Inversement, il est tentant de conjecturer que si une variété est à fibré canonique numériquement trivial, elle satisfait les conditions :

1. Les courbes entières sont denses dans X pour la topologie de Zariski, et même sans doute aussi pour la topologie usuelle.
2. La pseudo-métrique de Kobayashi de X est nulle.
3. Si X est définie sur un corps de nombres, les points rationnels sont potentiellement denses dans X .

Il n’est pas très difficile, en utilisant les constructions de Clemens [Cl1], de montrer que les courbes rationnelles sont denses pour la topologie de Zariski dans une hypersurface à fibré canonique trivial de l’espace projectif. Il n’y a pas de méthode connue pour montrer la densité pour la topologie usuelle, ce qui serait pourtant bien utile pour montrer la nullité de la pseudo-métrique de Kobayashi. Dans l’article [Curdev], je montre que les revêtements doubles de l’espace projectif à fibré canonique trivial satisfont les deux premières conditions ci-dessus. Il serait intéressant d’étudier la troisième propriété sur ces exemples qui à certains égards sont très proches des hypersurfaces.

Dans l’article [DMJ08], écrit avec K. Amerik, nous montrons cette troisième propriété pour la variété des droites d’une cubique de dimension 4, qui est une variété hyperkählérienne, a fortiori à fibré canonique trivial.

Dans l’article [JdiffGeom96], j’ai étudié ce que Demailly a défini comme l’hyperbolicité algébrique dans le cas des hypersurfaces de l’espace projectif. Ce n’est pas mon article le plus profond, mais j’ai introduit ici une méthode qui a été abondamment reprise récemment dans le contexte de l’hyperbolicité au sens de Kobayashi. Pour définir la notion d’hyperbolicité algébrique d’une variété algébrique X , on étudie les courbes algébriques de X ; une variété X est dite algébriquement hyperbolique s’il existe une borne linéaire (avec un ϵ fixé)

$$g(C) - 1 \geq \epsilon \deg C$$

pour toute courbe $C \subset X$, où $g(C)$ est le genre de la normalisée et le degré est calculé par rapport à n’importe quel fibré en droites ample fixé. Bien sûr, l’hyperbolicité algébrique interdit la présence de courbes rationnelles ou elliptiques dans X .

Dans cet article, j’ai redémontré et amélioré de façon optimale un énoncé de Clemens [Cl2] concernant l’hyperbolicité algébrique des hypersurfaces de l’espace projectif.

1.1 Travaux accomplis depuis 2009

1.1.1 Variétés hyperkählériennes ([crelle10], [2], [GT12])

Dans l’article [crelle10], nous construisons avec O. Debarre une nouvelle famille complète de variétés hyper-Kählériennes déformations projectives d’un schéma de Hilbert $S^{[2]}$, où S est une surface $K3$. C’est la quatrième famille connue, après celles de Beauville-Donagi [B-D], Iliev-Ranestad [Il-Ra] et O’Grady [O’G1]. Nos variétés hyper-Kählériennes sont définies comme l’ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension 6 d’un espace vectoriel V de dimension 10 sur lesquels une 3-forme donnée $\sigma \in \bigwedge^3 V^*$ s’annule identiquement.

Dans l'article [2], nous étudions avec K. Ranestad la famille de variétés hyper-Kählériennes de dimension 4 construite par Iliev et Ranestad [Il-Ra]. Ces variétés sont comme celles de Beauville et Donagi associées à la donnée d'une cubique lisse de dimension 4. Dans le cas de Beauville et Donagi, il y a une correspondance naturelle qui identifie les périodes (la structure de Hodge) de la cubique à celle de la variété hyper-Kählérienne associée. Nous montrons au contraire qu'une telle relation n'existe pas entre la cubique et la variété qui lui est associée par Iliev et Ranestad. Leurs structures de Hodge ne sont pas isogènes.

Dans l'article [GT12], j'utilise des résultats établis par Beauville et moi-même sur l'anneau de Chow d'une surface $K3$ (voir [BeauVoi]) pour établir un fait curieux concernant la topologie des familles de surfaces $K3$ $\pi : \mathcal{S} \rightarrow B$. Je montre qu'il existe un ouvert de Zariski dense $U \subset B$, et une décomposition dans la catégorie dérivée de U

$$R\pi_*\mathbb{Q} = \bigoplus R^i\pi_*\mathbb{Q}[-i]$$

qui est compatible avec le cup-produit naturel de chaque côté. Je montre aussi une extension de notre résultat avec Beauville aux hypersurfaces de Calabi-Yau X dans l'espace projectif :

Théorème 14 *L'intersection de deux cycles de X de dimensions complémentaires non nulles est proportionnelle dans $CH_0(X)_{\mathbb{Q}}$ au 0-cycle canonique de X (obtenue par restriction d'une droite de l'espace ambiant).*

1.1.2 Positivité des cycles ([GAFA09], [CompMath11], [PAMQ13])

L'article [GAFA09] est consacré à la conjecture de Hodge généralisée pour les hypersurfaces (ou intersections complètes) de coniveau de Hodge ≥ 2 , c'est-à-dire les hypersurfaces de degré d dans \mathbb{P}^n avec $n \geq 2d$. Le fait qu'elles soient de coniveau de Hodge ≥ 2 signifie par définition que les nombres de Hodge $h^{n-1,0}$ et $h^{n-2,1}$ sont nuls. La conjecture de Hodge généralisée prédit que leur cohomologie primitive est supportée sur un fermé algébrique de codimension 2. Je ne résouds pas ce problème qui reste ouvert mais je le relie à une conjecture sur la positivité des cycles de la façon suivante :

Je montre que précisément sous l'hypothèse $n \geq 2d$, la sous-variété $F_g \subset F(X)$ de la variété des droites de X définie comme l'ensemble des droites contenues dans l'hypersurface de X définie par $g = 0$, où $\deg g = n - d - 1$, et g est choisie génériquement, satisfait la condition "d'amplitude" suivante : les déformations de F_g dans $F(X)$ passent par un point arbitraire général avec un espace tangent arbitraire général. Je conjecture qu'une sous-variété $Z \subset W$ satisfaisant une telle condition de mobilité a sa classe $[Z]$ dans l'intérieur du cône des classes effectives (on dira qu'une telle classe est grosse). Je montre :

Théorème 15 *Si la classe $[F_g]$ dans $F(X)$ est grosse, c'est-à-dire satisfait la conjecture ci-dessus, X satisfait la conjecture de Hodge généralisée en coniveau 2.*

Je donne aussi dans cet article un exemple très simple de variété à fibré normal ample dans une variété projective lisse dont la classe de cohomologie n'est pas grosse.

Dans l'article [CompMath11], écrit avec Debarre, Ein et Lazarsfeld, nous donnons un exemple de classe numériquement effective sur une variété projective complexe, c'est-à-dire d'intersection positive ou nulle avec toute classe de cycle effectif, qui n'est pas dans l'adhérence du cône effectif. Ceci répond négativement à une question posée par Grothendieck. L'exemple repose sur le fait qu'en (co)dimension > 1 les cônes positifs et fortement positifs dans l'espace des formes réelles de type (p, p) sont duaux et différents. Or sur une variété abélienne, les classes de cycles effectifs sont représentées par des formes fortement positives.

Dans l'article [PAMQ13], écrit avec Debarre et Jiang, nous étudions une question posée par Debarre et que je crois vraiment très importante :

Conjecture 3 *Soit $\phi : X \rightarrow Y$ un morphisme projectif entre variétés projectives lisses complexes. Soit $\alpha \in H^{2r}(X, \mathbb{R})$ une classe de cohomologie réelle pseudoeffective sur X (c'est-à-dire limite de classes de cycles effectifs) telle que $\psi_*\alpha = 0$ dans $H^{2m}(Y, \mathbb{R})$. Alors α appartient au sous-espace vectoriel (ou, dans la version forte, au cône convexe fermé) de $H^{2r}(X, \mathbb{R})$ engendré par les classes de sous-variétés contractées par ϕ .*

Nous montrons cette conjecture pour les cycles de dimension 1 et de codimension 1. Nous discutons également certaines réductions de la conjecture et certaines variantes. En particulier, nous montrons le résultat suivant qui concerne l'une de ces variantes, où au lieu de considérer les classes pseudoeffectives on considère les classes représentables par une forme fortement positive :

Théorème 16 *Soit X une variété de coniveau de Hodge ≥ 1 , c'est-à-dire $h^{i,0}(X) = 0$ pour $i > 0$. Supposons la variante ci-dessus de la conjecture 3 vraie. Alors X satisfait la conjecture de Hodge généralisée pour le coniveau 1, à savoir, il existe un fermé algébrique propre $Y \subset X$, tel que $H^{*>0}(X, \mathbb{Q})$ s'annule sur $X \setminus Y$.*

1.1.3 Conjecture de Hodge entière, invariants birationnels ([PAMQ11], [Duke12], [EMSvdG12], [Clayharris13], [Invent14])

L'article [PAMQ11] écrit avec Andreas H\"oring étend au cas singulier un résultat que j'avais obtenu auparavant pour les variétés de Calabi-Yau de dimension 3 lisses :

Théorème 17 *Soit X une variété de dimension 3 à singularités canoniques isolées, fibré canonique trivial satisfaisant $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$. Soit $S \subset X_{reg}$ une surface lisse suffisamment ample. Alors l'homologie entière $H_2(S, \mathbb{Z})$ est engendrée par des classes qui deviennent algébriques sur une petite déformation de S dans X .*

Nous en déduisons le résultat suivant que j'avais montré auparavant en dimension 3 :

Théorème 18 *Soit X une variété de Fano de dimension $n = 4, 5$ et d'indice $n - 2$. Alors l'homologie entière $H_2(X, \mathbb{Z})$ est engendrée par les classes de courbes contenues dans X .*

Dans l'article [Duke12], écrit avec Colliot-Thélène, nous montrons que pour une variété projective lisse dont le groupe CH_0 est supporté sur une surface, le groupe de

cohomologie non ramifiée $H_{nr}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ s'identifie au groupe $Hdg^4(X, \mathbb{Z})/H^4(X, \mathbb{Z})_{alg}$ mesurant le défaut de la conjecture de Hodge entière pour les classes de degré 4 sur X . Nous trouvons ainsi que les exemples de Colliot-Thélène-Ojanguren sont aussi des contre-exemples à la conjecture de Hodge entière, tandis que les résultats que j'avais montrés sur les classes de Hodge entière en degré 4 pour les cubiques lisses dans \mathbb{P}^5 établissent que leur troisième groupe de cohomologie non ramifiée à coefficients de torsion est nul.

L'article [EMSvdG12] donne une interprétation similaire de la cohomologie non ramifiée de degré 4 à coefficients de torsion.

Théorème 19 *Soit X une variété projective lisse complexe avec $H^5(X, \mathbb{Z}) = 0$. Alors on a une suite exacte*

$$0 \rightarrow H_{nr}^4(X, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow H_{nr}^4(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow T^3(X) \rightarrow 0,$$

où $T^3(X)$ est le groupe de cycles suivant : On considère le sous-groupe de $\text{CH}^3(X)$ constitué des cycles de torsion annulés par l'application classe de cycle de Deligne, et on prend son image modulo l'équivalence algébrique.

La raison de s'intéresser au quotient $T^3(X)$ est que le terme $H_{nr}^4(X, \mathbb{Z})$ est nul pour toute variété dont le groupe CH_0 est supporté sur une sous-variété de dimension ≤ 3 , en particulier les variétés rationnellement connexes, alors que le groupe $H_{nr}^4(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ peut être non nul et lorsque c'est le cas, détecte la non-rationalité.

L'article [Invent14] est sans aucun doute mon meilleur article de ces dernières années. J'y montre par un argument de dégénérescence les résultats suivants :

Théorème 20 (i) *Soit X la désingularisation d'un revêtement double de \mathbb{P}^3 avec $k \leq 7$ noeuds très général, alors le groupe $\text{CH}_0(X)$ n'est pas universellement trivial. En particulier X n'est pas stablement rationnel.*

(ii) *X n'admet pas de décomposition cohomologique de la diagonale.*

(iii) *Si X a exactement 7 noeuds, X n'admet pas de cycle de codimension 2 universel $Z \in \text{CH}^2(J^3(X) \times X)$.*

(iv) *La cohomologie non ramifiée universelle de degré 3 de X à coefficients de torsion est non triviale.*

Ici, le cycle de codimension 2 universel doit satisfaire la condition que le morphisme induit

$$\begin{aligned} \phi_Z : J^3(X) &\rightarrow J^3(X), \\ t &\mapsto AJ_X(Z_t) \end{aligned}$$

est l'identité. Notons que sous nos hypothèses, on a par Bloch et Srinivas

$$\text{CH}^2(X)_{hom} \cong^{AJ_X} J^3(X).$$

Je montre aussi la relation suivante entre la propriété d'avoir un cycle universel de codimension 2 et le fait que la cohomologie non ramifiée de degré 3 à coefficients de torsion soit universellement triviale :

Théorème 21 *Soit X une variété lisse projective telle que $\mathrm{CH}^0(X) = \mathbb{Z}$. On suppose que $H_{nr}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 0$, que la cohomologie entière de X est sans torsion, et que les composantes de Künneth de la diagonale de X sont algébriques (à coefficients entiers).*

Alors X possède un cycle de codimension 2 universel $Z \in \mathrm{CH}^2(J^3(X) \times X)$ si et seulement si la cohomologie non ramifiée de degré 3 à coefficients de torsion de X est universellement triviale.

Corollaire 1 *Si X est une cubique lisse de dimension 4, la cohomologie non ramifiée de degré 3 à coefficients de torsion de X est universellement triviale.*

Corollaire 2 *Si X est une variété rationnellement connexe de dimension 3, telle que $H^3(X, \mathbb{Z})$ est sans torsion, la cohomologie non ramifiée de degré 3 à coefficients de torsion de X est universellement triviale si et seulement si X possède un cycle de codimension 2 universel $Z \in \mathrm{CH}^2(J^3(X) \times X)$.*

1.1.4 0-cycles, groupes de Chow ([AnnSci13], [JDG14], [DocMath12], [AlgGeom14], [3], [KodCent])

Les conjectures de Bloch et Beilinson prédisent que les groupes de Chow d’une variété projective lisse complexe sont contrôlés d’une manière précise par leur niveau de Hodge, c’est-à-dire la longueur de leur décomposition de Hodge.

Conjecture 4 *Soit X une variété projective lisse complexe telle que $H^{p,q}(X) = 0$ pour $p \neq q$, $p < c$ ou $q < c$. Alors l’application classe de cycle*

$$c : \mathrm{CH}_i(X)_{\mathbb{Q}} \rightarrow H^{2n-2i}(X, \mathbb{Q})$$

est injective pour $i < c$.

L’hypothèse faite sur X est, si l’on en croit la conjecture de Hodge généralisée par Grothendieck, équivalente au fait que la cohomologie de X est (modulo les classes de cycles algébriques), supportée sur un fermé algébrique de codimension $\geq c$. On dit alors que X est de coniveau géométrique $\geq c$.

Conjecture 5 *Soit X une variété projective lisse complexe de coniveau géométrique $\geq c$. Alors l’application classe de cycle*

$$c : \mathrm{CH}_i(X)_{\mathbb{Q}} \rightarrow H^{2n-2i}(X, \mathbb{Q})$$

est injective pour $i < c$.

Les articles [AnnSci13], [KodCent] sont aussi parmi les meilleurs que j’aie écrits durant cette période. Dans l’article [AnnSci13], je montre le résultat suivant :

Théorème 22 *Soit X une variété projective de dimension $n+1$ à groupes de Chow “triviaux” (c’est-à-dire que l’application classe de cycle est injective en tout degré). Soit L un fibré en droites très ample sur X . Alors (en supposant la conjecture de Lefschetz standard si $n \geq 4$), une hypersurface très générale $Y \in |L|$ satisfait la conjecture 5.*

Je me suis aperçue par la suite (cf. [KodCent]) qu'un argument très simple permettait d'éviter le recours à la conjecture de lefschetz standard, au prix d'une hypothèse un peu plus forte sur Y (on dira que Y est "fortement de coniveau $\geq c$ " au lieu de "de coniveau $\geq c$ " : on demande que la diagonale corrigée Δ_Y soit cohomologue à un cycle de $Y \times Y$ supporté sur $W \times Y$, avec $\text{codim}(W) \geq c$). Le résultat inconditionnel montré dans [KodCent] est le suivant :

Théorème 23 *Soit X une variété projective de dimension $n+1$ à groupes de Chow "triviaux". Soit L un fibré en droites très ample sur X . Alors si une hypersurface $Y \in |L|$ très générale de X est fortement de coniveau $\geq c$, l'application classe de cycles*

$$CH_i(Y)_{\mathbb{Q}} \rightarrow H^{2n-2i}(Y, \mathbb{Q})$$

est injective pour $i \leq c-1$.

Une méthode similaire me permet dans [JDG14] de montrer un résultat meilleur dans le cas des familles de surfaces :

Théorème 24 *Soit $\pi : \mathcal{S} \rightarrow B$ une famille de surfaces projectives lisses avec $b_1 = 0$. Soit \mathcal{Z} un cycle de codimension 2 dans $\mathcal{S} \times_B \mathcal{S}$. On note $\mathcal{Z}_t \in \text{CH}^2(\mathcal{S}_t \times \mathcal{S}_t)$ la restriction de \mathcal{Z} à la fibre au-dessus de $t \in B$. Supposons*

- (i) \mathcal{Z}_t^* est nul sur $H^{2,0}(\mathcal{S}_t)$;
- (ii) $\mathcal{S} \times_B \mathcal{S}$ admet une compactification lisse rationnellement connexe. Alors

$$\mathcal{Z}_{t*} : \text{CH}_0(\mathcal{S}_t)_{\text{hom}} \rightarrow \text{CH}_0(\mathcal{S}_t)_{\text{hom}}$$

est nilpotent.

En particulier, si $h^{2,0}(\mathcal{S}_t) = 0$, et (ii) est satisfaite, \mathcal{S}_t satisfait la conjecture de Bloch : $\text{CH}_0(\mathcal{S}_t)_{\text{hom}} = 0$.

Dans l'article [DocMath12], je montre que les involutions symplectiques (i.e. préservant la 2-forme holomorphe) des surfaces $K3$ agissent trivialement sur leur groupe CH_0 , comme prédit par la conjecture de Bloch.

Dans l'article [3], je montre inconditionnellement des résultats établis sous certaines hypothèses par Huybrechts [Huy] et O'Grady [O'G2] (le second généralisant les résultats du premier). O'Grady a introduit une filtration croissante sur le groupe CH_0 d'une surface $K3$ S , dont le terme $S_0\text{CH}_0(S)$ est le sous-groupe des multiples du 0-cycle canonique de [beauvoi]. Le terme $S_d\text{CH}_0(S)$ est alors défini comme l'ensemble des cycles qui sont la somme d'un cycle effectif de degré d et d'un multiple du cycle canonique. Je montre

Théorème 25 *Les cycles dans $S_d\text{CH}_0(S)$ de degré $k \geq d$ sont exactement ceux dont l'orbite sous l'équivalence rationnelle est de dimension $\geq k-d$.*

J'en déduis la généralisation suivante des résultats de Huybrechts et O'Grady :

Théorème 26 *Soit S une surface $K3$, et E un fibré vectoriel simple. Soit $2d := \dim H^1(\text{End}(E))$. Alors $c_2(E) \in S_d\text{CH}_0(S)$.*

Dans l'article [AlgGeom14], j'étudie la longueur de la "décomposition de Beauville" d'une courbe générique dans sa jacobienne. Ce sujet a une assez longue histoire. Beauville a montré dans [Beau] que les groupes de Chow à coefficients rationnels d'une variété abélienne, ainsi que les groupes de cycles modulo équivalence algébrique $CH(A)_{\mathbb{Q}}/alg$ admettent une décomposition en espaces propres relativement à l'action des homothéties :

$$CH^i(A)_{\mathbb{Q}}/alg = \bigoplus_s CH^i(A)_{\mathbb{Q},s}/alg,$$

où $CH^i(A)_{\mathbb{Q},s}/alg := \{z \in CH^i(A)_{\mathbb{Q}}/alg, \mu_k^* z = k^{2i-s} z, \forall k \in \mathbb{Z}^*\}$. Ici μ_k est l'homothétie de coefficient k agissant sur A . Moralement, le groupe $CH^i(A)_{\mathbb{Q},s}$ est la partie de $CH^i(A)_{\mathbb{Q}}$ qui est gouvernée par le groupe de cohomologie $H^{2i-s}(A, \mathbb{Q})$ dans le sens de Bloch et Beilinson.

Lorsqu'on considère une courbe lisse projective X de genre g , elle admet un plongement bien défini à translation près dans sa jacobienne JX . On a donc un 1-cycle Z bien défini dans $CH_1(JX)/alg = CH^{g-1}(JX)/alg$. On considère sa décomposition de Beauville

$$Z = \sum_s Z_s.$$

Z_0 est non nul car il porte la classe de cohomologie de Z , c'est-à-dire de $X \subset JX$, et Z_1 est non nul si X est très générale pour $g \geq 3$ par un résultat de Ceresa.

Colombo et Van Geemen [Co-VG] ont montré que si X est de gonality d , $Z_i = 0$ pour $i \geq d - 1$. Je montre que ce résultat est optimal pour une courbe plane très générale, c'est-à-dire que $Z_{d-3} \neq 0$ pour X très générale de degré d . La méthode fait intervenir des invariants infinitésimaux du même type que ceux introduits dans l'article 21 de la liste de publications, mais modifiés pour s'appliquer aux cycles modulo équivalence algébrique.

Références

- [A-C] A. Albano, A. Collino : On the Griffiths group of the cubic sevenfold, *Mathematische Annalen* (1994).
- [AH] Atiyah, M.F. and Hirzebruch, F. Analytic cycles on complex manifolds, *Topology* 1, 25-45 (1962).
- [At] M. Atiyah. On analytic surfaces with double points, *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* 247 (1958), p. 237- 244.
- [Barlet] D. Barlet. À propos d'une conjecture de R. Hartshorne. *J. Reine Angew. Math.* 374 (1987), 214-220.
- [Beau] A. Beauville. Sur l'anneau de Chow d'une variété abélienne. *Math. Ann.* 273 (1986), no. 4, 647-651.
- [BeauVoi] A. Beauville, C. Voisin. On the Chow ring of a $K3$ surface, *J. Algebraic Geom.* 13 (2004), no. 3, 417-426.

[B-D] A. Beauville, R. Donagi. La variété des droites d'une hypersurface cubique de dimension 4, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **301** (1985), no. 14, 703–706.

[Be-Fa] K. Behrend, B. Fantechi. The intrinsic normal cone, *Inventiones* (1996).

[Bl1] S. Bloch : Lectures on algebraic cycles, Duke University Mathematics Series IV, Durham (1980).

[Bl2] S. Bloch. Algebraic cycles and Higher K -theory, *Advances in Mathematics* 61 (1986).

[B-K-L] S. Bloch, A. Kas, D. Lieberman : Zero-cycles on surfaces with $p_g = 0$, *Compo. Math.* 33 (1976) 135-145.

[CGGH] J. Carlson, M. Green, P. Griffiths : Infinitesimal variations of Hodge structure, *Compo. Math.* 50 (1983) 109-205.

[CDK] E. Cattani, P. Deligne, A. Kaplan, On the locus of Hodge classes, *J. Amer. Math. Soc.* 8 (1995), 2, 483-506.

[Cl1] H. Clemens : Homological equivalence, modulo algebraic equivalence, is not finitely generated, *Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math.* (1983) 19-38.

[Cl2] H. Clemens. Curves in generic hypersurfaces, *Annales de l'ENS*, 1986.

[Co-VG] E. Colombo, Bert van Geemen. Note on curves in a Jacobian. *Compositio Math.* 88 (1993), no. 3, 333–353.

[Del] P. Deligne. Hodge cycles on abelian varieties (notes de JS Milne), dans Springer LNM, 900, 9-100 (1982).

[EGL] G. Ellingsrud, L. Goettsche, M. Lehn. On the cobordism class of the Hilbert scheme of a surface, preprint ICTP 1999.

[Gr1] M. Green. Koszul cohomology and the geometry of projective varieties, *J. Diff. Geometry* 1984.

[Gr 2] M. Green : Griffiths' infinitesimal invariant and the Abel-Jacobi map, *J. Differential Geometry* 29 (1989) 545-555.

[Gr3] M. Green. What comes after the Abel-Jacobi map? preprint 1995.

[Gr4] M. Green. Higher Abel-Jacobi maps, *Documenta mathematica*, extra volume ICM 1998, II 267-276.

[G-L] M. Green, R. Lazarsfeld : A simple proof of Petri's theorem on canonical curves, *Geometry today*, Giornate di Geometria Roma (1984) PM 60, Birkhäuser,

129-142.

- [Gri] P. Griffiths : Periods of certain rational integrals, *Annals of Math.* (1969).
- [Gro] M. Gromov. Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds, *Invent. Math.* 82 (1985), 307–347.
- [Huy] D. Huybrechts. Chow groups of $K3$ surfaces and spherical objects, *JEMS* 12 (2010), pp. 1533-1551.
- [Il-Ra] A. Iliev, K. Ranestad. $K3$ surfaces of genus 8 and varieties of sums of powers of cubic fourfolds. *Trans. Amer. Math. Soc.* **353** (2001), no. 4.
- [Kob] S. Kobayashi. Intrinsic distances, measures and geometric function theory, *Bull. Amer. Math. Soc.* 82 (1976), 357-416.
- [Kob-Oc] S. Kobayashi, T. Ochiai. Mappings into compact complex manifolds with negative first Chern class, *J. Math. Soc. Japan* 23 (1971), 137-148.
- [Ko] K. Kodaira. On compact complex analytic surfaces, I, *Ann. of Math.* 71 (1960), 111-152.
- [La] S. Lang. Hyperbolic and diophantine Analysis, *Bulletin of the American Math. Soc.* Vol. 14, 2, (1986), 159-205.
- [Loo] E. Looijenga. The period map for cubic fourfolds, arXiv :0705.0951
- [Mum] D. Mumford. Rational equivalence of zero-cycles on surfaces, *J. Math. Kyoto Univ.* 9 (1968), 195-204.
- [N] M. Nori : Algebraic cycles and Hodge theoretic connectivity, *Invent. Math.* 111 (1993) 349-373.
- [O’G1] K. O. Grady. Irreducible symplectic 4-folds and Eisenbud-Popescu-Walter sextics, *Duke Math. J.* **134** (2006), 99–137.
- [O’G2] K. O’Grady. Moduli of sheaves and the Chow group of $K3$ surfaces, *Journal de mathématiques pures et appliquées* (2013).
- [Ot] J. Ottem. On subvarieties with ample normal bundle, arXiv :1309.2263
- [RT] Y. Ruan, G. Tian. A mathematical theory of quantum cohomology, *J. Diff. Geom.* (1995).
- [S] F. Schreyer : Syzygies of canonical curves and special linear series, *Math. Ann.* 275 (1986) 105-137.
- [Te] M. Teixidor. Green’s conjecture for the generic r -gonal curve of genus $g \geq 3r - 7$,

Duke Math. J., Vol 111 (2002) 195-222.

[U-Y] K. Uhlenbeck, S. Yau : On the existence of Hermitian-Yang-Mills connections in stable vector bundles, Comm. Pure and Applied Math. 39-S (1986) 257-293.

2 Liste de publications

- [**Invent86**] Théorème de Torelli pour les cubiques de \mathbb{P}^5 , Invent. Math. 86, 577-601(1986), + correction Invent. Math. 2008.
- [**DMJ88**] Sur la jacobienne intermédiaire du double solide d'indice deux, Duke Math. Journal, Vol.57, (1988), 629-646.
- [**MathAnn88**] Une précision concernant le théorème de Noether, Math. Annalen 280, 605-611, (1988).
- [**ComHelv89**] Composantes de petite codimension du lieu de Noether-Lefschetz, Comment. Math. Helvetici (1989) 515-526.
- [**Crelle88**] Courbes tétragones et cohomologie de Koszul, J. Reine Angew. Math. 387 (1988).
- [**JdiffGeom90**] Dégénération de Lefschetz et variations de structure de Hodge, J. of Differential Geometry 31 (1990) 527-534.
- [**CRAS88**] Une remarque sur l'invariant infinitésimal des fonctions normales, C.R.A.S. Paris, t.307, Série 1, 157-160 (1988).
- [**Trento90**] Sur une conjecture de Griffiths et Harris, publié dans : *Algebraic curves and projective geometry*, Proceedings Trento 1988, E. Ballico, C. Ciliberto Eds, Lecture Notes in Mathematics n^o 1389, 270-275.
- [**AmerJMath90**] Relations dans l'anneau de Chow de la surface des coniques des variétés de Fano, Amer. J. of Mathematics 112 (1990) 877-898.
- [**CompoMath90**] Sur le lieu de Noether-Lefschetz en degré 6 et 7, Compositio Mathematica 75 (1990) 47-68.
- [**Acta92**] Sur l'application de Wahl des courbes satisfaisant la condition de Brill-Noether-Petri, Acta Mathematica , vol. 168 (1992) 249-272.
- [**Trieste92**] Sur la stabilité des sous-variétés lagrangiennes des variétés symplectiques holomorphes, publié dans : *Complex projective geometry*, proceedings de la conférence de Trieste, juin 89, édité par Ellingsrud, Peskine, Sacchiero et Stromme, London Math. Soc. Lecture notes series 179, 294-302.
- [**JAG92**] Une approche infinitésimale du théorème de H. Clemens sur les cycles d'une quintique générale de \mathbb{P}^4 , J. Algebraic geometry 1,(1992), 157-174.
- [**AnnPisa92**] Sur les zéro-cycles de certaines hypersurfaces munies d'un automorphisme, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Serie 4, vol. 19 (1992) 473-492.
- [**Topology93**] Structure de Hodge mixte sur certains groupes d'homotopie et application d'Abel-Jacobi, Topology vol. 32 n^o 2, 395-417 (1993).

- [**CRAS91**] Contre-exemple à une conjecture de Harris, C.R.A.S. Paris, t.313, Série 1, 685-687 (1991).
- [**ProcLond93**] Déformation des syzygies et théorie de Brill-Noether, Proc. London Math. Soc. 3, vol. 67 (1993) 493-515.
- [**IntJMath92**] Densité du lieu de Noether-Lefschetz pour les sections hyperplanes des variétés de Calabi-Yau de dimension trois, International Journal of Mathematics, vol. 3, n^o 5 (1992) 699-715.
- [**AnnENS94**] Sur l'application d'Abel-Jacobi des variétés de Calabi-Yau de dimension trois, Annales de l'ENS, 4eme série, tome 27 (1994) 209-226.
- [**Astérisque93**] Miroirs et involutions sur les surfaces K3, dans *Journées de géométrie algébrique d'Orsay*, juillet 92, édité par A. Beauville, O. Debarre, Y. Laszlo, Astérisque 218 (1993) 273-323.
- [**MathAnn94**] Variations de structure de Hodge et zéro-cycles sur les surfaces générales, Mathematische Annalen 299, 77-103 (1994).
- [**Taniguchi94**] Remarks on zero-cycles of self-products of varieties, dans *Moduli of vector bundles* (Proceedings du congrès Taniguchi sur les fibrés vectoriels), édité par Maruyama, Decker (1994) 265-285.
- [**AlgGeom98**] Une preuve élémentaire de la trivialité du groupe CH_0 d'une surface d'Enriques, dans *Algebraic geometry*, édité par P. Newstead, Decker 1998.
- [**CRAS96bis**] (avec L. Bonavero) Schémas de Fano et variétés de Moishezon, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 323 serie 1, 1019-1024. (1996)
- [**JdiffGeom96**] On a conjecture of Clemens on rational curves on hypersurfaces, Journal of Differential Geometry 44 (1996) 200-214 (+ correction 1998).
- [**CompoMath96**] A mathematical proof of a formula of Aspinwall and Morrison, Compositio Mathematica 104, 135-151, 1996.
- [**CRAS96**] Sur les groupes de Chow de certaines hypersurfaces, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 322, serie 1, 73-76, 1996.
- [**Newtrends97**] A generic Torelli theorem for the quintic threefold, dans *New trends in Algebraic Geometry*, édité par Hulek, Catanese, Peters et Reid, Lond. Math. Soc. Lecture Note Series 264.
- [**AnnMath99**] Some results on Green's higher Abel-Jacobi map, Annals of Math. 149, 451-473 (1999).
- [**DMJ00**] The Griffiths group of a general Calabi-Yau threefold is not finitely generated, Duke Math. J. Vol. 102, No 1 (2000), 151-186.
- [**AnnFourier00**] On the Hilbert scheme of an almost complex fourfold, Annales de l'Institut Fourier Tome 50 (2000), fascicule 2, 689-722.
- [**ContMath02**] On the Hilbert scheme of a symplectic fourfold, Volume en l'honneur de Herb Clemens, Contemporary Mathematics, Vol ; 312, (2002).
- [**JIMJ02**] Nori's connectivity theorem and higher Chow groups, Journal of the Inst. Math. Jussieu (2002) 1 (2), 307-329.
- [**JAG04app**] Linear spaces contained in the secant variety of a projective curve, appendice à un article de Ch. Soulé, J. Algebraic Geom. 13 (2004), 343-347.
- [**JAG04**] (avec A. Beauville) On the Chow ring of a K3 surface, J. Algebraic Geom. 13 (2004), no. 3, 417-426.

- [**JEMS02**] Green's conjecture for curves of even genus lying on a K3 surface, *J.Eur. Math. Soc.* 4, 363-404 (2002).
- [**IMRN02**] A counterexample to the Hodge conjecture extended to Kähler varieties, *IMRN* 2002, n0 20, 1057-1075.
- [**Fanoconf04**] K -correspondences and intrinsic pseudo-volume forms, *Proceedings of the Fano Conference*, (Eds A.Collino, A. Conte, M. Marchisio), Publication de l'Université de Turin (2004).
- [**CRAS03**] (avec M. Aprodu) Green-Lazarsfeld's conjecture for generic curves of large gonality, *CRAS*, Volume 336, Issue 4, Pages 335-339, (2003).
- [**Annalidimat04**] Remarks on filtrations on Chow groups and the Bloch conjecture, *Annali di matematica* 183, 421-438 (2004).
- [**CompoMath05**] Green's canonical syzygy conjecture for generic curves of odd genus, *Compos. Math.* 141 (2005), no. 5, 1163–1190.
- [**AnnPisa04**] A geometric application of Nori's connectivity theorem, *Annali della Scuola Norm. Sup. di Pisa*, Vol. III (2004), 637-656.
- [**Invent04**] On the homotopy types of compact Kähler and complex projective manifolds, *Inventiones Math.* Volume 157, Number 2, 329 - 343 (2004).
- [**Adv.Math05**] (avec C. Soulé) On torsion cohomology classes and torsion algebraic cycles on complex projective manifolds, *Advances in Mathematics*, Special volume in honor of Michael Artin, Part I, Vol 198/1 pp 107-127.
- [**JdiffGeom06**] On the homotopy types of Kähler manifolds and the birational Kodaira problem, *J. Differential Geom.* 72 (2006), no. 1, 43–71.
- [**Kyoto06**] On integral Hodge classes on uniruled and Calabi-Yau threefolds, in *Moduli Spaces and Arithmetic Geometry*, *Advanced Studies in Pure Mathematics* 45, 2006, pp. 43-73.
- [**PAMQ05**] A generalization of the Kuga-Satake construction, *Pure and Applied Mathematics Quarterly*, Volume 1, Number 3 (Special Issue : In memory of Armand Borel, Part 2 of 3) 415-439, 2005.
- [**PAMQ08**] On the Chow ring of certain algebraic hyper-Kähler manifolds, *Pure and Applied Mathematics Quarterly*, Volume 4, Number 3, (Special issue in honor of Fedya Bogomolov) , 2008.
- [**CompoMath07**] Hodge loci and absolute Hodge classes, *Compositio Mathematica* Vol. 143 Part 4, 945-958, 2007.
- [**MathAnn08**] Hodge structures on cohomology algebras and geometry, *Math. Ann.* 341 (2008), no. 1, 39–69.
- [**DMJ08**] (avec K. Amerik) Potential density of rational points on the variety of lines of a cubic fourfold, *Duke Math. Journal*, Vol 145, n0 2, 379-408, (2008).
- [**Astérisque08**] Rationally connected 3-folds and symplectic geometry, dans *GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE, PHYSIQUE MATHÉMATIQUE, MATHÉMATIQUES ET SOCIÉTÉ (II)*, Volume en l'honneur de Jean Pierre Bourguignon (O. Hijazi, éd.), *Astérisque* 322 (2008).
- [**GAFA09**] Coniveau 2 complete intersections and effective cones, *Geom. Funct. Anal.* Vol. 19 (2010) 1494-1513.

- [**crelle10**] (avec Olivier Debarre) Hyper-Kähler fourfolds and Grassmann geometry, *J. reine angew. Math.* 649 (2010), 63-87.
- [**CompMath11**] (avec Olivier Debarre, Lawrence Ein et Robert Lazarsfeld) Pseudo-effective and nef classes on abelian varieties, *Compositio Mathematica*, Volume 147, Issue 06, pp 1793-1818 (2011).
- [**PAMQ11**] (avec Andreas Höring) Anticanonical divisors and curve classes on Fano manifolds, *Pure and Applied Mathematics Quarterly* Volume 7, Number 4 (Special Issue : In memory of Eckart Viehweg), 1371-1393 (2011).
- [**Duke12**] (avec Jean-Louis Colliot-Thélène) Cohomologie non ramifiée et conjecture de Hodge entière, *Duke Math. Journal*, Volume 161, Number 5, 735-801 (2012).
- [**JAG13**] Abel-Jacobi map, integral Hodge classes and decomposition of the diagonal, *J. Algebraic Geom.* 22 (2013), 141-174.
- [**GT12**] Chow rings and decomposition theorems for families of $K3$ surfaces and Calabi-Yau hypersurfaces, *Geometry and Topology* 16 (2012) 433-473.
- [**PEMS12**] Approximately rationally or elliptically connected varieties, *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, (Series 2), Volume 57, Issue 1 (in honour of Shokurov), p 281 - 297 (2014).
- [**Clayharris13**] Remarks on curve classes on Fano varieties, *Clay Mathematics Proceedings* Volume 18, 2013, 591-599.
- [**EMSvdG12**] Degree 4 unramified cohomology with finite coefficients and torsion codimension 3 cycles, in *Geometry and Arithmetic*, (C. Faber, G. Farkas, R. de Jong Eds), Series of Congress Reports, EMS (2012).
- [**DocMath12**] Symplectic involutions of $K3$ surfaces act trivially on CH_0 , *Documenta Math.* 17 (2012) 851–860.
- [**AnnSci13**] The generalized Hodge and Bloch conjectures are equivalent for general complete intersections, *Annales scientifiques de l'ENS* 46, fascicule 3 (2013), 449-475.
- [**PAMQ13**] (avec O. Debarre et Z. Jiang) Pseudo-effective classes and pushforwards, *Pure and Applied Mathematics Quarterly* Volume 9, Number 4 (Special Issue : In memory of Andrey Todorov) (2013).
- [**JDG14**] Bloch's conjecture for Catanese and Barlow surfaces, *J. Differential Geometry* 97 (2014) 149-175 (volume dédié à la mémoire de Friedrich Hirzebruch).
- [**AlgGeom14**] Infinitesimal invariants for cycles modulo algebraic equivalence and 1-cycles on Jacobians, *Algebraic Geometry* 2 (2014) 140-165.
- [**KodCent**] The generalized Hodge and Bloch conjectures are equivalent for general complete intersections, II, arXiv :1403.3904, à paraître au *Journal of Mathematical Sciences of the University of Tokyo*, Kodaira centennial issue.
- [**Invent14**] Unirational threefolds with no universal codimension 2 cycle, *Inventiones mathematicae* : Volume 201, Issue 1 (2015), Page 207-237.
- [1] Some new results on modified diagonals, arXiv :1405.6957, à paraître dans *Geometry and Topology*.

Prépublications.

- [2] (Avec K. Ranestad) Variety of power sums and divisors in the moduli space of cubic fourfolds, arXiv :1309.1899.
- [3] Rational equivalence of 0-cycles on $K3$ surfaces and conjectures of Huybrechts and O'Grady, à paraître dans les actes du congrès "Robfest" dédié à Rob Lazarsfeld pour ses 60 ans.
- [4] On the universal CH_0 group of cubic hypersurfaces, arXiv :1407.7261.

II. Articles de synthèse et notes de cours

- [**ICM94**] Variations of Hodge structure and algebraic cycles , Actes du congrès international des mathématiciens , Zürich, (1994).
- [**CIME94**] Cours du C.I.M.E. *Algebraic cycles and Hodge theory*, en collaboration avec M.Green et J.P.Murre , Lecture Notes in Mathematics , Springer verlag (1994).
- [**Pano96**] *Symétrie miroir*, Panoramas et synthèses , 1996.
- [**VHSCY98**] *Variations of Hodge structure of Calabi-Yau threefolds*, Publication de la scuola Normale superiore di Pisa, 1998.
- [**Courspe02**] *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe* , Cours spécialisés 10, SMF 2002. Traduction *Hodge Theory and complex algebraic geometry I and II*, Cambridge University Press 2002-3.
- [**Curdev**] On some problems of Kobayashi and Lang ; algebraic approaches, Current Developments in Mathematics 2003, no. 1 (2003), 53-125.
- [**ECM04**] Recent progresses in Kähler and complex algebraic geometry, in *European Congress of Mathematics*, Laptev, A. (ed.) Stockholm, Sweden, June 27–July 2, 2004. Zürich : European Mathematical Society (2005).
- [**Takagi07**] Some aspects of the Hodge conjecture, Notes for the Takagi lectures, Kyoto, Jpn. J. Math. 2 (2007), no. 2, 261–296.
- [**Bour07**] Géométrie des espaces de modules de courbes et de surfaces K3, d’après Gritsenko-Hulek-Sankaran, Farkas-Popa, Mukai, Verra, exposé au séminaire Bourbaki, juin 2007.
- [**Riem08**] Algebraic geometry versus Kähler geometry, Milan J. Math. Vol. 78 (2010) 85-116.
- [**Moduli13**] Hodge loci, in Handbook of moduli (Eds G. Farkas and I. Morrison), Advanced Lectures in Mathematics 25, Volume III, International Press, 507-546.
- [**ICM10**] On the cohomology of algebraic varieties, Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Hyderabad, India, 2010), Vol. I, 476-503.
- [**Bour11**] (Exposé au séminaire Bourbaki) Sections rationnelles de fibrations sur les surfaces et conjecture de Serre (d’après de Jong, He et Starr), Séminaire BOURBAKI, 63ème année, 2010-2011, no 1038.
- [**PUP14**] *Chow rings, decomposition of the diagonal and the topology of families*, Annals of Math Studies, Study 187, Princeton University Press 2014.