Wolf Prize in Mathematics, Vol. 2 (pp. 703–754)
eds. S. S. Chern and F. Hirzebruch

Note concerning **Jacques Tits**

Presentation

This Note consists of two parts.

Part I is based on an opuscule *Titres et travaux scientifiques* written in 1972 and divided into three sections modified as follows:

Sec. I.1 — a brief curriculum vitae which has been updated in year 2000;

Sec. I.2 — a description of the contents of the papers written until 1972; it is unchanged except for minor corrections;

Sec. I.3 — a list of publications which has been completed in March 2000.

Part II is the reproduction *ne varietur* of mimeographed notes entitled *Groupes et géométries de Coxeter* dated 1961 (Ref. 43 of Sec. I.3), which never appeared in print. This is the first paper ever written on *arbitrary* Coxeter groups (the terminology was coined there); it played a rather important, though somewhat hidden role in the early history of those groups. Indeed the most commonly used reference concerning them is Chap. 4 of Bourbaki, *Groupes et Algèbres de Lie*, and the mimeographed notes in question were precisely written to serve Bourbaki's work on that volume. But while Bourbaki's book, and in particular its "Note historique", fully acknowledges Tits' contributions to the subject, it does not explicitly mention the preprint reproduced here, which is the original source for those contributions.

2. Problème de Helmholtz-Lie
Espaces homogènes et isotropes
Le principe de relativité en relativité générale

On appelle problème de Helmholtz-Lie le problème de la caractérisation commune des géométries euclidiennes et «non-euclidiennes» par des propriétés de «libre mobilité» de leurs groupes de mouvements. Précisant des idées de Helmholtz, Lie avait étudié ce problème à l'aide de sa théorie des groupes continus de transformations. Les résultats de Lie étaient locaux et analytiques. Les reprenant d'un point de vue global et topologique, A. Kolmogorov proposait en 1930 l'axiomatique suivante. Soient E un espace topologique localement compact, connexe, métrisable et G un groupe transitif d'homéomorphismes de E tel que E possède une structure uniforme invariante par G. Si $p_1, \ldots, p_m$ sont des points de E, $G(p_1, \ldots, p_m)$ désigne l'intersection de leurs stabilisateurs dans G. Pour $n \in \mathrm{N}^*$, énonçons l'axiome

(M_n) Quels que soient les points $p_1, \ldots, p_n \in E$, de deux orbites distinctes de $G(p_1, \ldots p_n)$ dans $F = G(p_1, \ldots, p_{n-1}) \cdot p_n$, l'une sépare l'autre de p_n sur F.

A. Kolmogorov affirme que si (M_n) est satisfait pour tout n, l'espace E possède une métrique euclidienne ou non-euclidienne telle que G soit le groupe Isom E de toutes les isométries. Les paires (E, G) telles que G soit complet, en un sens évident, et satisfasse au seul axiome (M_1) sont déterminées dans [27], IV. E. L'examen de la liste montre que (M_1) et (M_2) suffisent à entraîner la conclusion de Kolmogorov, à ceci près que G peut n'être qu'un sous-groupe d'Isom E (en fait, à une exception près qui ne satisfait déjà pas à (M_3), le complété de G est toujours soit Isom E soit sa composante neutre). Connaissant les paires (E, G) qui satisfont à (M_1), on en déduit aussitôt les espaces métriques localement compacts connexes tels que Isom E soit transitif sur les ensembles de couples de points à distance donnée: ce sont les espace euclidiens, les sphères et les espaces elliptiques et hyperboliques réels, complexes, quaternioniens et «octaviens», munis d'une distance fonction de la distance usuelle. Des résultats partiels dans cette direction avaient été obtenus par H. C. Wang.

Lorsqu'on suppose que E est une variété différentiable et que G est un groupe de Lie opérant différentiablement sur E (cas auquel on se ramène en fin de compte en utilisant la structure des groupes localement compacts), le problème dont il vient d'être question est un cas particulier du suivant, également résolu dans [27], IV. D: déterminer les paires (E, G) telles que G soit transitif sur l'ensemble des éléments de contact (point et direction) de E, c'est-à-dire sur le fibré en espaces projectifs «quotient» du fibré tangent.

Les méthodes utilisées pour résoudre ces questions, méthodes basées sur la classification des groupes de Lie simples, sont susceptibles de nombreuses autres applications. Il m'a paru intéressant d'étudier en détail le problème suivant. Soit E un univers de la relativité générale, c'est-à-dire une variété connexe de dimension 4 munie d'une forme différentielle quadratique ds^2 de signature $+ - - -$. L'ensemble D des éléments de contact de E se décompose en trois parties D_+, D_0, D_- formées respectivement des éléments de temps ($ds^2 > 0$), de lumière ($ds^2 = 0$) et d'espace ($ds^2 < 0$). Disons que E est t-isotrope (resp. l-isotrope; e-isotrope) si le groupe de ses isométries est transitif sur D_+ (resp. D_0; D_-). Les univers l-isotropes et e-isotropes sont énumérés dans [35] et le problème analogue pour les univers conformes, c'est-à-dire munis non plus d'une métrique mais seulement d'un champ de cônes de lumière y est aussi résolu. Le cas de la t-isotropie est le plus intéressant, car celle-ci est en quelque sorte un principe de relativité restreinte «ponctuel»; il s'agit donc de déterminer tous les univers de la relativité générale qui satisfont ponctuellement au principe de relativité restreinte. Mais ce cas est aussi plus difficile parce que, contrairement à la l-isotropie et à la e-isotropie, la t-isotropie n'implique pas la semi-simplicité du stabilisateur d'un point; cela m'a conduit à étendre à certains groupes non semi-simples la technique des systèmes de racines de W. Killing et E. Cartan. J'ai ainsi pu montrer que tout univers t-isotrope est à courbure constante. La liste des solutions globales, trop longue pour être reproduite ici, fait apparaître des formes d'univers intéressantes au point de vue cosmogonique. D'autre part, la méthode s'applique encore lorsqu'on munit l'univers de structures additionnelles, ce qui met en évidence par exemple le fait que, dans un univers à courbure constante négative, il existe des faisceaux lumineux (systèmes de rayons lumineux fibrant l'espace) tels qu'en distinguant l'un d'eux, on ne détruit pas la t-isotropie.

3. Variétés complexes compactes homogènes

Toute variété complexe compacte homogène E possède une et une seule fibration à fibre F parallélisable et dont la base est une variété projective rationnelle homogène. C'est le résultat principal de [47] qui donne aussi une construction effective des variétés E pour lesquelles F est un tore. Deux applications immédiates sont la classification des variétés complexes compactes homogènes simplement connexes, que H. C. Wang avait obtenu par d'autres méthodes, et celle des variétés complexes compactes homogènes non parallélisables de dimension inférieure à 3: si elle n'est pas produit de deux variétés homogènes de dimensions plus petites, une telle variété est un espace projectif, une quadrique de dimension 3, la variété des drapeaux d'un plan projectif, une variété de Hopf, une variété de Calabi-Eckmann ou une variété fibrée en tores à deux dimensions au-dessus d'une droite projective.

4. Etude d'espaces homogènes

Des principes généraux pour l'analyse géométrique d'un groupe de transformations (G, E) «plus que transitif» sont esquissés au chapitre VI de [10] et au chapitre III de [A]. Retenons-en deux notions: un *axe* de (G, E) est l'ensemble des points fixes d'un sous-groupe de G; les *orbites* de (G, E) sont les orbites des fixateurs (centralisateurs) des axes.

Même si G possède une infinité de sous-groupes non conjugués, il arrive souvent qu'il n'ait qu'un petit nombre de classes de conjugaison d'axes et que la structure formée par les axes et les orbites résume bien les propriétés géométriques essentielles de E. A titre d'exemples, [A] donne la description du système des axes et orbites des espaces intervenant dans les théorèmes de classification de [27], IV (voir les §§ 1 et 2 ci-dessus).

Les plans projectifs sur les algèbres d'octaves et certains espaces dérivés de ceux-là font l'objet de [15, 16, 28] et de plusieurs sections de [82]; d'autres descriptions d'espaces homogènes se trouvent dans divers articles, notamment dans ceux déjà cités aux §§ 1 et 2 ci-dessus. Outre l'étude des groupes d'automorphismes, des involutions, éventuellement des polarités, etc., une méthode souvent mise en œuvre est la considération de structures induites sur certains sous-espaces et l'expression intrinsèque des relation entre deux sous-espaces. Un exemple fera mieux comprendre ce que cela signifie: les droites du plan projectif P sur une algèbre d'octaves à division sont des espaces conformes orientés à 8 dimensions; par dualité, il en est de même du pinceau des droites contenant un point p, et la bijection d'intersection de ce pinceau sur une droite ne contenant pas p est une application conforme renversant l'orientation; si D et D' sont deux droites distinctes, considérées comme espaces conformes, leur inclusion à P induit une relation de *trialité* entre leurs espaces tangents au point $D \cap D'$, qui sont des espaces euclidiens à 8 dimensions (cf. [82], 9. 11).

Les isomorphismes exceptionnels entre groupes de Lie simples de petits rangs, y compris un isomorphisme entre deux formes réelles de D_4 qui ne semble pas avoir été remarqué par E. Cartan (cf. [27], p. 249), ont pour conséquences de nombreux isomorphismes entre espaces homogènes, énumérés dans [27], tableau VII. D'autres aspects du principe de trialité font l'objet des articles [32] et [33]: le premier montre comment les identités de Moufang dans les algèbres d'octaves sont liées à des propriétés géométriques des quadriques à 6 dimensions; le second est consacré à l'étude des «trialités», transformations d'ordre 3 qui sont au principe de trialité ce que les polarités (d'ordre 2) sont à la dualité.

5. *Le plan de Cremona*

Reprenant des idées de P. Libois et P. Defrise, j'ai étudié la géométrie birationnelle du plan sur un corps algébriquement clos, dans le but de lui donner des fondements géométriques «purs», invariants par le groupe de Cremona. L'axiomatique que j'ai donnée part d'un groupe ordonné F, dont les éléments positifs sont appelés *figures*, et d'une partie P de l'ensemble F^+ des figures, dont les éléments sont les *points*. Ce sont là les seuls éléments primitifs de l'axiomatique: le groupe des automorphismes de F conservant F^+ et P est le groupe de Cremona étendu par le groupe des automorphismes du corps de base. La relation d'ordre dans F est la *contenance*, et l'*intersection* de deux figures, c'est-à-dire leur borne inférieure, est supposée exister toujours. Un point p peut être contenu dans un autre q: c'est la notion de «point infiniment voisin». Il peut aussi y être contenu plusieurs fois; cela correspond à la théorie des «points proches» d'Enriques, qui fournit une partie du système d'axiomes. Deux points p, q sont dits *transversaux* si leur intersection est un point infiniment voisin du premier ordre (c'est-à-dire maximal parmi les points proprement contenus) de chacun d'eux; alors $p + q$ est appelé une *demi-droite*. Ces demi-droites, qui correspondent aux génératrices des modèles quadriques du plan (courbes exceptionnelles c telles que $c \cdot c = 0$) ont des propriétés remarquables dont la mise en évidence est sans doute l'un des résultats intéressants de cette étude. Par exemple, le groupe des transformations de Cremona qui conservent une demi-droite d, un groupe «de dimension infinie» lié au groupe des transformations de Jonquières, est transitif sur les points simples de d, c'est-à-dire les points p tels que d contienne p mais non $2p$. En particulier, $d - p$ est alors un point transversal à p; cette propriété est prise comme axiome. Il y a aussi l'*axiome d'Euclide*: si $p \in P$ et si d est une demi-droite telle que $p \cap d = \varnothing$, alors il existe une et une seule demi-droite d' contenant p et telle que $d \cap d' = \varnothing$. Enfin, le théorème de Noether sur la décomposition des transformations de Cremona en produit de transformations quadratiques prend ici la forme d'un axiome de minimalité du modèle.

Ces recherches m'ont conduit à étudier aussi d'autres espaces liés au plan crémonien: les modèles homogènes du plan (surfaces rationelles normales), l'espace des points infiniment voisins d'ordre donné d'un point, l'espace des points simples d'une demi-droite, etc.

II. Groupes topologiques; groupes et algèbres de Lie

La théorie générale des groupes topologiques et la théorie de Lie, souvent utilisées dans les recherches résumées en I, n'ont été pour moi qu'un sujet d'étude marginal, sauf lorsqu'elles s'intégraient dans la théorie des groupes algébriques (cf. IV). Les contributions que j'y ai apportées à l'occasion de cours ou en réponse à des questions qui m'ont été posées sont passées en revue ci-après.

6. Revêtements

En théorie des groupes topologiques, on utilise habituellement les notions de connexité, de simple connexité, etc. héritées des espaces topologiques sous-jacents. On obtient cependant un exposé plus général et souvent plus simple en utilisant des notions adaptées à la catégorie où on travaille. Ainsi, un groupe topologique se comporte comme un groupe connexe, disons qu'il est GT-*connexe*, dès qu'il est engendré par tout voisinage de l'élément neutre ; de même, il est GT-*simplement connexe* si tout revêtement (au sens des groupes topologiques) est trivial, etc. C'est le point de vue adopté dans [B], où est aussi défini, pour tout groupe topologique G, un *homomorphisme universel* $\tilde{G} \to G$ qui coïncide avec le GT-revêtement universel lorsque celui-ci existe.

7. Application exponentielle *Intégration de représentations linéaires*

Soit G un groupe différentiel banachique dont le centre est simplement connexe et supposons l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G munie d'une norme $|\ |$ telle que $|[x, y]| \leqslant |x| \cdot |y|$; alors l'application exponentielle est injective sur la boule de rayon π de $\mathfrak{g}$ (résultat obtenu en collaboration avec M. Lazard: cf. [64]).

Soit ϱ une représentation linéaire d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de dimension finie dans une b-algèbre (algèbre «à bornés»); alors, l'ensemble des éléments h de $\mathfrak{g}$ tels que $\varrho(h)$ soit intégrable est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ (résultat obtenu en collaboration avec L. Waelbroeck: cf. [77]).

8. Automorphismes à déplacements bornés des groupes de Lie

Soit G un groupe de Lie connexe. L'article [55] décrit tous les automorphismes α de G tels que l'ensemble $\{\alpha(g)g^{-1}|g \in G\}$ soit relativement compact; cela détermine en particulier le sous-groupe $B(G)$ des éléments de G dont la classe de conjugaison est relativement compacte. On constate par exemple que si G est simple non compact, α est nécessairement l'identité (et $B(G) = \{e\}$). Il s'ensuit qu'une isométrie φ d'un espace symétrique irréductible non compact et non euclidien telle que la distance d'un point x et de son transformé $\varphi(x)$ soit bornée est l'identité. Ces résultats ont pour corollaires plusieurs théorèmes connus sur les groupes de Lie et les espaces symétriques.

9. Constantes de structure des algèbres de Lie semi-simples

La structure des algèbres de Lie semi-simples complexes a été élucidée par W. Killing et E. Cartan. Leurs travaux ne fournit cependant pas de présentation explicite de ces algèbres: si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie complexe semi-simple, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan, Φ le système de racines correspondant, et e_a un vecteur propre de $\mathfrak{h}$ correspondant à la racine a, on a, pour $a, b, a + b \in \Phi$,

$$[e_a, e_b] = c_{ab}e_{a+b} \text{ avec } c_{ab} \in \mathbf{C}^*,$$

mais la théorie de Killing et Cartan ne dit rien sur la valeur des constantes c_{ab}. Un pas décisif vers la solution de ce problème a été fait par C. Chevalley qui a montré que, pour un choix convenable des e_a, la valeur absolue de c_{ab} est le plus grand entier n tel que $a + b - nb$ soit une racine. Reste la question du signe des c_{ab}. Celle-ci est ramenée dans [67] à l'étude d'un certain groupe fini N, extension du groupe de Weyl de Φ par un 2-groupe abélien élémentaire. A toute racine a est associée canoniquement une paire M_a d'éléments de N; le choix d'une base de Chevalley revient au choix d'un élément dans chaque M_a et les signes des c_{ab} sont alors donnés par des formules dans N. Ce résultat permet de donner une démonstration élémentaire de l'existence de l'algèbre de Lie ayant un système de racines donné: les relations de commutation étant connues explicitement, il suffit en effet de vérifier l'identité de Jacobi.

10. Tables

Le syllabus [74] a été écrit à l'occasion d'un séminaire réunissant des mathématiciens et des physiciens, et est conçu en vue des applications. Son but est de permettre la détermination aisée de tous les groupes de Lie simples ou toutes les représentations linéaires de tels groupes satisfaisant à telle ou telle condition concernant la dimension, les formes invariantes, l'ordre du centre, etc.

III. Immeubles et BN-paires

Les *immeubles* (la terminologie est de N. Bourbaki), sorte de répliques combinatoires des groupes algébriques semi-simples isotropes, sont nés de la recherche d'un procédé systématique pour l'interprétation géométrique des groupes semi-simples et, plus particulièrement, des groupes exceptionnels. Ils se sont ensuite révélés un instrument utile pour l'étude des groupes algébriques (cf. §§ 12 à 14). D'autre part, la mise en évidence, par R. V. Moody et K. Teo, de BN-paires (donc, indirectement, d'immeubles: cf. § 13) dont le groupe de Weyl n'est pas fini ou de type affine laisse entrevoir des perspectives de développement qui vont au-delà de ces applications.

11. Géométrie des sous-groupes paraboliques

Les géométries étudiées dans [27], III, premiers exemples d'immeubles, sont des généralisations naturelles de la géométrie projective complexe à n dimensions. Celle-ci peut être construite à partir du groupe $G = PSL_{n+1}(\mathbf{C})$ de la façon suivante: soient B le groupe des matrices triangulaires et $P_1, \ldots, P_n$ les sous-groupes maximaux de G contenant B. Alors, les variétés linéaires de l'espace projectif à n dimensions sont les points des espaces G/P_i et deux variétés sont *incidentes*, c'est-à-dire que l'une d'elles contient l'autre, si les classes latérales qui les représentent ont une intersection non vide.

Pour décrire les généralisations en question, fixons d'abord une terminologie de base suggérée par l'exemple précédent. On considère des *géométries* Γ, constituées par une famille $(V_i)_{i \in I}$ d'ensembles et, pour toute paire d'indices $i, j \in I$, une relation entre V_i et V_j, la *relation d'incidence*. Le *rang* de Γ est par définition le cardinal de I. Si J est une partie de I, une famille $(P_j)_{j \in J}$ de points $p_j \in V_j$ incidents deux à deux est appelée un *drapeau* de type J. Deux drapeaux, de types J et J', sont dits *incidents* s'ils forment ensemble un drapeau de type $J \cup J'$, et on appelle *ombre* d'un drapeau D sur un ensemble de drapeaux, l'ensemble des éléments de celui-ci qui sont incidents à D; ainsi, les variétés linéaires de l'espace projectif sont les ombres des drapeaux sur l'ensemble des points de l'espace. Une géométrie Γ peut aussi être vue comme un complexe simplicial dont les sommets sont les points des V_i et dont les simplexes sont les drapeaux. Etant donnés un groupe G et une famille $(P_i)_{i \in I}$ de sous-groupes, on en déduit une géométrie $\Gamma(G; P_i)$ formée des ensembles $V_i = G/P_i$ et des relations d'incidence $gP_i \cap g'P_j \neq \varnothing$.

Prenons maintenant pour G un groupe de Lie complexe semi-simple et pour P_i les sous-groupes maximaux de G contenant un sous-groupe résoluble connexe maximal (sous-groupe de Borel) B de G. Comme les sous-groupes de Borel sont tous conjugués, nous associons ainsi à tout groupe G du type considéré une géométrie $\Gamma = \Gamma(G)$. L'étude de ces géométries fait l'objet de [27], III, et [23, 28, 29]. Elles ont beaucoup de points communs avec les géométries projectives: pour ne donner qu'un exemple, l'ensemble des ombres de drapeaux sur la variété des drapeaux d'un type donné est fermé pour l'intersection. Mais l'observation essentielle de [27], qui rend les $\Gamma(G)$ utiles pour l'interprétation géométrique des groupes semi-simples, est le fait que les $\Gamma(G)$ correspondant aux divers groupes G sont liées entre elles et que la nature de ces liens se lit commodément sur les graphes de Dynkin des groupes. Plus précisément, les P_i, donc les V_i, sont canoniquement indexés par les sommets du graphe de Dynkin Δ de G; cela étant:

(R) si $p \in V_i$, la sous-géométrie de Γ formée par les ombres de p sur les V_j ($j \neq i$) est la géométrie $\Gamma(H)$ d'un groupe H dont le graphe de Dynkin s'obtient en retirant de Δ le sommet i et les traits qui y aboutissent.

Dans le cas des groupes classiques, cela met en relation des propriétés géométriques connues (par exemple, des propriétés des variétés linéaires d'hyperquadriques) avec les graphes de Dynkin de ces groupes. Mais la propriété (R) est surtout, comme on le verra plus loin, un outil de récurrence efficace pour l'étude des $\Gamma(G)$; des applications aux groupes de type E sont données dans [28, 29].

Un résultat de [27], apparenté au «théorème de Borel-Weil», met aussi en relation la géométrie $\Gamma(G)$ avec les représentations projectives de G: pour toute représentation projective irréductible, il existe une et une seule partie J de I et un seul plongement G-covariant de la variété des drapeaux de type J de $\Gamma(G)$ dans l'espace de la représentation. Dans cet ordre d'idées, notons que l'importance des $\Gamma(G)$ s'est trouvée confirmée par un résultat de H. C. Wang caractérisant leurs variétés de drapeaux comme les seules variétés Kählériennes compactes simplement connexes homogènes, et surtout par les travaux de A. Borel et C. Chevalley qui font jouer à ces variétés un rôle primordial dans la généralisation de la théorie de Killing et Cartan à un corps algébriquement clos quelconque.

Dans [30, 39, 40], la théorie des $\Gamma(G)$ est généralisée d'abord aux groupes de Chevalley puis aux groupes algébriques semi-simples isotropes sur un corps k quelconque: G est à présent le groupe des points rationnels sur k d'un tel groupe algébrique et les P_i sont les groupes de points rationnels des k-sous-groupes paraboliques maximaux contenant un k-sous-groupe parabolique minimal donné. Ajoutons que la géométrie $\Gamma(G)$ peut aussi être définie pour un groupe classique G sur un corps gauche quelconque; si par exemple G est le groupe unitaire d'une forme hermitienne non-dégénérée, dont il faut seulement supposer que son indice de Witt n est fini, on prend pour P_i les sous-groupes maximaux contenant le stabilisateur d'un drapeau formé d'espaces totalement isotropes de dimensions $1, 2, \ldots, n$ (cf. per ex. [82]).

12. Géométries polyédriques Immeubles

Les articles [30] et [40], déjà cités, contiennent l'esquisse d'une théorie axiomatique des $\Gamma(G)$ basée sur les considérations suivantes.

Soit $m \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$, $m \geqslant 2$. Une géométrie de rang 2 (V_1, V_2) est appelée un *m-gône généralisé* ([33], appendice) si, étant donnés deux éléments x, y de $V_1 \cup V_2$; il existe au moins une suite $x = x_0, x_1, \ldots, x_k = y$ de longueur $k \leqslant 2m$ telle que deux éléments consécutifs quelconques de la suite soient incidents, et au plus une suite de longueur $k \leqslant 2m - 1$ avec cette propriété. Une *matrice de Coxeter* est une matrice carrée $M = (m_{ij})_{i,j \in I}$ telle que $m_{ij} \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}, m_{ii} = 1$ et $m_{ij} \geqslant 2$ si $i \neq j$; on la représente par un *graphe* $\Delta = \Delta(M)$ dont les sommets sont les éléments de I, les sommets i et j étant reliés par un trait de multiplicité $m_{ij} - 2$. Il s'avère que toutes les géométries $\Gamma(G)$ de rang 2 sont des m-gones généralisés, et que si G est un groupe de Chevalley de type $A_1 \times A_1$, A_2, B_2 ou G_2, on a $m = 2, 3, 4$ ou 6 respectivement. Cela suggère d'associer à tout graphe $\Delta = \Delta(M)$ une classe $\mathscr{G}(\Delta)$ de géométries, les *géométries polyédriques de type* Δ, dont les ensembles constitutifs V_i sont indexés par I et qui sont définies comme suit: si $I = \{1, 2\}$ et $m_{12} = m$, la classe $\mathscr{G}(\Delta)$ est constituée par les m-gônes généralisés; les autres classes $\mathscr{G}(\Delta)$ s'en déduisent par un axiome d'induction sur le rang, calqué sur la propriété (R) du n° 11, et une condition de «simple connexité», plus technique et qui n'a qu'un rôle secondaire. L'intérêt de cette définition réside dans le fait que, malgré la généralité apparente des axiomes, les géométries d'une même classe $\mathscr{G}(\Delta)$ sont très semblables entre elles d'un point de vue combinatoire. Ainsi, pour $\Delta = A_n$, $\mathscr{G}(\Delta)$ est la classe des géométries projectives à n dimensions. Plus généralement, disons qu'un élément d'une géométrie est *déterminé* par deux drapeaux a, b s'il peut être caractérisé au moyen d'assertions où n'interviennent que a, b, la relation d'incidence et les types des éléments variables quantifiés (ex.: deux points déterminent la droite qui les joint); alors, dans les géométries polyédriques, l'ensemble des éléments déterminés par deux drapeaux est toujours fini, et les configurations possibles de ces ensembles sont les mêmes pour toutes les géométries appartenant à une même classe $\mathscr{G}(\Delta)$. L'exemple $\Delta = F_4$, important pour les groupes exceptionnels, est traité dans [40] et, avec plus de détails au § 73 de H. Freudenthal, Linear Lie groups.

De même que le polygone ordinaire à n côtés est le plus simple des n-gones généralisés, de même chaque classe $\mathscr{G}(\Delta)$ contient une géométrie particulièrement simple, à savoir le «polyèdre régulier» $A(\Delta) = \Gamma(W; W_i)$, où $W = W(\Delta)$ est le groupe de Coxeter correspondant à la matrice M et W_i le sous-groupe engendré par les générateurs r_j de W avec $j \neq i$ (cf. [50] et le § 16 ci-desosus). Notons en passant que cette observation, et le fait que la «droite projective» $A(A_1)$ est un ensemble à deux points, font voir le groupe de Weyl d'un graphe de Dynkin Δ comme le groupe de Chevalley de type Δ sur le «corps» à un élément [30]. Non seulement $A(\Delta)$ est un modèle pour la classe $\mathscr{G}(\Delta)$, mais chaque membre Γ de cette classe contient $A(\Delta)$ à de nombreux exemplaires, et c'est la raison pour laquelle Γ hérite des principales propriétés combinatoires de $A(\Delta)$. Cette constatation heuristique trouve son expression précise dans l'axiomatique des immeubles. Pour formuler celle-ci, nous passerons à présent du langage des géométries à celui, mieux adapté, des complexes de chambres (cf. [59, 82]).

Un *complexe de chambres* de *rang* n est un complexe simplicial de dimension $n-1$, dont tous les simplexes maximaux, appelés *chambres*, sont de dimension $n-1$, et tel que deux chambres quelconques peuvent être jointes par une *galerie*, c'est-à-dire une suite finie de chambres telles que deux éléments consécutifs de la suite aient une *cloison* (face de dimension $n-2$) commune. Les *morphismes* de tels complexes sont supposés appliquer les chambres sur des chambres. Soit A un complexe de chambres tel que toute cloison appartienne à deux chambres exactement. Un complexe Γ est appelé un *préimmeuble* (weak building) de type A s'il possède une famille $\mathscr{A}$ de sous-complexes isomorphes à A, appelés *appartements*, tels que deux simplexes quelconques a, b, de Γ soient contenus dans un appartement et que si A_1 et A_2 sont deux appartements contenant a et b, il existe un isomorphisme de A_1 sur A_2 qui fixe chaque sommet de a et de b. Si de plus toute cloison appartient à trois chambres au moins, Γ est un *immeuble*. Dans ce cas, A est nécessairement le complexe $A(\Delta)$ d'un graphe [59]. Les préimmeubles de type $A(\Delta)$ ne sont autres que les géométries polyédriques de type Δ.

Un théorème facile mais fondamental est le *théorème de rétraction*: si A_0 est un appartement et $C < A_0$ une chambre du préimmeuble Γ, il existe une rétraction $\varrho: \Gamma \to A_0$ telle que $\varrho^{-1}(C) = C$ (cf. [50, 59, 82]). Des corollaires immédiats de ce théorème montrent que les propriétés combinatoires de A du type décrit plus haut (configurations des éléments déterminés par deux drapeaux) se retrouvent dans Γ.

Cela est d'ailleurs vrai aussi pour d'autres types de propriétés. Supposons par exemple que $A = A(\Delta)$ soit un complexe fini. Alors, A, ou plutôt le complexe géométrique qu'on en déduit en remplaçant les simplexes «abstraits» par des simplexes affines, possède un métrique naturelle qui en fait une sphère euclidienne. Cette métrique et la notion de points diamétralement opposés se transposent aussitôt à Γ, et il résulte du théorème de rétraction que deux points p, q qui ne sont pas diamétralement opposés sont joints par une géodésique unique contenue dans tout appartement contenant p et q. On en déduit que le complémentaire de l'ensemble des points diamétralement opposés à p est contractile, puis que Γ a le type d'homotopie d'un bouquet de sphères. L. Solomon a remarqué que ce résultat fournit une construction simple de la représentation de Steinberg d'un groupe fini G muni d'une BN-paire (cf. § 13); il suffit de considérer l'opération naturelle de G sur $\mathrm{H}_{n-1}(\Gamma[G])$, où $n - 1$ est la dimension de $\Gamma(G)$. D'autres applications des immeubles aux groupes algébriques sont données par D. Mumford au chapitre 2 de sa «Geometric invariant theory».

Un théorème bien connu de géométrie projective met en correspondance bijective les espaces projectifs de dimension donnée $n \geqslant 3$ et les corps. Sa généralisation aux immeubles est l'un des objectifs de [82]. On considère seulement des graphes Δ qui sont graphes de Dynkin de systèmes de racines irréductibles de rang $\geqslant 3$. Alors, les seuls immeubles des types $A(\Delta)$ correspondants sont essentiellement les immeubles $\Gamma(G)$ associés aux groupes classiques et aux groupes algébriques simples de rang relatif $\geqslant 3$. Ainsi la classification des immeubles redonne en particulier celle des groupes algébriques en question. Deux sous-produits du résultat, qui n'apparaissent pas dans l'énoncé précédent, méritent d'être mentionnés. D'une part, l'acception du terme «groupe classique» doit être étendue de façon à inclure les groupes orthogonaux correspondant à une notion nouvelle de forme quadratique sur les corps gauches à involution (voir aussi le § 20); d'autre part, la classification des immeubles de type F_4 met en évidence des groupes simples nouveaux, liés à des phénomènes d'inséparabilité et à l'existence d'isogénies exceptionnelles. Quant aux immeubles de rang 2, qui ont pour cas particuliers les plans projectifs, ce sont des objets trop généraux pour qu'il y ait un sens à vouloir les classer; tout au plus peut-on envisager la détermination de tous les immeubles finis, mais elle semble hors de portée à l'heure actuelle. On n'a donc ici que des exemples, et aussi un théorème négatif, dû à W. Feit et G. Higman: si A est un polygone à $2m$ côtés, il n'existe pas d'immeuble fini de type A pour $m \neq 2, 3, 4, 6, 8$.

Les notes [82] contiennent aussi la détermination de tous les automorphismes de l'immeuble $\Gamma(G)$ lorsque G est un groupe classique ou le groupe des points rationnels d'un groupe algébrique simple de rang relatif $\geqslant 2$. En gros, un tel automorphisme est toujours semi-linéaire ou semi-algébrique, c'est-à-dire composé d'un automorphisme du corps de base et d'une transformation linéaire ou d'un morphisme. C'est la généralisation aux immeubles du «théorème fondamental de la géométrie projective», et aussi des résultats bien connus de W. L. Chow, J. Dieudonné et L. K. Hua sur les variétés d'espaces totalement isotropes. Si l'on prend pour G un groupe exceptionnel, cela montre aussi que la théorie des immeubles a atteint son but primitif: l'interprétation géométrique de ces groupes.

13. BN-paires

Nous avons vu qu'on peut associer un immeuble $\Gamma(G)$ à certains groupes G. L'axiomatisation de ces liens conduit à la notion de BN-paire (cf. [48, 56, 82]). Deux sous-groupes B, N d'un groupe G forment une *BN-paire* (ou, selon N. Bourbaki, un «système de Tits») s'il existe un immeuble Γ et une opération de G sur Γ transitive sur les couples (A, C) formés d'un appartement A et d'une chambre C de A, et telle que B soit le stabilisateur d'une chambre C_0 et N le stabilisateur d'un appartement contenant C_0. Cela se traduit, en termes de groupes, par les conditions suivantes: B et N engendrent G, $H = B \cap N$ est distingué dans N et le groupe $W = N/H$, appelé *groupe de Weyl*, possède un système générateur R tel que, pour tout $r \in R$, et tout $w \in W$, on ait $rBw \subset BwB \cup BrwB$ et $rBr \neq B$.

L'intérêt de cette définition est de résumer en peu d'axiomes plusieurs propriétés importantes des groupes algébriques simples. Ainsi, les assertions suivantes en sont des conséquences faciles (cf. [48, 59]): on a $BWB = G$, et l'égalité $BwB = Bw'B$ avec $w, w' \in W$ entraîne $w = w'$ (décomposition de Bruhat); les sous-groupes de G contenant B sont en correspondance canonique bijective avec les parties de R, ils sont deux à deux non conjugués et chacun d'eux est son propre normalisateur; W est un groupe de Coxeter (résultat obtenu indépendamment par H. Matsumoto). D'autre part, un groupe avec BN-paire a tendance à avoir peu de sous-groupes distingués; c'est en gros ce qu'expriment les résultats du § 2 de [56], établis en vue d'applications aux groupes algébriques et aux groupes finis (cf. §§ 19 et 22).

Grâce au résultat mentionné plus haut (§ 12) sur la classification des immeubles de rang $\geqslant 3$, on connaît tous les groupes finis avec BN-paires de type irréductible et de rang $\geqslant 3$ [82]. Des résultats partiels sur les BN-paires de rangs 1 et 2 ont été obtenus par P. Fong, C. Hering, W. Kantor et G. Seitz.

Dans les dernières années, la notion de BN-paire a joué un rôle important en théorie des groupes finis simples, notamment dans les travaux de C. Curtis et son école sur les représentation linéaires, et dans les recherches sur la caractérisation de groupes simples par des propriétés de centralisateurs d'involutions, de sous-groupes de Sylow, etc.: on peut parfois ramener des problèmes de ce type aux théorèmes de classification dont il vient d'être question en montrant que les hypothèses faites sur un groupe imposent à celui-ci de posséder une BN-paire.

14. Immeubles et BN-paires de type affine

Le champ d'application des BN-paires, introduites d'abord à l'occasion de l'étude des sous-groupes paraboliques de groupes algébriques, s'est étendu lorsque N. Iwahori et H. Matsumoto ont montré que les groupes de Chevalley simplement connexes sur un corps local possèdent une seconde BN-paire, dont le groupe de Weyl est cette fois un groupe affine engendré par des réflexions. Par descente galoisienne à partir de leur résultat, F. Bruhat et moi [70, 71, 72] avons montré l'existence d'une telle BN-paire dans tout groupe semi-simple simplement connexe sur un corps local à corps résiduel parfait (voir aussi le § 18). Dans la première partie de [88], nous étudions les BN-paires *de type affine* (c'est-à-dire dont le groupe de Weyl est un groupe affine engendré par des réflexions) et leurs immeubles. Comme dans le cas d'un groupe de Weyl fini (cf. § 13), un tel immeuble $\mathscr{I}$ possède une distance qui en fait un espace métrique complet. Un résultat important, utilisé notamment pour la descente galoisienne susmentionnée, est le *théorème de point fixe*: tout groupe borné d'isométries de $\mathscr{I}$ possède un point fixe. Ce théorème, et l'usage qu'on peut en faire pour la détermination des sous-groupes compacts maximaux des groupes $\mathfrak{p}$-adiques, suggèrent de voir l'immeuble d'un groupe simple $\mathfrak{p}$-adique comme l'analogue naturel de l'espace symétrique d'un groupe simple réel. Ce point de vue a trouvé confirmation dans les travaux de A. Borel, H. Garland et J.-P. Serre sur la cohomologie des groupes arithmétiques, et dans des recherches en cours concernant l'analyse harmonique sur les immeubles et, en particulier, sur les arbres (travaux de P. Cartier). Dans cet ordre d'idées, citons encore une application due à A. Borel: celui-ci définit la *représentation spéciale* d'un groupe simple $\mathfrak{p}$-adique en transposant à l'immeuble affine du groupe la construction de L. Solomon de la représentation de Steinberg (cf. § 13).

Dans [88], nous associons aussi un «immeuble» $\mathscr{I}$ à toute donnée radicielle valuée (cf. § 18). Si la valuation n'est pas discrète, $\mathscr{I}$ n'est plus un complexe simplicial. On peut s'en faire une idée en considérant le cas d'un groupe algébrique simple sur la clôture algébrique K de $\mathbf{Q}_p$. Le corps K étant limite inductive de corps locaux «de plus en plus ramifiés», l'immeuble du groupe est limite inductive d'immeubles ordinaires de plus en plus ramifiés, c'est-à-dire dont les chambres sont de plus en plus petites. Un tel immeuble possède encore des *chambres* et des *facettes*, qui ne sont plus des ensembles mais des filtres. Comme pour les immeubles ordinaires, deux facettes appartiennent toujours à un appartement, mais il s'agit cette fois d'un théorème difficile et non plus d'un axiome.

15. Arbres

Les arbres dont tout sommet est d'ordre 3 au moins sont les immeubles de type affine de rang 2, d'où leur place ici. Soient A un arbre quelconque, G le groupe de ses automorphismes et G^+ le sous-groupe engendré par les stabilisateurs des sommets d'ordre $\geqslant 3$. Alors G^+ est un groupe simple et G/G^+ est produit libre d'un certain nombre n_∞ de groupes isomorphes à $\mathbf{Z}$ et d'un certain nombre n_2 de groupes d'ordre 2. C'est le théorème principal de [81], qui contient aussi un procédé de construction d'un arbre A à partir d'un ensemble I et d'une matrice irréductible $M = (m_{ij})_{i,j \in I}$ où les m_{ij} sont des cardinaux soumis à la seule condition que $m_{ij} = 0$ implique $m_{ji} = 0$. L'intérêt de cette construction réside dans le fait que certaines propriétés de G, et notamment les nombres n_∞ et n_2, se lisent facilement sur la matrice M. On montre ainsi que n_∞ et n_2 peuvent prendre n'importe quelle valeur. Lorsque les sommets de A sont d'ordre fini, G et G^+ sont des groupes localement compacts dénombrables à l'infini, et il résulte de la construction en question qu'on trouve, par application du théorème principal, une infinité non dénombrable de groupes localement compacts simples non isomorphes.

16. Groupes de Coxeter

Soient I, M et Δ comme au § 13 et $W = W(M)$ le groupe défini par des générateurs r_i ($i \in I$) et les relations $(r_i r_j)^{m_{ij}} = 1$ pour $m_{ij} \neq \infty$. H. S. M. Coxeter a déterminé toutes les matrices M telles que $W(M)$ soit fini et il a étudié ces groupes finis et leurs représentations comme groupes engendrés par des réflexions; par la suite, ses résultats ont été simplifiés et précisés par E. Witt.

Le développement de la théorie des immeubles m'a amené à étudier les groupes $W(M)$, pour M quelconque, que j'ai appelés *groupes de Coxeter*. Il apparaît [43] qu'une bonne partie des résultats de Coxeter et de Witt restent valables pour tout groupe de Coxeter W. En particulier, W possède une représentation linéaire ϱ comme groupe engendré par des réflexions *affines*; l'injectivité de cette représentation est le résultat principal de [43]. L'image $\varrho(W)$ a un domaine fondamental C qui est un cône simplicial, mais à la différence du cas fini, la réunion des «chambres», $\varrho(W)$. C, n'est pas nécessairement l'espace tout entier mais seulement un cône convexe. Le complexe obtenu en coupant le système des chambres par une sphère n'est autre que le complexe $A(\Delta)$ du § 12. Les méthodes de démonstration topologiques utilisées par Coxeter et Witt ne s'étendent pas au cas général; elles doivent être remplacées par des méthodes combinatoires basées sur la considération des galeries (cf. § 12) et d'une propriété de *pliage* qui caractérise d'ailleurs les groupes de Coxeter: soit A un complexe de chambres; pour que A soit le complexe $A(\Delta)$ associé à un groupe de Coxeter, il faut et il suffit que pour toute chambre C et toute cloison D de C, il existe une et une seule autre chambre C' ayant aussi D comme cloison, et un endomorphisme idempotent π de A fixant les sommets de D, appliquant C sur C' et tel que toute chambre soit l'image par π de zéro ou deux chambres (cf. [82]).

Le normalisateur N d'un tore maximal T d'un groupe algébrique semi-simple est une extension du groupe de Weyl W par T. L'opération de W sur T est bien connue mais, pour en déduire N, il faut encore déterminer la classe de l'extension (élément de $\mathrm{H}^2(W, T)$). Dans [66], l'étude de cette extension est ramenée à celle d'une autre extension X de W, définie «universellement» pour tout groupe de Coxeter. Pour M comme ci-dessus, soient $T(M)$ le groupe défini par des générateurs r_i ($i \in I$) et les relations $r_i r_j r_i \ldots = r_j r_i r_j \ldots$, où chaque membre a m_{ij} facteurs, H le noyau de l'homomorphisme évident $T(M) \to W(M)$ et H' le groupe dérivé de H. Alors le groupe abélien H/H' possède un système générateur libre en correspondance bijective canonique avec l'ensemble des réflexions de $W(M)$, et X est le groupe $T(M)/H'$, extension de $W(M)$ par le groupe abélien libre H/H'. Notons que le groupe fini intervenant dans l'étude des signes des c_{ab} (cf. § 9) est un quotient de X. Les groupes $T(M)$, qui généralisent les groupes de tresses d'Artin, ont suscité beaucoup d'intérêt ces derniers temps en raison des applications qui en ont été faites à la géométrie algébrique et à la topologie (travaux de V. I. Arnol'd, E. Brieskorn et P. Deligne; ce dernier étudie les $T(M)$ par des méthodes inspirées de la théorie des immeubles).

L'article [78] donne une solution du problème des mots pour les groupes de Coxeter et esquisse, en guise d'application, une nouvelle démonstration de la classification des groupes de Coxeter finis.

IV. Groupes algébriques

Comme on l'a vu, les immeubles ont leur origine et leurs principales applications dans la théorie des groupes algébriques. Mes recherches concernant ces groupes ont souvent été suggérées ou même nécessitées par les travaux géométriques résumés plus haut (III).

17. Structure
Représentations linéaires

Les théorèmes fondamentaux sur la structure des groupes algébriques linéaires connexes sur un corps algébriquement clos sont dus à A. Borel et C. Chevalley. Etudiant le cas d'un corps de base k quelconque, A. Borel et moi avons obtenu des analogues relatifs des principaux théorèmes absolus. Nous montrons par exemple que si G est un groupe algébrique linéaire sur k, les tores déployés sur k maximaux de G sont conjugués par des éléments de $G(k)$, que cela est aussi vrai pour les sous-groupes résolubles k-déployés maximaux et, si G est réductif, pour les k-sous-groupes paraboliques minimaux. Supposons que G soit connexe et ne possède pas de k-sous-groupe unipotent k-déployé distingué non trivial (par exemple, que G soit réductif), et soit T un tore déployé sur k maximal de G. Alors, l'ensemble Φ des poids non nuls de T dans G est un système de racines (non nécessairement réduit) dont le groupe de Weyl W est le quotient du normalisateur N de T par son centralisateur Z; de plus, $N = N(k) \cdot Z$, donc $W = N(k)/Z(k)$. A chaque racine a est associé un sous-groupe unipotent $U_{(a)}$ normalisé par T et si B désigne le groupe engendré par Z et par les $U_{(a)}$ correspondant aux racines a positives (sous-groupe k-parabolique minimal lorsque G est réductif), alors $B(k)$ et $N(k)$ forment une BN-paire dans $G(k)$, avec les conséquences que cela comporte (cf. § 13). Ces résultats, et d'autres, du même ordre, qu'il serait trop long de passer en revue ici, sont établis dans [61, 84, 89] pour un groupe G réductif ou résoluble. Les cas général ne se ramène pas à ceux-là par un simple «dévissage» parce que le radical unipotent de G n'est pas nécessairement défini sur k.

La théorie des représentations linéaires des groupes semi-simples complexes, due à E. Cartan et H. Weyl, a été étendue partiellement à un corps algébriquement clos quelconque par C. Chevalley; celui-ci montre qu'une représentation linéaire rationnelle irréductible d'un groupe semi-simple G est caractérisée par son poids dominant et que l'ensemble Λ des poids dominants possibles est «le même» que sur les complexes. Le § 12 de [61] et l'article [85] sont consacrés à la «relativisation» de ces résultats. Considérons par exemple le cas d'un groupe G de type intérieur sur un corps k. Il s'avère que pour tout $\lambda \in \Lambda$, la représentation de poids dominant λ peut être réalisée sur k comme représentation dans un groupe linéaire $GL_m(D)$ où $D = \beta(\lambda)$ est une algèbre à division bien déterminée. De plus, l'application β de Λ dans le groupe de Brauer de k est un homomorphisme de monoïdes s'annulant sur les poids qui sont combinaisons linéaires entières de racines, et est lié à un invariant cohomologique bien connu de G. Lorsque $k = \mathbf{R}$, on retrouve, sous une forme rendue plus compréhensible par la généralité du point de vue, les résultats de E. Cartan sur les représentations linéaires réelles des groupes de Lie simples réels.

Les notes de cours [C] contiennent quelques résultats nouveaux sur la structure des groupes commutatifs et résolubles. Citons par exemple: une démonstration élémentaire du fait que, sur un corps algébriquement clos, un groupe linéaire de dimension un est isomorphe au groupe additif ou au groupe multiplicatif; l'existence dans tout k-tore d'un point rationnel engendrant un sous-groupe dense, à condition que k ne soit pas extension algébrique d'un corps fini; diverses caractérisations des groupes unipotents «antidéployés» (wound).

La théorie des éléments unipotents réguliers des groupes semi-simples a été faite par R. Steinberg. E. Brieskorn, R. Steinberg et moi avons étudié en collaboration les éléments unipotents *sous-réguliers* d'un groupe simple G, c'est-à-dire les éléments dont le centralisateur a la dimension $\operatorname{rg} G + 2$ (pour les éléments réguliers, cette dimension est $\operatorname{rg} G$). Ces éléments sont tous conjugués et la variété des points fixes d'un tel élément dans G/B (B un sous-groupe de Borel) est formée de courbes rationnelles dont le «schéma d'intersections» se déduit immédiatement du graphe de Dynkin de G et est ce graphe lui-même lorsque toutes les racines de G ont même longueur (cf. la conférence de E. Brieskorn au Congrès International de Nice, 1970).

18. Groupes réductifs sur les corps locaux

Les groupes réductifs sur les corps valués complets font l'objet de recherches en cours depuis plusieurs années, en collaboration avec F. Bruhat. Notre point de départ a été le résultat d'Iwahori et Matsumoto déjà cité (§ 14). En gros, notre but est de faire la théorie de ces groupes vus comme des êtres (de dimension infinie) définis sur le corps résiduel. Sous cet angle, les résultats présentent une analogie frappante avec la théorie des groupes réductifs évoquée au § 17. Bornons-nous ici au cas d'un groupe simplement connexe sur un corps de base local à corps résiduel k parfait. Aux sous-groupes de Borel, sous-groupes résolubles connexes maximaux, correspondent ici les *sous-groupes d'Iwahori* qui sont prorésolubles connexes (pour une topologie à définir) maximaux; ils n'existent éventuellement qu'après extension de k, c'est-à-dire après extension non ramifiée du corps local, mais ils existent toujours sur k lui-même lorsque ce dernier est fini. Par analogie avec les sous-groupes paraboliques, définis comme contenant un sous-groupe de Borel, nous appelons *parahoriques* les sous-groupes contenant un sous-groupe d'Iwahori; ce sont aussi des groupes proalgébriques sur k, et les sous-groupes k-parahoriques minimaux sont tous conjugués. De plus, un tel sous-groupe forme avec le normalisateur d'un tore déployé maximal une BN-paire dont le groupe de Weyl n'est plus fini, mais est un groupe affine engendré par des réflexions: c'est la BN-paire dont il a été question au § 14. Aux tores, au système de racines (absolu ou relatif), au graphe de Dynkin, ... correspondent ici les *minitores*, un système de racines affines (infini), un graphe de Dynkin affine, ...

Les sous-groupes parahoriques sont le pivot de cette théorie. En premier lieu, les sous-groupes parahoriques maximaux s'avèrent être les sous-groupes bornés maximaux; ainsi est résolu, en particulier, le problème de la détermination des sous-groupes compacts maximaux des groupes semi-simples sur un corps localement compact non discret. En outre, les sous-groupes parahoriques qui sont, d'une part, proalgébriques sur k et, de l'autre, liés au groupe G par la BN-structure, sont le joint qui permet de relier la théorie des groupes algébriques sur k à la structure de G. C'est ainsi que, dans le cas d'un corps k fini, nous pouvons déduire le théorème de M. Kneser sur la nullité de H^1 du théorème analogue (théorème de Lang) pour les groupes algébriques sur un corps fini, et que la classification des groupes semi-simples sur les corps locaux localement compacts se ramène, comme dans le cas d'un corps fini, à la simple détermination des automorphismes des graphes de Dynkin.

Ces résultats sont annoncés dans les notes [70] à [73] (cf. aussi [75]). Les fondements «abstraits» de la théorie sont établis dans [88]. Nous y étudions les BN-paires de type affine (cf. § 14) et les données radicielles valuées. Si Φ est un système de racines, une *donnée radicielle* de type Φ dans un groupe est un système (U_a) de sous-groupes indexés par Φ, soumis à des axiomes calqués sur les principales propriétés de $U_{(a)}(k)$ d'un groupe algébrique réductif (cf. § 11). Une *valuation* d'une telle donnée est un système de filtrations $\varphi_a : U_a \to \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ satisfaisant à certaines conditions. Toute valuation discrète donne lieu à une BN-paire de type affine. Une partie des résultats mentionnés plus haut peut déjà s'établir sur cette base axiomatique. Par exemple, un groupe G avec BN-paire (B, N) de type affine irréductible possède une et une seule bornologie compatible avec la loi de groupe, telle que B soit borné et que G ne le soit pas; pour cette bornologie, tout sous-groupe borné maximal contient un conjugué de B. Dans le cas des valuations denses, on a un résultat analogue qui ne s'exprime d'ailleurs bien qu'en termes d'immeubles. Une partie importante de [88] est consacrée à l'étude d'une classe de sous-groupes, les groupes P_f, qui généralisent les sous-groupes parahoriques; dans le cas d'un groupe réductif défini sur un corps valué d'anneau d'entiers $\mathcal{O}$ et qui se déploie sur une extension non ramifiée de ce corps, les P_f sont les groupes de points entiers pour certaines $\mathcal{O}$-structures qui peuvent être caractérisées par des propriétés de lisseté et de «bonne réduction».

19. Le groupe des points rationnels d'un groupe algébrique simple comme groupe « abstrait »

La théorie des groupes classiques, telle qu'elle est exposée par exemple dans le livre de J. Dieudonné, s'intéresse principalement à deux types de questions: structure (suites de composition et, en particulier, simplicité); automorphismes et isomorphismes. Dans les articles [56] et [92] (ce dernier écrit en collaboration avec A. Borel), les problèmes de simplicité et la recherche des automorphismes et des isomorphismes sont portés sur le plan des groupes algébriques; les théorèmes établis ont pour cas particuliers la plupart des résultats connus dans ces domaines, pour autant que les groupes considérés soient algébriques et *isotropes*, les groupes anisotropes nécessitant des méthodes différentes.

Soit G un groupe algébrique absolument presque simple défini sur un corps k. On note G^+ le sous-groupe de $G(k)$ engendré par les points rationnels des k-sous-groupes unipotents déployés de G. Le théorème principal de [56], conséquence de résultats généraux sur les BN-paires (cf. § 13), affirme que, sauf dans un petit nombre de cas dont la liste est connue, tout sous-groupe non central de $G(k)$ normalisé par G^+ contient G^+. En particulier, le quotient de G^+ par son centre est simple.

Dans [92], nous considérons non seulement les automorphismes et isomorphismes mais, plus généralement, les homomorphismes à image dense: soient G' un groupe absolument simple adjoint défini sur un corps k', H un sous-groupe de $G(k)$ contenant G^+ et $\alpha: H \to G'(k')$ un homomorphisme tel que $\alpha(G^+)$ soit dense; alors, il existe un unique homomorphisme de corps φ: $k \to k'$ et une unique k'-isogénie β: ${}^{\varphi}G \to G'$, où ${}^{\varphi}G$ est le k'-groupe déduit de G par le changement de base φ, tels que α soit la restriction à H du composé de l'homomorphisme canonique $G(k) \to {}^{\varphi}G(k')$ et de β.

Il est naturel de chercher à se débarrasser de l'hypothèse de densité de l'image. J'ai obtenu quelques résultats dans cette direction, notamment lorsque G est déployé, ou encore pour $k = k' = \mathbf{R}$. La méthode utilisée dans ce dernier cas donne un résultat plus général: la description de tous les homomorphismes d'un groupe de Lie réel connexe presque simple G quelconque (le cas compact n'est plus exclu) dans un groupe de Lie G'. Supposons pour simplifier, que G «est algébrique», et soit α: $G \to G'$ un homomorphisme; alors, il existe une $\mathbf{R}$-algèbre K, un homomorphisme d'anneaux $\varphi: \mathbf{R} \to K$ et un homomorphisme continu β de ${}^{\varphi}G$, considéré par restriction des scalaires comme un groupe de Lie, dans G', tels que α soit composé de l'homomorphisme $G \to {}^{\varphi}G$ induit par φ et de β.

Mentionnons enfin, dans un ordre d'idées un peu différent, le théorème principal de [86]: tout groupe linéaire (abstrait) G de type fini qui ne possède pas de sous-groupe résoluble d'indice fini contient un groupe non-abélien libre; si l'adhérence de Zariski de G est semi-simple, G possède même une partie libre dénombrable F telle que deux éléments quelconques de F engendrent un sous-groupe dense de G. Ce résultat a plusieurs conséquences intéressantes: il permet par exemple de prouver la conjecture de J. Milnor et J. Wolf sur la croissance d'un groupe de type fini dans le cas particulier des groupes linéaires.

20. Classification

Formes

Un théorème bien connu de E. Witt permet de caractériser une forme quadratique par son indice et sa partie anisotrope. On a un résultat analogue pour les groupes algébriques semi-simples: un groupe G défini sur un corps k est caractérisé à isogénie centrale près par un *indice* et un *noyau anisotrope*: l'indice est consitué par le graphe de Dynkin Δ de G, une opération du groupe de Galois de la clôture séparable de k sur Δ et un ensemble J de sommets de Δ; le noyau anisotrope est un groupe semi-simple anisotrope dont le graphe de Dynkin s'obtient en retirant de Δ les sommets appartenant à J et les traits qui y aboutissent. Ce résultat fait l'objet de [36] et [68], où sont aussi énoncées des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un indice et un noyau anisotrope donnés caractérisent effectivement un groupe G, ainsi que la liste des indices possibles sur un corps « général », sur un corps localement compact non discret et sur un corps de nombres. Remarquons que dans le cas réel, un groupe simple est entièrement déterminé par son indice et que l'on retrouve ainsi la classification des groupes de Lie réels simples.

21. Applications de la classification des groupes algébriques à l'algèbre

Une remarque fondamentale de A. Weil ramène la classification des groupes algébriques des types classiques A, B, C, D à celle des algèbres simples à involution, sauf toutefois pour les groupes des types B et D sur un corps de caractéristique 2. Pour traiter ces cas, il faut faire appel à la notion de forme quadratique introduite dans [76]: soient E une algèbre simple munie d'une involution σ de première espèce et A l'ensemble des « formes alternées » $x - \sigma(x)$ $(x \in E)$; on appelle alors *forme quadratique* un élément de E/A. Lorsque E est une algèbre de matrices et σ la transposition, on retrouve les formes quadratiques usuelles. Dans [76] sont aussi définis l'indice de Witt, le discriminant ou l'invariant d'Arf et l'algèbre de Clifford paire, obtenue rationnellement comme un quotient de l'algèbre tensorielle de E, d'une forme quadratique; une formule explicite, nouvelle même dans le cas classique, est donnée pour l'invariant d'Arf. Notons que les formes quadratiques utilisées dans [82] (cf. § 12) sont la généralisation de celles-ci à des corps gauches à involution et des espaces vectoriels de dimension quelconque; d'autre part, l'extension par C. T. C. Wall de cette notion au cas d'un anneau de base joue actuellement un rôle important en topologie différentielle.

Dans une série de travaux, C. Chevalley, R. D. Schafer, H. Freudenthal et N. Jacobson ont montré les liens existant entre l'algèbre exceptionnelle simple de Jordan, de dimension 27, et les algèbres de Lie exceptionnelles F_4, E_6, E_7, E_8, mais ils n'obtiennent que des constructions *ad hoc*, différentes pour ces quatre algèbres. La recherche de formules explicites pour certaines formes de E_6 m'a conduit à la découverte de deux procédés de construction d'algèbres de Lie à partir d'algèbres de Jordan. La premier, décrit dans [49], part d'une algèbre de Jordan J quelconque et d'une algèbre de Lie simple Y de dimension 3; si D est l'algèbre des dérivations intérieures de J, l'espace $L = J \otimes Y + D$ est muni d'une structure d'algèbre de Lie naturelle, donnée par des formules simples. La réciproque de ce résultat fournit une caractérisation des algèbres de Jordan qui explique le rôle joué par celles-ci dans l'étude des domaines bornés symétriques (travaux de M. Koecher). La seconde construction (cf. [54, 65] et R. D. Schafer, *An introduction to nonassociative algebras*, chap. IV) associe à tout couple formé d'une algèbre alternative A de degré $\leqslant 2$ et d'une algèbre de Jordan J de degré 3 une algèbre de Lie L, sorte de produit tensoriel de A et J. Les cas les plus intéressants sont ceux où A est le corps de base k, une extension quadratique (ou $k \oplus k$), une algèbre de quaternions ou une algèbre d'octaves, et où J est l'algèbre de Jordan des matrices hermitiennes d'ordre 3 à coefficients dans une algèbre de l'un de ces quatre types. Sur un corps algébriquement clos, on trouve ainsi un carré de 4×4 algèbres de Lie dont la dernière ligne et la dernière colonne sont (F_4, E_6, E_7, E_8). Ce «carré magique» (H. Freudenthal) était déjà connu pour ses propriétés numériques remarquables, observées expérimentalement par H. Freudenthal et moi (cf. [27], III) et qui trouvent ainsi leur explication. Sur un corps non algébriquement clos, la construction donne diverses formes des algèbres de Lie exceptionnelles, et en particulier toutes leurs formes sur $\mathbf{R}$, sur les corps $\mathfrak{p}$-adiques et sur les corps de nombres (à supposer que le principe de Hasse soit vrai pour E_8).

Partant de l'observation que le stabilisateur d'un point générique de l'algèbre de Jordan simple exceptionnelle J dans le groupe Aut J (de type F_4) est un groupe de type A_3, j'en ai déduit des constructions explicites de toutes les formes de J sur un corps quelconque k de caractéristique différente de 2, à partir d'algèbres simples de dimension 9 sur k et d'algèbres simples de dimension 9 à involution de seconde espèce sur une extension quadratique de k (cf. N. Jacobson, Structure and representations of Jordan algebras, IX, 12). On en déduit une démonstration simple d'un résultat de A. A. Albert: l'existence de formes à division de J.

22. Groupes finis simples

Dans son livre «Linear groups», publié en 1901, L. E. Dickson dressait la liste des groupes finis simples connus. Aucun changement n'y a été apporté jusqu'en 1955, date à laquelle un nouveau départ a été donné par C. Chevalley, après quoi les découvertes de nouveaux groupes simples se sont succédées à un rythme rapide. Sont apparues d'abord plusieurs séries infinies: groupes de Chevalley, formes *tordues* de ceux-ci (trouvées par D. Hertzig, R. Steinberg et moi), groupes de Suzuki et de Ree; ont suivi des groupes isolés, les groupes *sporadiques*, actuellement au nombre de 20 (groupes de Mathieu compris). Mes travaux dans ce domaine sont les suivants.

Ayant associé des géométries aux groupes exceptionnels complexes (cf. § 11), j'ai songé à prendre les principales propriétés combinatoires de celles-ci pour axiomes et de construire ainsi des géométries analogues, donc des groupes exceptionnels, sur un corps quelconque. Ce programme était réalisé pour E_6 (cf. [28]) au moment où les résultats généraux de Chevalley ont rendu inutile la poursuite de cette voie.

Les deux séries non classiques de «groupes de Chevalley tordus» (groupes ${}^2E_6$ et ${}^3D_4$) sont construits et étudiés dans [31] et [33]; simultanément, R. Steinberg obtenait ces mêmes groupes par une méthode uniforme, proche de celle de Chevalley.

Dès après la découverte par Suzuki des groupes qui portent son nom, j'en ai donné une interprétation géométrique comme groupes d'automorphismes de certains ovoïdes [41, 46].

L'exposé [41], consacré aux groupes de Suzuki et de Ree, généralise les résultats de Ree (le corps de base n'y est pas supposé parfait) et contient des données nouvelles sur ces groupes, entre autres une description élémentaire des groupes ${}^2G_2$ comme groupes doublement transitifs.

En définissant les groupes ${}^2F_4$, R. Ree avait montré qu'ils sont simples lorsque le corps de base a plus de deux éléments, mais il restait à déterminer la structure de ${}^2F_4(\mathbf{F}_2)$; il est établi dans [56] que ce groupe possède un sous-groupe simple d'indice 2. D'autre part, les résultats généraux de [56] ont comme corollaires immédiats les théorèmes de simplicité des groupes des séries infinies.

Dans [79], le groupe de Janko d'ordre 604.800 est obtenu comme groupe d'automorphismes d'un graphe à 100 sommets et 1800 arêtes, construit à partir de l'hexagone généralisé associé au groupe $G_2(\mathbf{F}_2)$ (cf. § 12). Jusqu'alors, l'existence de ce groupe de Janko n'était prouvée qu'à l'aide d'un ordinateur.

Enfin, [53] décrivait l'état de la théorie des groupes finis simples peu avant que Z. Janko ait trouvé le premier groupe sporadique (groupes de Mathieu mis à part) et l'exposé [83] fait le point après la découverte du 19e de la série; j'essaye d'y mettre un semblant d'ordre dans un maquis dont le mystère ne semble pas près d'être éclairci.

I.3. PUBLICATIONS

1. Articles et ouvrages

[1] Généralisation des groupes projectifs, I, *Acad. Roy. Belg., Bull. Cl. Sci.* **35** (1949) 197–208.
[2] —, II, *ibid.*, 224–233.
[3] —, III, Construction des groupes triplement transitifs finis, *ibid.*, 568–589.
[4] —, IV, Propriétés des groupes triplement transitifs finis, *ibid.*, 756–773.
[5] Groupes triplement transitifs et généralisations, *Colloque d'Algèbre et de théorie des nombres du C.N.R.S.*, Paris, septembre 1949, 207–208.
[6] Généralisation d'un théorème de Kerékjártó, *IIIe Congrès Nat. des Sciences*, Bruxelles, juillet 1950, 64–65.
[7] Collinéations et transitivité, *ibid.*, 66–67.
[8] Les groupes projectifs: évolution et généralisations, *Bull. Soc. Math. Belg.* **3** (1949–1950) 1–10.
[9] Sur les groupes triplement transitifs continus; généralisation d'une théorème de Kerékjártó, *Compositio Math.* **9** (1951) 85–96.
[10] Généralisations des groupes projectifs basées sur leur propriétés de transitivité, *Mém. Acad. Roy. Belg.* **27**(2) (1952), 115 p.
[11] Sur les groupes triplement transitifs continus, *Comment. Math. Helv.* **26** (1952) 203–224.
[12] Caractérisation topologique de certains espaces métriques, *Nachr. Österr. Math. Ges.* **22/23** (*Bericht III. Österr. Mathematikerkongr.*, Salzburg, sept. 1952), p. 51.
[13] Étude de certains espaces métriques, *Bull. Soc. Math. Belg.* **5** (1952) 40–52.
[14] La notion d'homogénéité en géométrie, Sém. de synthèse scient., Université Libre de Bruxelles, 1952, 1 p.
[15] Le plan projectif des octaves et les groupes de Lie exceptionnels, *Acad. Roy. Belg., Bull. Cl. Sci.* **39** (1953) 309–329.
[16] Le plan projectif des octaves et les groupes exceptionnels E_6 et E_7, *Acad. Roy. Belg., Bull. Cl. Sci.* **40** (1954) 29–40.
[17] Sur l'article intitulé: "Étude de certains espaces métriques", *Bull. Soc. Math. Belg.* **6** (1953) 126–127.
[18] Espaces homogènes et groupes de Lie exceptionnels, *Proc. Internat. Congr. Math.*, Amsterdam, sept. 1954, Vol. 1, 495–496.
[19] Étude géométrique d'une classe d'espaces homogènes, *C. R. Acad. Sci. Paris* **239** (1954) 466–468.
[20] Espaces homogènes et isotropes et espaces doublement homogènes, *ibid.*, 526–527.
[21] Sur les R-espaces, *ibid.*, 850–852.
[22] Transitivité des groupes de mouvements, *Schriften Forschungsinst. Math.* **2** (1957) (*Bericht Riemann-Tagung*, Berlin, 1954), 98–111.
[23] Groupes semi-simples complexes et géométrie projective, Séminaire Bourbaki, exp. No. 112 (février 1955), 11 p.

[24] Sous-algèbres des algèbres de Lie complexes semi-simples, Séminaire Bourbaki, exp. No. 119 (mai 1955), 18 p.

[25] Espaces homogènes et isotropes de la relativité, *Helv. Phys. Acta, Suppl. IV*, 1956 (*Actes Cinquantenaire Théor. Relat.*, Berne, juillet 1955), 46–47.

[26] Sur les groupes doublement transitifs continus: Corrections et compléments, *Comment. Math. Helv.* **30** (1956) 234–240.

[27] Sur certaines classes d'espaces homogènes de groupes de Lie, *Mém. Acad. Roy. Belg.* **29**(3) (1955), 268 p.

[28] Sur la géométrie des R-espaces, *J. Math. Pure Appl.* **36** (1957) 17–38.

[29] Les groupes de Lie exceptionnels et leur interprétation géométrique, *Bull. Soc. Math. Belg.* **8** (1956) 48–81.

[30] Sur les analogues algébriques des groupes semi-simples complexes, *Coll. d'Algèbre Supérieure du C. B. R. M.*, Bruxelles, décembre 1956, 261–289.

[31] Les "formes réelles" des groupes de type E_6, Séminaire Bourbaki, exp. No. 162 (février 1958), 15 p.

[32] Sur la trialité et les algèbres d'octaves, *Acad. Roy. Belg., Bull. Cl. Sci.* **44** (1958) 332–350.

[33] Sur la trialité et certains groupes qui s'en déduisent, *Publ. Math. I.H.E.S.* **2** (1959) 14–60.

[34] Isotropie des espaces de Klein, *Coll. de Géométrie différentielle globale du C. B. R. M.*, Bruxelles, décembre 1958, 153–161.

[35] Les espaces isotropes de la relativité, *Coll. sur la Théorie de la Relativité du C. B. R. M.*, Bruxelles, mai 1959, 107–119.

[36] Sur la classification des groupes algébriques semi-simples, *C. R. Acad. Sci. Paris* **249** (1959) 1438–1440.

[37] Une remarque sur la structure des algèbres de Lie semi-simples complexes, *Proc. Ned. Akad. Wet.* **A63** (*Indagationes Math.* **22**) (1960) 48–53.

[38] Sur une classe de groupes de Lie résolubles, *Bull. Soc. Math. Belg.* **11**(2) (1959) 100–115.

[39] Sur les groupes algébriques affins: théorèmes fondamentaux de structure; classification des groupes semi-simples et géométries associées, Centro Internazionale Matematico Estivo (C.I.M.E.), Saltino di Vallombrosa, septembre 1959 (Rome, 1960), III+74 p.

[40] Groupes algébriques semi-simples et géométries associées, *Proc. Coll. Algebraical and Topological Foundations of Geometry*, Utrecht, août 1959 (Pergamon Press, Oxford, 1962), 175–192.

[41] Les groupes simples de Suzuki et de Ree, Séminaire Bourbaki, exp. No. 210 (décembre 1960), 18 p.

[42] Sur les groupes d'affinités sans point fixe, *Acad. Roy. Belg., Bull. Cl. Sci.* **46** (1960) 954–956.

[43] Groupes et géométries de Coxeter, Notes polycopiées, I.H.E.S., Bures-sur-Yvette, juin 1961, 26 p.

[44] Sur une classe de groupes de Lie résolubles, corrections et additions, *Bull. Soc. Math. Belg.* **14**(2) (1962) 196–209.

[45] Ovoïdes à translations, *Rend. Mat.* **21** (1962) 37–59.

[46] Ovoïdes et groupes de Suzuki, *Arch. Math.* **13** (1962) 187–198.

[47] Espaces homogènes complexes compacts, *Comment. Math. Helv.* **37** (1963) 111–120.

[48] Théorème de Bruhat et sous-groupes paraboliques, *C. R. Acad. Sci. Paris* **254** (1962) 2910–2912.

[49] Une classe d'algèbres de Lie en relation avec les algèbres de Jordan, *Proc. Ned. Akad. Wet.* **A65** (*Indagationes Math.* **24**) (1962) 530–535.

[50] Géométries polyédriques et groupes simples, *Deuxième réunion du Groupement de Mathématiciens d'expression latine*, Florence, septembre 1961, 66–88.

[51] A theorem on generic norms of strictly power-associative algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.* **15** (1964) 35–36.

[52] Groupes semi-simples isotropes, *Coll. sur la Théorie des Groupes Algébriques du C.B.R.M.*, Bruxelles, juin 1962, 137–147.

[53] Groupes simples et géométries associées, *Proc. Internat. Congr. Math.*, Stockholm, 1962, 197–221.

[54] Algèbres alternatives, algèbres de Jordan et algèbres de Lie exceptionnelles, Notes polycopiées, IAS, Princeton, mars 1965, 5 p.

[55] Automorphismes à déplacement borné des groupes de Lie, *Topology* **3**, *Suppl.* 1 (1964) 97–107.

[56] Algebraic and abstract simple groups, *Ann. Math.* **80** (1964) 313–329.

[57] Sur les systèmes de Steiner associés aux trois "grands" groupes de Mathieu, *Rend. Math.* **23** (1964) (*Coll. sur les Géométries Finies*, Rome, octobre 1963) 166–184.

[58] Géométries polyédriques finies, *ibid.*, 156–165.

[59] Structures et groupes de Weyl, Séminaire Bourbaki, exp. No. 288 (février 1965), 15 p.

[60] Sur une conjecture de L. Solomon, *C. R. Acad. Sci. Paris* **260** (1965) 6247–6248.

[61] (avec A. Borel) Groupes réductifs, *Publ. Math. I.H.E.S.* **27** (1965) 55–151.

[62] Simple groups over local fields, Summer Institute on Algebraic Groups, Boulder, July 1965, Notes polycopiées, I-G, 6 p.

[63] Une propriété caractéristique des ovoïdes associés aux groupes de Suzuki, *Arch. Math.* **17** (1966) 136–153.

[64] (avec M. Lazard) Domaines d'injectivité de l'application exponentielle, *Topology* **4** (1966) 322–325.

[65] Algèbres alternatives, algèbres de Jordan et algèbres de Lie exceptionnelles, I. Construction, *Proc. Ned. Akad. Wet.* **A69** (*Indagationes Math.* **28**) (1966) 223–237.

[66] Normalisateurs de tores. I. Groupes de Coxeter étendus, *J. Algebra* **4** (1966) 96–116.

[67] Sur les constantes de structure et le théorème d'existence des algèbres de Lie semi-simples, *Publ. Math. I.H.E.S.* **31** (1966) 21–58.

[68] Classification of algebraic semi-simple groups, *Proc. Symp. Pure Math.* **9** (1966) (*Proc. Summer Inst. on Algebraic Groups and Discontinuous Groups*, Boulder, 1965), 33–62.

[69] (avec F. Bruhat) *Un théorème de point fixe*, Notes polycopiées, I.H.E.S., Bures-sur-Yvette, 1966, 34 p.

[70] (avec F. Bruhat) BN-paires de type affine et données radicielles, *C. R. Acad. Sci. Paris* **263** (1966) 598–601.

[71] (avec F. Bruhat) Groupes simples résiduellement déployés sur un corps local, *ibid.*, 766–768.

[72] (avec F. Bruhat) Groupes algébriques simples sur un corps local, *ibid.*, 822–825.

[73] (avec F. Bruhat) Groupes algébriques simples sur un corps local: cohomologie galoisienne, décompositions d'Iwasawa et de Cartan, *ibid.*, 867–869.

[74] Tabellen zu den einfachen Lie-Gruppen und ihren Darstellungen, *Springer Lecture Notes in Mathematics* **40** (1967), ii + 53 p.

[75] (avec F. Bruhat) Groupes algébriques simples sur un corps local, *Proc. Conf. on Local Fields*, Driebergen, 1966 (Springer-Verlag, 1967), 23–36.

[76] Formes quadratiques, groupes orthogonaux et algèbres de Clifford, *Invent. Math.* **5** (1968) 19–41.

[77] (avec L. Waelbroeck) The integration of a Lie algebra representation, *Pacific J. Math.* **26** (1968) 595–600.

[78] Le problème des mots dans les groupes de Coxeter, *Ist. Naz. Alta Mat. Symp. Math.* **1** (1968) 175–185.

[79] Le groupe de Janko d'ordre 604800, *Theory of Finite Groups (A Symp.)*, Benjamin, New York, 1969, 91–95.

[80] (avec A. Borel) On "abstract" homomorphisms of simple algebraic groups, *Proc. Internat. Coll. on Algebraic Geometry*, Bombay, 1968 (1969), 75–82.

[81] Sur le groupe des automorphismes d'un arbre, *Essays on Topology, Mémoires dédiés à G. de Rham*, Springer-Verlag, 1970, 188–211.

[82] Buildings of spherical types and finite BN-pairs, *Springer Lecture Notes in Mathematics* **386** (1974), X + 298 p. (deuxième édition augmentée en 1986, X + 302 p.)

[83] Groupes finis simples sporadiques, Séminaire Bourbaki, exp. No. 375, février 1970, *Springer Lecture Notes in Mathematics* **180** (1971) 187–211.

[84] (avec A. Borel) Éléments unipotents et sous-groupes paraboliques de groupes réductifs, *Invent. Math.* **12** (1971) 95–104.

[85] Représentations linéaires irréductibles d'un groupe réductif sur un corps quelconque, *J. Reine Angew. Math.* **247** (1971) 196–220.

[86] Free subgroups in linear groups, *J. Algebra* **20** (1972) 250–270.

[87] Homomorphismes et automorphismes "abstraits" de groupes algébriques et arithmétiques, *Actes Congr. Internat. Math.*, Nice, 1970 (1971), tome 2, 349–355.

[88] (avec F. Bruhat) Groupes réductifs sur un corps local. I. Données radicielles valuées, *Publ. Math. I.H.E.S.* **41** (1972) 5–251.

[89] (avec A. Borel) Compléments à l'article: "Groupes réductifs", *ibid.*, 253–276.

[90] Non-existence de certaines extensions transitives. I: Groupes projectifs à une dimension, *Bull. Soc. Math. Belg.* **23** (1971) 482–493.

[91] Une propriété des systèmes de racines (appendice à un article de J. Dixmier), *Invent. Math.* **17** (1972) 174–176.

[92] (avec A. Borel) Homomorphismes "abstraits" de groupes algébriques simples, *Ann. Math.* **97** (1973) 499–571.

[93] Homomorphismes "abstraits" de groupes de Lie, *Ist. Naz. Alta Mat., Symp. Math.* **13** (1974) 479–499.

[94] (avec S. Koppelberg) Une propriété des produits directs infinis de groupes finis isomorphes, *C. R. Acad. Sci. Paris* **A279** (1974) 583–585.

[95] On buildings and their applications, *Proc. Internat. Congr. Math.*, Vancouver, 1974 (1975), Vol. 1, 209–220.

[96] Leçon inaugurale de la chaire de Théorie des groupes, Collège de France, 1974 (1975) 18 p.

[97] Travaux de Margulis sur les sous-groupes discrets de groupes de Lie, Séminaire Bourbaki, exp. No. 482, février 1976, *Springer Lecture Notes in Mathematics* **567** (1977), 174–190.

[98] Two properties of Coxeter complexes (appendice à un article de L. Solomon), *J. Algebra* **41** (1976) 265–268.

[99] Non-existence de certains polygones généralisés. I, *Invent. Math.* **36** (1976) 275–284.

[100] Systèmes générateurs de groupes de congruence, *C. R. Acad. Sci. Paris* **A283** (1976) 693–695.

[101] Classification of buildings of spherical types and Moufang polygons: a survey, *Atti Coll. Internat. Teorie Combinatorie, Accad. Naz. Lincei*, Roma, 1975 (1976), t.1, 229–246.

[102] A theorem of Lie–Kolchin for trees, *Contributions to Algebra, a collection of papers dedicated to Ellis Kolchin* (Academic Press, 1977), 377–388.

[103] Quadrangles de Moufang, I, Prépublication, Paris, 1976, 16 p.

[104] (avec W. Feit) Projective representations of minimum degree of group extensions, *Canad. J. Math.* **30** (1978) 1092–1102.

[105] Endliche Spiegelungsgruppen, die als Weylgruppen auftreten, *Invent. Math.* **43** (1977) 283–295.

[106] Sur certains groupes dont l'ordre est divisible par 23, *Bull. Soc. Math. Belg.* **27** (1975) 325–332.

[107] Groupes de Whitehead de groupes algébriques simples sur un corps, Séminaire Bourbaki, exp. No. 505, juin 1977, *Springer Lecture Notes in Mathematics* **677** (1978), 218–236.

[108] (avec A. Borel) Théorèmes de structure et de conjugaison pour les groupes algébriques linéaires, *C. R. Acad. Sci. Paris* **A287** (1978) 55–57.

[109] Reductive groups over local fields, *Proc. Symp. Pure Math.* **33** (*Proc. Summer Inst. on Group Representations and Automorphic Forms*, Corvalis 1977) (1979), Vol. 1, 29–69.

[110] The work of Gregori Aleksandrovitch Margulis, *Proc. Internat. Congr. Math.*, Helsinki, 1978 (1980), Vol. 1, 57–63.

[111] Non-existence de certaines polygones généralisés. II, *Invent. Math.* **51** (1979) 267–269.

[112] (avec C. W. Curtis et G. I. Lehrer) Spherical buildings and the character of the Steinberg representation, *Invent. Math.* **58** (1980) 201–210.

[113] Quaternions over $\mathbf{Q}[\sqrt{5}]$, Leech's lattice and the sporadic group of Hall–Janko, *J. Algebra* **62** (1980) 56–75.

[114] Le principe d'inertie en relativité générale, *Bull. Soc. Math. Belg.* **31** (1979) 171–197.

[115] Four presentations of Leech's lattice, *Finite Simple Groups II, Proc. of a London Math. Soc. Research Symp.*, Durham, 1978, ed. M. J. Collins (Academic Press, 1980), 303–307.

[116] Buildings and Buekenhout geometries, *ibid.*, 309–320.

[117] Géométrie de l'espace, du temps et de la causalité: la voie axiomatique (extraits d'une conférence faite à Halle en 1980; voir réf. [145] ci-dessous), *Mélanges Paul Libois*, Bruxelles, 1981, 291–296.

[118] Exposé sur les mathématiques, fait à l'occasion du 450e anniversaire du Collège de France, C. R. de la Réunion extraordinaire de l'Assemblée des professeurs, *Collège de France*, octobre 1981, 9–11.

[119] Appendice à l'article de M. Gromov: Groups of polynomial growth and expanding maps, *Publ. Math. I.H.E.S.* **53** (1981) 74–78.

[120] Définition par générateurs et relations de groupes avec BN-paires, *C. R. Acad. Sci. Paris* **293** (1981) 317–322.

[121] Algèbres enveloppantes et groupes de Chevalley généralisés, *Actes des Journées 'Groupes et langages'*, Amiens, mai 1981, 5 p.

[122] Groupes à croissance polynomiale (d'après A. Gromov *et al.*), Séminaire Bourbaki, exp. No. 572, février 1981, *Springer Lecture Notes in Mathematics* **901** (1981), 176–188.

[123] A local approach to buildings, *The Geometric Vein, the Coxeter Festschrift* (Springer-Verlag, 1981), 519–547.

[124] Évariste Galois, son oeuvre, sa vie, ses rapports avec l'Académie, exposé fait à l'Académie des Sciences le 7 juin 1983, à l'occasion du 150e anniversaire de la mort d'Évariste Galois (Institut de France et Gauthier-Villars, Paris, 1982), 10 p.

[125] Moufang octagons and the Ree groups of type ${}^2F_4$, *Amer. J. Math.* **105** (1983) 539–594.

[126] On the distance between opposite vertices in buildings of spherical types (appendix to "Some remarks on Tits geometries" by A. E. Brouwer and A. M. Cohen), *Proc. Ned. Acad. Wet.* **A86** (*Indagationes Math.* **45**) (1983) 400–402.

[127] (avec F. Bruhat) Groupes réductifs sur un corps local, II. Schémas en groupes. Existence d'une donnée radicielle valuée, *Publ. Math. I.H.E.S.* **60** (1984) 5–184.

[128] (avec F. Bruhat) Schémas en groupes et immeubles des groupes classiques sur un corps local, *Bull. Soc. Math. Fr.* **112** (1984) 259–301.

[129] On R. Griess' "Friendly giant", *Invent. Math.* **78** (1984) 491–499.

[130] Le Monstre (d'après R. Griess, B. Fischer *et al.*), Séminaire Bourbaki, exp. No. 620, novembre 1983, *Astérisque*, **121–122** (1985) 104–122.

[131] Symétries, La Vie des Sciences, série générale des *C. R. Acad. Sci. Paris* **2** (1985) 13–25.

[132] Groups and group functors attached to Kac–Moody data, Arbeitstagung Bonn 1983, *Springer Lecture Notes in Mathematics* **1111** (1985), 193–223.

[133] (avec A. Cohen) On generalized hexagons and a near octagon whose lines have three points, *European J. Combinatorics* **6** (1985) 13–27.

[134] Avatars des grands théorèmes de classification d'Elie Cartan (bref résumé d'une conférence faite au colloque: "Élie Cartan et les mathématiques d'aujourd'hui", Lyon, Juin 1984), *Astérisque*, numéro hors-série, 1985, 439–440.

[135] Immeubles de type affine, *Buildings and the geometry of diagrams*, Como 1984, *Springer Lecture Notes in Mathematics* **1181** (1986), 159–190.

[136] Ensembles ordonnés, immeubles et sommes amalgamées, *Bull. Soc. Math. Belg.* **38** (1986) 367–387.

[137] (avec J. Dieudonné) La vie et l'oeuvre de Claude Chevalley, *La Vie des sciences*, série générale des *C. R. Acad. Sci. Paris* **3** (1987) 559–565.

[138] (avec W. Kantor et R. Liebler) On discrete chamber-transitive automorphism groups of affine buildings, *Bull. Amer. Math. Soc.* **16** (1987) 129–133.

[139] Uniqueness and presentation of Kac–Moody groups over fields, *J. Algebra* **105** (1987) 542–573.

[140] Buildings and group amalgamations, *Proc. of Groups St. Andrews 1985*, eds. E. F. Robertson & C. M. Campbell, *London Math. Soc. Lecture Notes* **121** (1986) 110–127.

[141] (avec F. Bruhat) Schémas en groupes et immeubles des groupes classiques sur un corps local. Deuxième partie: groupes unitaires, *Bull. Soc. Math. Fr.* **115** (1987) 141–195.

[142] (avec F. Bruhat) Groupes algébriques sur un corps local, III. Compléments et applications à la cohomologie galoisienne, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. 1A*, **34**(3) (1987) 671–698.

[143] Le module du "Moonshine" (d'après I. Frenkel, J. Lepowsky et A. Meurman), Séminaire Bourbaki, exp. No. 684, juin 1987, *Astérisque* **152–153** (1987) 285–303.

[144] (avec P. Lentoudis) Sur le groupe des automorphismes de certains produits en couronne, *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I* **205** (1987) 847–852.

[145] (avec M. Ronan) Building Buildings, *Math. Ann.* **278** (1987) 101–111.

[146] Geometrie von Raum, Zeit und Kausalität: Ein axiomatischer Zugang, *Raum und Zeit* (Vorträge anläßlich der Jahresversammlung vom 9–12 april 1980), *Nova Acta Leopoldina* **54** (Nr. 244) (1987) 101–111.

[147] Unipotent elements and parabolic subgroups of reductive groups, II, *Algebraic*

Groups Utrecht 1986, *Springer Lecture Notes in Mathematics* **1271** (1987) 265–284.

[148] Groupes de type E sur les corps globaux, notes polycopiées, Collège de France, 1988, 4 p.

[149] Sur le groupe des automorphismes de certains groupes de Coxeter, *J. Algebra* **113** (1988) 346–357.

[150] Groupes associés aux algèbres de Kac–Moody, Séminaire Bourbaki, exp. No. 700, novembre 1988, *Astérisque* **177–178** (1989) 7–31.

[151] Strongly inner anisotropic forms of simple algebraic groups, *J. Algebra* **131** (1990) 648–677.

[152] Spheres of radius 2 in triangle buildings, *Finite Geometries, Buildings and Related Topics* (Oxford Science Publications, 1990), 17–28.

[153] Symmetrie, *Miscellanea Mathematica* (recueil d'articles dédiés à H. Götze) (Springer-Verlag, 1991), 293–304.

[154] (avec G. Lusztig) The inverse of a Cartan matrix, *Anal. Univ. Timişoara, Ser. Şt. Mat.* **XXX**(1) (1992) 17–23.

[155] (avec M. Ronan) Twin trees. I, *Invent. Math.* **116** (1994) 463–479.

[156] Sur les produits tensoriels de deux algèbres de quaternions, *Bull. Soc. Math. Belg., Sér. B* **45** (1993) 329–331.

[157] Moufang polygons, I. Root data, *Bull. Soc. Math. Soc. Simon Stevin* **3** (1994) 455–468.

[158] Twin buildings and groups of Kac–Moody type, *Groups, Combinatorics and Geometry*, Durham, 1990, *London Math. Soc. Lecture Notes Series* **165** (1992), 249–286.

[159] Sur les degrés des extensions de corps déployant les groupes algébriques simples, *C. R. Acad. Sci. Paris* **315** (1992) 1131–1138.

[160] Ein Fixpunktsatz für Gebäude, und Anwendungen (Zusammenfassung eines Vortrags), *Jahrestagung der D. M. V.*, Jena, 1996.

[161] (avec M. Ronan) Twin trees, II. Local structure and a universal construction, *Israel J. Math.* **109** (1999) 349–377.

[162] (avec H. Bass) Discreteness criteria for tree automorphism groups (appendix to: *Tree Lattices*, by H. Bass and A. Lubotzky, to appear in *Progress in Mathematics* (Birkhäuser)).

[163] (avec R. Weiss) The classification of Moufang polygons, à paraître.

2. Résumés de cours au Collège de France

1. Immeubles: classification et automorphismes, *Annuaire du Collège de France* (*ACF*), 74e année (1973–1974), 631–637.
2. Groupes réductifs sur un corps local, *ACF*, 75e année (1974–1975), 49–55.
3. Rigidité et arithméticité des sous-groupes discrets de groupes de Lie, *ACF*, 76e année (1975–1976), 51–55.
4. Groupes finis simples sporadiques, *ACF*, 77e année (1976–1977), 57–66.
5. Polygones de Moufang et groupes de rang 2, *ACF*, 78e année (1977–1978), 73–80.

6. Problèmes de théorie des groupes en relativité Einsteinienne et chronogéométrie, *ACF*, 79e année (1978–1979), 65–69.
7. Schémas en groupes sur un anneau de valuation: immeubles affine, *ACF*, 80e année (1979–1980), 75–79.
8. Algèbres et groupes de Kac–Moody, *ACF*, 81e année (1980–1981), 75–86.
9. Algèbres de Kac–Moody et groupes associés (suite), *ACF*, 82e année (1981–1982), 91–105.
10. Le groupe sporadique de Griess–Fischer, *ACF*, 83e année (1982–1983), 89–102.
11. Immeubles de type affine, classification et application aux groupes finis, *ACF*, 84e année (1983–1984), 85–96.
12. Immeubles affines, groupes arithmétiques et géométries finies, *ACF*, 85e année (1984–1985), 93–110.
13. Le groupe de Griess–Fischer: construction et "Moonshine", *ACF*, 86e année (1985–1986), 101–112.
14. Suite du précédent, *ACF*, 87e année (1986–1987), 90–97.
15. Formes et sous-groupes des groupes algébriques simples sur les corps et les corps locaux, *ACF*, 88e année (1987–1988), 85–100.
16. Immeubles jumelés, *ACF*, 89e année (1988–1989), 81–95.
17. Suite du précédent, *ACF*, 90e année (1989–1990), 87–103.
18. Cohomologie galoisienne des groupes semi-simples sur les corps de nombres, *ACF*, 91e année (1990–1991), 125–137.
19. Groupes algébriques sur les corps non parfaits, *ACF*, 92e année (1991–1992), 115–132.
20. Groupes algébriques linéaires sur les corps séparablement clos, *ACF*, 93e année (1992–1993), 113–130.
21. Groupes algébriques simples de rang 2 et algèbres de Clifford de petites dimensions (classification des polygones de Moufang), *ACF*, 94e année (1993–1994), 101–114.
22. Polygones de Moufang (suite), description des quadrangles de Moufang connus, *ACF*, 95e année (1994–1995), 79–95.
23. Arbres jumelés, *ACF*, 96e année (1995–1996), 79–101.
24. Homomorphismes "abstraits" de groupes algébriques, *ACF*, 97e année (1996–1997), 89–102.
25. Immeubles jumelés: théorèmes d'existence, *ACF*, 98e année (1997–1998), 97–112.
26. I. Éléments unipotents et sous-groupes paraboliques de groupes algébriques simples, *ACF*, 99e année (1998–1999), 95–107. II. Le plan de Cremona, *ibid.*, 108–114.
27. Groupes de rang 1 et ensembles de Moufang, *ACF*, 100e année (1999–2000), à paraître.

3. Manuscrits inédits; notes de cours

1. *Espaces Homogènes et Isotropes et Espaces Doublement Homogènes*, Mémoire présenté au concours scient. interfacultaire L. Empain 1955, VII + 108 p.

2. *Liesche Gruppen und Algebren* (en collaboration avec M. Krämer et H. Scheerer), notes polycopiées, Bonn, 1965, VI + 220 p.; réédition, Hochschultext (Springer-Verlag, 1983), XIV + 220 p.
3. *Lectures on Algebraic Groups*, Notes rédigées par P. André et D. Winter (Yale Univ., 1967), VI + 4 + 68 p.
4. *Affine Buildings, Arithmetic Groups and Finite Geometries*, Notes rédigées par R. Scaramuzzi et D. White, d'après un cours fait à l'Université Yale à l'automne 1984, 117 p.

II. GROUPES et GÉOMÉTRIES de COXETER

par Jacques TITS

Les §§ 1 à 3, constituant l'essentiel des présentes notes, sont extraites, sans modification, d'un projet de rédaction de la première partie ("Groupes et Géométries de Coxeter") d'un livre consacré aux groupes vérifiant un théorème de Bruhat et aux géométries qu'on peut leur associer. Cela explique une terminologie qui peut paraître étrange à première vue, et certaines incohérences, telles que l'introduction de notions ou l'énoncé de propositions auxiliaires non utilisées par la suite. Le § 0 réunit les définitions des principaux termes utilisés; on aura intérêt à ne pas le lire d'abord, mais plutôt à s'y référer chaque fois qu'un terme nouveau s'introduit dans le texte. A titre de bibliographie, on se bornera à mentionner, en tant que principale source d'inspiration,

WITT, E., Spiegelungsgruppen und Aufzählung halbeinfacher Liescher Ringe, Hamb. Abhandl. **14** (1941), 289–322,

et à renvoyer, pour toute autre indication, à

COXETER, H.S.M. et MOSER, W.O.J., Generators and relations for discrete groups, Ergebnisse der Math., N.F., **14**, Springer, 1957.

0. PRÉLIMINAIRES. DÉFINITIONS. NOTATIONS

Une *géométrie* est un ensemble ordonné dont les éléments sont appelés *drapeaux* et dont la relation d'ordre, notée $a \leq b$, se lit: "*a supporte b*" ou "*a* est un *sous-drapeau* de *b*". Les géométries forment une catégorie (les *morphismes* étant définis de façon évidente); on peut donc parler de *produits directs* (qui existent toujours) et de sous-géométries.

Un ensemble $\{a_i\}$ de drapeaux est appelé une *famille incidente* s'il possède un majorant; deux drapeaux sont *incidents* s'ils constituent une famille incidente. La borne supérieure (resp. inférieure) d'un ensemble de drapeaux $\{a_i\}$, si elle existe, est appelée somme (resp. p.g.s.c. = *plus grand support commun*) des a_i. Soient a et b deux drapeaux tels que $a \leq b$; si l'ensemble des drapeaux c tels que $a + c = b$ possède un élément minimum, il est appelé *différence* de b et a, et noté $b - a$. Si une géométrie possède un élément minimum, celui-ci est noté 0. La *hauteur* d'un drapeau a est le plus grand entier p tel qu'il existe une suite totalement ordonnée de drapeaux $a_1, a_2, \ldots, a_p = a$, avec $a_1 \neq 0$ (si 0 existe) et $a_i < a_{i+1}$; si une telle suite existe pour tout p, la hauteur est dite infinie. Lorsqu'il existe un 0, on appelle en abrégé *drapeaux minimaux* les drapeaux non nuls minimaux, c'est-à-dire les drapeaux de hauteur 1. Une *chaîne de longueur n* est une suite de n drapeaux tels que deux éléments consécutifs de la suite soient comparables. Si Γ est une géométrie et $a \in \Gamma$, la *résiduelle* de Γ par rapport à a est la sous-géométrie de Γ constituée par les drapeaux supportés par a. Etant données deux parties A et B de Γ, *l'ombre* de A sur B est l'ensemble des éléments de B incidents à tous les éléments de A.

Soit S une géométrie. Une *géométrie sur S*, ou S-géométrie, est une géométrie Γ + un morphisme $\Gamma \to S$. On définit de façon évidente les S-morphismes entre S-géométries. L'image dans S d'un drapeau (d'un ensemble de drapeaux, d'une chaînes de drapeaux, ...) d'une S-géométrie est appelée *l'espèce* (sur S) de ce drapeau (de cet ensemble, de cette chaîne, ...). Une chaîne est *tendue* (sur S) s'il n'existe aucune autre chaîne de même espèce ayant les mêmes extrémités. Une géométrie (resp. une S-géométrie) *à opérateurs* est une géométrie (resp. une S-géométrie) + un groupe opérant par automorphismes (resp. S-automorphismes) sur celle-ci; on définit de façon évidente les morphismes de géométries à opérateurs. Les expressions "sur S", ou "à opérateurs", seront souvent omises, lorsque le contexte est suffisamment clair.

Soient E un ensemble et I une *"relation d'incidence"*, c'est-à-dire une correspondance réflexive et symétrique, donnée dans E. Appelons drapeau toute partie de E formée d'éléments deux à deux incidents. L'ensemble de ces drapeaux, ordonné par l'inclusion, constitue une géométrie $P(E,I)$, à partir de laquelle on peut reconstituer l'ensemble E (ensemble des drapeaux minimaux de $P(E,I)$) et la relation d'incidence. Une géométrie qui peut être définie de cette façon est dite une *géométrie d'incidence.* Si la relation I est triviale (i.e. vérifiée pour toute paire d'éléments de E), $P(E,I)$, qu'on notera alors $P(E)$, est la géométrie des parties de E ordonnées par l'inclusion. Si E est l'ensemble des faces d'un polyèdre, et I la relation d'incidence usuelle entre ces faces (l'inclusion), $P(E,I)$ est appelée la *géométrie du polyèdre* en question.

Soient G un groupe et G_1 un sous-groupe. Il sera parfois utile de faire la distinction entre un point $a \in G/G_1$ et la classe latérale de G_1 dans G qu'il représente; celle-ci sera alors notée $\mathrm{cl}(a)$.

Soient G un groupe et $\{G_i\}$ un ensemble de sous-groupes de G, i parcourant un ensemble d'indices I. On notera $G(\{G_i\})$ la géométrie dont les drapeaux sont les points de la somme directe des ensembles G/G_i, la relation d'ordre étant définie comme suit: $a \leq b$ si $\mathrm{cl}(a) \supseteq \mathrm{cl}(b)$. Supposons les G_i tous distincts, et introduisons dans I la relation d'ordre suivante: $i \leq j$ si $G_i \supseteq G_j$; la géométrie ainsi définie sera encore désignée par I. Cela étant, $G(\{G_i\})$ est, de façon naturelle, une I-géométrie à opérateurs (le groupe d'opérateurs étant G).

Soit V un espace vectoriel réel. Un *cône simplicial ouvert* (c.s.o.) est l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients strictement positifs d'un ensemble de vecteurs linéairement indépendants; les demi-droites déterminées par ces vecteurs sont les *arêtes* du c.s.o. La *géométrie des c.s.o. de V* est la géométrie à opérateurs dont les drapeaux sont les c.s.o. de V, la relation d'ordre étant définie comme suit: $a \leq b$ si a est une face de b, c'est-à-dire si les arêtes de a sont aussi des arêtes de b, et le groupe d'opérateurs étant le groupe linéaire général (groupe des automorphismes de V).

Les applications sont écrites à droite (sauf lorsqu'il s'agit de simples indexations – l'auteur a d'ailleurs l'intention d'éviter cette incohérence dans la rédaction définitive). De même, les groupes opèrent à droite.

1. GRAPHES. GROUPES ET GÉOMÉTRIES DE COXETER

Soit n un entier naturel. Un *graphe d'ordre* n sera un objet Δ constitué par un ensemble $\Sigma(\Delta)$ de n éléments appelés *sommets* de Δ, et une loi qui associe à toute paire (i,j) de sommets un entier δ_{ij} égal à 1 ou ≥ 2 selon que $i =$ ou $\neq j$. On désignera aussi par Δ la matrice symétrique des δ_{ij}. Enfin, on représentera encore Δ par un dessin obtenu comme suit: les sommets de Δ sont représentés par des points, et deux points i, j $(i \neq j)$ sont joints par un trait $(\delta_{ij}-2)$-uple (si $\delta_{ij}=2$, les points ne sont pas joints), ou par un trait simple sur lequel est indiquée la valeur de δ_{ij} (les deux conventions pouvant être utilisées conjointement).

Si Δ est de la forme

$$\Delta = \begin{pmatrix} \Delta_1 & \Delta_{12} & \Delta_{13} & \cdots \\ \Delta_{21} & \Delta_2 & \Delta_{23} & \cdots \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_3 & \cdots \\ & \cdots & & \end{pmatrix},$$

où les Δ_i sont des matrices carrées et où les Δ_{ij} sont composées uniquement de nombres 2, on dira que le graphe Δ est la *somme directe* des graphes $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$, et on écrira $\Delta = \Delta_1 \dotplus \Delta_2 \dotplus \cdots$ Un graphe sera dit *connexe* s'il n'est pas somme directe de deux diagrammes d'ordres strictement positifs. Tout graphe est une somme directe de graphes connexes, appelés ses *composantes connexes.* On appellera *sous-graphe* de Δ, tout graphe Δ_1 dont l'ensemble de sommets $\Sigma(\Delta_1)$ est partie de $\Sigma(\Delta)$, le nombre δ_{ij} associé à tout couple i, $j \in \Sigma(\Delta_1)$ étant le même pour Δ et Δ_1. Si $\mathbf{i} = \Sigma(\Delta) - \Sigma(\Delta_1)$ est l'ensemble des sommets de Δ qui ne sont pas sommets de Δ_1, on dira aussi, en abrégé, que Δ_1 est obtenu à partir de Δ en lui retirant l'ensemble de sommets $\mathbf{i}$. La géométrie $P(\Sigma(\Delta))$ des parties de $\Sigma(\Delta)$ sera encore notée $P(\Delta)$.

On appellera *groupe de Coxeter* de type Δ le groupe $G = G(\Delta)$ engendré par n générateurs r_i $(i \in \Sigma(\Delta))$, en correspondance biunivoque avec les sommets de Δ, et défini par les relations

$$(1.1) \qquad (r_i r_j)^{\delta_{ij}} = 1$$

où (i,j) parcourt l'ensemble des couples d'éléments de $\Sigma(\Delta)$ tels que $\delta_{ij} < \infty$. On notera que pour $i = j$ la relation (1.1) devient $r_i^2 = 1$.

$\mathbf{i} = \{i_1, \ldots, i_p\}$ et $\mathbf{i}' = \{i'_1, \ldots, i'_{n-p}\}$ étant deux parties complémentaires de $\Sigma(\Delta)$, on notera $G_{\mathbf{i}} = G_{i_1 \cdots i_p} = G^{\mathbf{i}'} = G^{i'_1 \cdots i'_{n-p}}$ le sous-groupe de G engendré par les $r_{i'}$ $(i' \in \mathbf{i}')$. Enfin, on appellera *géométrie de Coxeter* de type Δ la géométrie $\Gamma = \Gamma(\Delta) = G(\{G_{\mathbf{i}}\})$, où $\mathbf{i}$ parcourt l'ensemble des parties de $\Sigma(\Delta)$.

1.2. Exemple. Soient $n = 2$, $\Sigma(\Delta) = \{1,2\}$ et $\delta_{12} = \delta$ (i.e. le graphe Δ se compose d'un trait $(\delta-2)$-uple). Alors $G(\Delta)$ est le groupe *diédral* d'ordre 2δ et $\Gamma(\Delta)$ est la géométrie d'un polygone à δ côtés.

2. REPRÉSENTATIONS

Soient V un espace vectoriel réel à n dimensions, $\{v_i\}$ $(i \in \Sigma(\Delta))$ une base de V, V' le dual de V, $\{v'_i\}$ la base duale de $\{v_i\}$, β_Δ: $V' \times V' \to \mathbf{R}$ la forme bilinéaire définie par

$$(v_i', v_j')\beta_\Delta = -\cos \pi/\delta_{ij}\,,$$

et ω_i' la "symétrie" définie par

$$x\omega_i' = x - 2\cdot(x, v_i')\beta_\Delta \cdot v_i' \qquad (x \in V')\,.$$

2.1. Théorème. (Witt) *Il existe une représentation ω' de $G(\Delta)$ dans V' telle que $r_i\omega' = \omega_i'$ pour tout $i \in \Sigma(\Delta)$. Cette condition détermine ω'.*

Démonstration. Il suffit de vérifier que

$$(\omega_i'\omega_j')^{\delta_{ij}} = 1\,. \tag{2.2}$$

Lorsque $i = j$ c'est évident. Supposons donc que $i \neq j$. Le plan V_1' engendré par v_i' et v_j', et la variété à $n-2$ dimensions V_2', orthogonale à celui-ci, sont invariants par ω_i' et ω_j', qui induisent sur V_2' la transformation identique, et sur V_1', considéré comme un plan euclidien (avec la métrique définie par la restriction de β_Δ), les symétries par rapport à deux droites formant entre elles un angle π/δ_{ij}. Il s'ensuit que les restrictions de $(\omega_i'\omega_j')^{\delta_{ij}}$ à V_1' et à V_2' sont l'identité. Or l'espace V' est la somme directe de V_1' et V_2', puisque la restriction de β_Δ à V_1' n'est pas dégénérée. □

2.3. Théorème. (Witt) *La forme β_Δ est invariante par le groupe $G\omega'$. Si le graphe Δ est connexe, les seules formes bilinéaires symétriques invariantes par $G\omega'$ sont les multiples de β_Δ.*

Démonstration. La première assertion est évidente. Soit β une forme bilinéaire symétrique invariante par $G\omega'$. En exprimant que la restriction de β au plan déterminé par v_i' et v_j' est invariante par ω_i', on trouve la relation

$$(v_i', v_j')\beta = -(v_i', v_i')\beta \cdot \cos\frac{\pi}{\delta_{ij}}\,, \tag{2.4}$$

d'où on déduit en particulier que

$$\text{si } \delta_{ij} > 2, \qquad (v_i', v_i')\beta = (v_j', v_j')\beta\,. \tag{2.5}$$

Si Δ est connexe, il est possible, pour tout couple (i,j), de trouver une suite de sommets de Δ, $i = i_1, i_2, \ldots, i_p = j$, telle que $\delta_{i_m i_{m+1}} > 2$ pour tout m $(1 \le m < p)$. De (2.5) il résulte alors que $(v_i', v_i')\beta$ a une valeur constante, indépendante de i, et de (2.4), que β est un multiple de β_Δ. □

Nous appellerons *représentation naturelle* de G la représentation ω de G dans V contragrédiente de ω' (i.e. définie par $\langle x, x'\rangle = \langle (x)(g\omega), (x')(g\omega')\rangle$ pour tous $x \in V$, $x' \in V'$, et $g \in G$). Le transformé par $g\omega$ ($g \in G$) d'un point x de V, ou plus généralement d'un objet x quelconque défini dans V, sera le plus souvent noté xg, ce qui revient à considérer que G opère (à droite) sur V.

Pour toute partie $\mathbf{i} = \{i_1, \ldots, i_p\}$ de $\Sigma(\Delta)$, soit $C_\mathbf{i} = C_{i_1 \cdots i_p}$ le cône simplicial ouvert (c.s.o.) ensemble des combinaisons linéaires à coefficients strictement positifs de $v_{i_1}, \ldots, v_{i_p}$ (si $\mathbf{i} = \emptyset$, $C_\mathbf{i} = \{0\}$). Si $g \in G$, le c.s.o. $C_\mathbf{i} g$ dépend seulement du drapeau $a = G_\mathbf{i} \cdot g$, et non du choix particulier de l'élément $g \in$ cl.(a); nous le noterons $a\omega^*$. Il est facile de voir que (ω, ω^*) constitue un morphisme de géométries à opérateurs de $\Gamma(\Delta)$ dans la géométrie des c.s.o. de V; nous l'appellerons *représentation naturelle* de $\Gamma(\Delta)$. Lorsqu'aucune confusion n'est à craindre, il nous arrivera fréquemment de supprimer l'astérisque de ω^*.

Le cône $C_\mathbf{i}$ est invariant par $r_i\omega$ si et seulement si $i \notin \mathbf{i}$. On en déduit que

2.6. Théorème. *Les sous-groupes $G_\mathbf{i}$ et $G_\mathbf{j}$ de G correspondant à des parties distinctes,* $\mathbf{i}$ *et* $\mathbf{j}$, *de* $\Sigma(\Delta)$, *sont distincts.*

Cela nous permet de considérer $\Gamma(\Delta)$ comme une $P(\Delta)$-géométrie. En particulier, les drapeaux éléments de $G/G_\mathbf{i}$ seront dits d'espèce $\mathbf{i}$.

2.7. Corollaire. *Si* $\mathbf{i} \subseteq \mathbf{j}$, *tout drapeau d'espèce* $\mathbf{j}$ *possède un et un seul sous-drapeau d'espèce* $\mathbf{i}$. *Si* $\mathbf{i} \subset \mathbf{j}$, *tout drapeau d'espèce* $\mathbf{i}$ *supporte au moins deux drapeaux d'espèce* $\mathbf{j}$.

2.8. Corollaire. *Si* $\mathbf{i} = \{i_1, \ldots, i_p\}$, *les drapeaux d'espèce* $\mathbf{i}$ *sont de hauteur* p.

Outre la représentation ω, nous aurons à utiliser la *représentation projective naturelle* $\tilde{\omega}$ de G définie comme suit. Soient $\tilde{V}'$ l'espace affin déduit de V' par "abstraction du 0" (espace homogène obtenu en faisant opérer V' sur lui-même par translation) et $\tilde{\omega}'_i$ l'affinité involutive définie par

$$x\tilde{\omega}'_i = x\omega'_i + 2v'_i, \qquad x \in \tilde{V}'.$$

Un raisonnement analogue à celui qui nous a permis d'établir le théorème 2.1 montre que les $\tilde{\omega}'_i$ satisfont aux relations

$$(\tilde{\omega}'_i \tilde{\omega}'_j)^{\delta_{ij}} = 1,$$

c'est-à-dire qu'il existe une représentation affine bien déterminée $\tilde{\omega}'$ de G telle que $r_i\tilde{\omega}' = \tilde{\omega}'_i$ pour tout i. La représentation $\tilde{\omega}$ est alors celle induite par $\tilde{\omega}'$ sur le dual $\tilde{V}$ de $\tilde{V}'$, qui est un espace projectif pointé. Si la forme bilinéaire β_Δ n'est pas dégénérée, les hyperplans

$$H_i = \{x | x \in V', (x - v'_i, v'_i)\beta_\Delta = 0\},$$

ensembles des points fixes des $\tilde{\omega}'_i$, se coupent en un point $\tilde{0}$, invariant par $G\tilde{\omega}'$, et la représentation $\tilde{\omega}'$ (resp. $\tilde{\omega}$) n'est pas essentiellement différente de ω' (resp. ω); de façon précise, l'espace $\tilde{V}'$ (resp. $\tilde{V}$) peut être muni d'une structure d'espace vectoriel invariante par $G\tilde{\omega}'$ (resp. $G\tilde{\omega}$) telle que la représentation linéaire $\tilde{\omega}'$ (resp. $\tilde{\omega}$) soit équivalente à ω' (resp. ω). Dans tous les cas, V peut être canoniquement identifié avec l'espace vectoriel tangent à $\tilde{V}$ en son centre (point distingué) et ω est alors la représentation de G dans cet espace, induite par $\tilde{\omega}$.

3. CHAMBRES. HYPERPLANS RADICIELS. LE CÔNE $\Omega(\Delta)$. FIDÉLITÉ DE LA REPRÉSENTATION ω

Conservons les notations du § 2 et posons $C = C_{\Sigma(\Delta)}$; C est donc le c.s.o. ensemble des combinaisons linéaires à coefficients strictement positifs des v_i $(i \in \Sigma(\Delta))$.

Nous appellerons *chambres* (de la géométrie $\Gamma\omega^*$) les images par ω^* des drapeaux de hauteur n de Γ, c'est-à-dire les transformés de C par les éléments de G, *murs* d'une chambre les hyperplans de V définis par les faces à $n-1$ dimensions de celle-ci, *hyperplans radiciels* les murs de toutes les chambres, et *demi-espaces radiciels* les demi-espaces fermés limités par des hyperplans radiciels. Notons immédiatement que

3.1. *L'adhérence d'un c.s.o. appartenant à $\Gamma\omega^*$ est l'intersection des demi-espaces radiciels qui le contiennent*

Nous désignerons par W_i l'hyperplan radiciel engendré par les v_j $(j \neq i)$.

3.2. Théorème et Définitions. *Etant donné un hyperplan radiciel W, il existe une et une seule transformation $\omega_W \in G\omega$ différente de l'identité et laissant invariants tous les points de W; on l'appellera la symétrie par rapport à W.*

Le transformé par ω_W d'un objet quelconque défini dans V sera dit *symétrique* de cet objet par rapport à W.

Démonstration. On peut, sans nuire à la généralité, supposer que $W = W_i$, auquel cas $\omega_i = r_i\omega$ jouit des propriétés requises. Réciproquement, soit $\omega_W \in G\omega$ une transformation quelconque possédant ces propriétés. La transformation $\omega'_W \in G\omega'$ qu'elle induit dans V' conserve chaque droite (affine) parallèle à la droite engendrée par v'_i, ainsi que la forme β_Δ. Tenant compte du fait que $(v'_i, v'_i)\beta_\Delta \neq 0$, on en déduit immédiatement que $\omega'_W = \omega'_i$, d'où $\omega_W = \omega_i$.

Remarque. Le théorème 3.2 pourrait aussi se déduire comme corollaire immédiat du suivant.

3.3. Théorème. *La représentation ω^* de Γ est fidèle. Plus précisément, les cônes images par ω^* de deux drapeaux distincts de Γ ont une intersection vide.*

3.4. Corollaire. *Les représentations ω et $\tilde{\omega}$ de G sont fidèles.*

3.5. Corollaire. *G est simplement transitif sur les chambres.*

3.6. Corollaire. *Les 2^n faces d'une chambre donnée quelconque sont deux à deux non équivalentes pour le groupe G.*

3.7. Corollaire. *L'intersection des adhérences* $\overline{a_m\omega}$ *d'une famille non vide quelconque de cônes* $a_m\omega$ $(a_m \in \Gamma)$ *est l'adhérence d'une face commune* $a\omega$ *de ces cônes. Le drapeau* a *est le plus grand support commun (p.g.s.c) des drapeaux* a_m.

3.8. Corollaire. *Toute famille incidente* $\{a_m\}$ *de drapeaux de* Γ *possède une somme* $a = \sum a_m$. *Si* a_m *est d'espèce* $\mathbf{i}_m$, a *est d'espèce* $\bigcup \mathbf{i}_m$.

3.9. Corollaire. *Tout drapeau est la somme des drapeaux minimaux qui le supportent.*

3.10. Corollaire. *Soient* a, $b \in \Gamma$ *deux drapeaux d'espèces* $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ *respectivement. Si* $b \leq a$, *la différence* $a - b$ *existe et est un drapeau d'espèce* $\mathbf{i} - \mathbf{j}$.

3.11. Corollaire. *Si* $\mathbf{i}_1, \dots, \mathbf{i}_p$ *désignent des parties quelconques de* $\Sigma(\Delta)$,

$$\bigcap G_{\mathbf{i}_m} = G_{\bigcup \mathbf{i}_m}.$$

3.12. Corollaire. *Si un élément de* G *laisse invariant un cône* $a\omega$ $(a \in \Gamma)$, *il laisse invariants tous les points de ce cône.*

Les diverses étapes de la démonstration du théorème 3.3 seront mises sous forme de lemmes.

3.13. Lemme. *Soient* i, $j \in \Sigma(\Delta)$, $g \in G^{i,j}$ *(groupe engendré par* r_i *et* r_j*), et* D *l'intersection des demi-espaces radiciels limités par* W_i *et* W_j *et contenant* C. *L'intersection* $W_i \cap \overline{Cg}$ *est l'adhérence d'une face à* $m = n-2$ *ou* $n-1$ *dimensions de la chambre* Cg. *Si* $W_i = W_k g$ $(k \in \Sigma(\Delta))$ *(cas où* $m = n-1$, i.e. *où* W_i *est un mur de* Cg*),* $r_i = g^{-1} r_k g$. *Enfin, si* $W_i g \neq W_i$ *et* W_j, *on a* $W_i g \cap D = W_i \cap W_j \cap D$.

Démonstration. Soient V_1 la variété linéaire engendrée par les v_h $(h \in \Sigma(\Delta), h \neq i, j)$, c'est-à-dire la variété des points de V invariants par tous les éléments de $G^{i,j}$, G° le groupe de Coxeter engendré par deux générateurs r_i° et r_j° et défini par la relation $(r_i^\circ r_j^\circ)^{\delta_{ij}} = 1$, φ l'homomorphisme de G° dans G défini par $r_i^\circ \varphi = r_i$, $r_j^\circ \varphi = r_j$, ω° la représentation linéaire de G° dans le plan V/V_1 induite par la représentation $\varphi \circ \omega$, et C°, W_i°, W_j°, D° les projections de C, W_i, W_j, D dans V/V_1. On voit aisément que ω° est la représentation naturelle de G°, que C° est une chambre de cette représentation dont W_i°, W_j° sont les murs, et que $\overline{C^\circ} = D^\circ$ est l'intersection des demi-espaces radiciels de ω° limités par W_i° et W_j° et contenant C°. D'autre part, W_i et W_j sont les seuls murs de C contenant V_1, par conséquent, si $W_i = W_k g$, $k = i$ ou j. De ces remarques, il résulte immédiatement que la proposition à démontrer sera vraie pour G si elle l'est pour G°, c'est-à-dire pour $n = 2$, mais dans ce cas, c'est une proposition de géométrie euclidienne plane, facile à démontrer.

3.14. Lemme. *Pour tout* $g \in G$ *et tout* $i \in \Sigma(\Delta)$, $W_i \cap \overline{Cg}$ *est l'adhérence d'une face de* Cg. *Si* $W_i = W_k g$ $(k \in \Sigma(\Delta))$ *(cas où* W_i *est un mur de* Cg*),* $r_i = g^{-1} r_k g$.

Démonstration. Notons (I_m) la proposition énoncée, dans le cas où $g = r_{i_1} \cdots r_{i_m}$ est le produit de m facteurs r_i, et énonçons d'autre part la proposition

(II_m) *Soient* $i, j, i_1, \dots, i_m \in \Sigma(\Delta)$, $g = r_{i_1} \cdots r_{i_m}$ *et* $g' \in G^{ij}$. *Alors,* $W_i g' \cap \overline{Cg}$ *est l'adhérence d'une face de* Cg, *et si* $W_i g' = W_k g$, $g'^{-1} r_i g' = g^{-1} r_k g$.

(II_0) est une partie du lemma 3.13. Cela étant, la démonstration se fera par induction selon le schéma suivant: $(II_{m-1}) \Rightarrow (I_m)$, et $(II_{m-1}) + (I_{m'})(m' \leq m) \Rightarrow (II_m)$. Pour montrer que (II_{m-1}) implique (I_m), il suffit de poser, dans (II_{m-1}), $j = i_m$ et $g' = r_{i_m}$, et de tout transformer ensuite par r_{i_m}. Il nous reste donc à établir la seconde implication. Nous distinguerons deux cas selon que Cg est ou non contenu dans l'intersection D des demi-espaces radiciels limités par W_i et W_j et contenant C.

Soit $Cg \subset D$. Il résulte alors du lemme 3.13 que $\overline{Cg} \cap W_i g' = \overline{Cg} \cap W_i$, ou $\overline{Cg} \cap W_j$, ou encore $\overline{Cg} \cap W_i \cap W_j$. En outre si $W_i g' = W_k g$, l'hyperplan $W_i g'$ est un mur de Cg, donc $W_i g' = W_i$ ou W_j et on a, suivant le cas, toujours en vertu de 3.13, $g'^{-1} r_i g' = r_i$ ou r_j. Mais alors, la propriété à démontrer se ramène à (I_m), si on tient compte du fait que l'intersection des adhérences de deux faces de Cg est encore l'adhérence d'une face de Cg.

Supposons à présent que $Cg \not\subset D$, et soit p le plus grand entier tel que $Cr_{i_p} \cdots r_{i_m} \not\subset D$. Posons $g_1 = r_{i_{p+1}} \cdots r_{i_m}$ et $g_2 = r_{i_p} g_1$. On a $Cg_1 \subset D$ et $Cg_2 \not\subset D$. D'autre part, en vertu de (I_{m-p+1}), $W_i \cap Cg_2 = W_j \cap Cg_2 = \emptyset$. Par conséquent $Cg_2 \cap D = \emptyset$. Mais Cg_1 et Cg_2 ont en commun une face à $n-1$ dimensions, à savoir $C_{\mathbf{i}} g_1$, avec $\mathbf{i} = \Sigma(\Delta) - \{i_p\}$. Celle-ci doit nécessairement être contenue dans la frontière de D, donc dans W_i ou W_j, c'est-à-dire qu'on a $W_{i_p} g_1 = W_i$ ou W_j, d'où, en vertu de (I_{m-p}), $g_1^{-1} r_{i_p} g_1 = r_h$, avec $h = i$ ou j. De cette dernière relation, on tire

$$g = r_{i_1} \cdots r_{i_p} g_1 = r_{i_1} \cdots r_{i_{p-1}} r_{i_{p+1}} \cdots r_{i_m} r_h \,,$$

et on se ramène alors à (II_{m-1}) en transformant toutes les données par r_h (qui appartient à G^{ij}). □

3.15. Lemme. *Soit* $g = r_{i_1} \cdots r_{i_m} \in G$. *Si les chambres* C *et* Cg *sont situées de part et d'autre de l'hyperplan* W_i (i.e. *ne sont pas contenues dans le même demi-espace radiciel limité par* W_i), *le produit* gr_i *peut s'écrire sous la forme d'un produit de* $m-1$ *générateurs* r_j.

Démonstration. Soit p le plus grand entier tel que $Cr_{i_p} \cdots r_{i_m}$ soit contenu dans le demi-espace limité par W_i et ne contenant pas C, et $g_1 = r_{i_{p+1}} \cdots r_{i_m}$. En procédant exactement comme dans la seconde partie de la démonstration précédente on montre que $g_1^{-1} r_{i_p} g_1 = r_i$, d'où

$$gr_i = r_{i_1} \cdots r_{i_p} g_1 r_i = r_{i_1} \cdots r_{i_{p-1}} r_{i_{p+1}} \cdots r_{i_m} \,. \qquad \square$$

3.16. Lemme. *Si* $Cg \cap C \neq \emptyset$, $g = 1$.

1°) G est un groupe fini;
2°) La forme β_Δ est définie positive;
3°) $\Omega = V$.
Lorsqu'elles sont vérifiées, l'image sphérique de $\Omega = V$ a une structure naturelle de sphère euclidienne, et nous dirons alors que Δ est de *type sphérique*. Les graphes de ce type ont été déterminés par H.S.M. Coxeter.

(b) Un graphe Δ sera dit de *type euclidien* (resp. *hyperbolique*) si l'intérieur du cône Ω est un demi-espace ouvert (resp. l'intérieur d'un cône quadratique de signature $++\cdots+-$), et de *type proprement euclidien* (resp. *hyperbolique*) si en outre $\Omega - \{0\}$ est ouvert; suivant le cas, l'intérieur de l'image sphérique de Ω, ou cette image elle-même, a une structure naturelle d'espace euclidien (resp. de Lobatchevski). Pour que le graphe Δ soit de type proprement euclidien, il faut et il suffit qu'il soit connexe et que la forme β_Δ soit semi-définie (les graphes de ce type ont été déterminés par E. Witt). Pour qu'un graphe soit de type proprement euclidien ou proprement hyperbolique, il faut et il suffit qu'il ne soit pas de type sphérique mais que tous ses sous-graphes propres le soient (les graphes de ce type ont été déterminés par F. Lannér). Les graphes de type euclidien sont les sommes directes d'un graphe de type proprement euclidien et d'un graphe de type sphérique. Pour qu'un graphe soit de type hyperbolique, il faut et il suffit qu'il soit connexe, qu'il ne soit pas de type sphérique ou proprement euclidien, mais que tous ses sous-graphes propres soient de l'un de ces deux types.

(c) Les seuls graphes Δ tels que l'image projective de la frontière de l'adhérence du cône Ω soit une variété algébrique sont les sommes directes de graphes des types considérés plus haut.

(d) Si Δ est de type hyperbolique, la forme β_Δ est non dégénérée et de signature $++\cdots+-$ (la frontière de $\overline{\Omega}$ étant alors l'une des deux "moitiés" du cône d'équation $(x,x)\beta_\Delta = 0$). La réciproque n'est pas vraie. En fait, le cas où β_Δ est non dégénérée et de signature $++\cdots+-$ apparaît en quelque sorte comme le "cas général"; on peut voir, par exemple, qu'il en est toujours ainsi dès que tous les δ_{ij} sont supérieurs à un entier A suffisamment grand (dépendant peut-être de l'ordre n de Δ – l'auteur n'est pas en mesure de préciser ce point).

Géométrie résiduelle

(a) Soient $\mathbf{i}$ une partie de $\Sigma(\Delta)$, a un drapeau d'espèce $\mathbf{i}$ et $\Delta_\mathbf{i}$ le graphe déduit de Δ en lui retirant l'ensemble de sommets $\mathbf{i}$. Alors, la géométrie résiduelle de Γ par rapport à a, qui est de façon évidente une $P(\Delta_\mathbf{i})$-géométrie, est isomorphe, en tant que telle, à la géométrie de Coxeter $\Gamma(\Delta_\mathbf{i})$.

(b) Le groupe $G_\mathbf{i}$, engendré par les r_i ($i \in \Sigma(\Delta)-\mathbf{i}$), est défini par celles des relations (1.1) qui concernent ceux-ci (en particulier, il est isomorphe à $G(\Delta_\mathbf{i})$).

Automorphismes, Isomorphismes

Les seuls $P(\Delta)$-automorphismes de la géométrie $\Gamma(\Delta)$ sont les éléments de $G(\Delta)$. Deux géométries de Coxeter $\Gamma(\Delta)$ et $\Gamma(\Delta')$ sont isomorphes si et seulement si les graphes Δ et Δ' le sont.

Les géométries de Coxeter sont des géométries d'incidence

(a) En particulier, toute famille de drapeaux deux à deux incidents est incidente.

(b) En terme de sous-groupes, la propriété précédente se traduit comme suit: si **i**, **j**, **k** sont trois parties de $\Sigma(\Delta)$, on a $G_{\mathbf{i}} \cdot (G_{\mathbf{j}} \cap G_{\mathbf{k}}) = (G_{\mathbf{i}} \cap G_{\mathbf{j}}) \cdot (G_{\mathbf{i}} \cap G_{\mathbf{k}})$, ou encore, $G_{\mathbf{i}} \cap (G_{\mathbf{j}} \cdot G_{\mathbf{k}}) = (G_{\mathbf{i}} \cdot G_{\mathbf{j}}) \cap (G_{\mathbf{i}} \cdot G_{\mathbf{k}})$. Ces relations restent vérifiées si on remplace un des trois sous-groupes $G_{\mathbf{i}}$, $G_{\mathbf{j}}$, $G_{\mathbf{k}}$ par un sous-groupe conjugué.

Ombres

(a) Soient $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \subseteq \Sigma(\Delta)$. On dira que **j** *sépare* **i** et **k** si aucune composante connexe du graphe déduit de Δ en lui retirant **j** ne renferme à la fois un sommet appartenant à **i** et un sommet appartenant à **k**, que **k** est *réduit* mod. **i** si aucune de ses parties propres ne le sépare de **i**, qu'un drapeau est *réduit* mod. **i** si son espèce l'est, on appellera *réduction* de **k** mod. **i** la plus petite partie $\mathbf{k}'$ de **k** séparant **k** et **i**, et enfin *réduction* mod. **i** d'un drapeau d'espèce **k** le sous-drapeau d'espèce $\mathbf{k}'$ de celui-ci.

(b) Soit $E_{\mathbf{i}}$ l'ensemble des drapeaux d'espèce **i**. Deux drapeaux ont même ombre sur $E_{\mathbf{i}}$ si et seulement s'ils ont même réduction mod. **i**; par conséquent, les ombres de drapeaux sur $E_{\mathbf{i}}$ sont en correspondance biunivoque avec les drapeaux réduits mod. **i**. Soient a et b deux drapeaux réduits mod. **i**, d'espèces **j** et **k** respectivement; pour que l'ombre de a sur $E_{\mathbf{i}}$ soit contenue dans celle de b, il faut et il suffit que a et b soient incidents et que **j** sépare **i** et **k**.

(c) L'intersection d'une famille quelconque d'ombres de drapeaux sur $E_{\mathbf{i}}$ est encore l'ombre d'un drapeau sur $E_{\mathbf{i}}$.

Pavages et pavés

(a) On supposera ici que Δ est connexe et que ses sommets peuvent être numérotés de 1 à n de telle façon que $\delta_{ij} = 2$ pour tout couple (i,j) tel que $|i-j| \geq 2$ (cela signifie que Δ ne présente ni cycle ni ramification). Soient E_1 l'ensemble des drapeaux d'espèce 1 (extrémité de Δ) et ω la représentation naturelle de Γ. Pour tout drapeau a d'espèce i $(1 \leq i \leq n)$, on notera $a\pi$ le cône $\bigcup_b b$, où la réunion est étendue à tous les drapeaux b supportés par a et dont l'espèce est constituée exclusivement de sommets $\leq i$ (i.e. séparant 1 et i). Le cône $a\pi$ sera appelé le *pavé d'espèce i* correspondant à a (pour le choix donné de la numérotation des sommets de Δ). Le "pavage" ainsi défini jouit des propriétés suivantes:

La réunion de tous les pavés est le cône Ω.

Les pavés d'espèce i sont des cônes convexes de dimension i.

L'intersection $a\pi \cap b\pi$ de deux pavés d'espèces i et j est un pavé $c\pi$ d'espèce strictement inférieure à i et j. Le drapeau c est aussi le drapeau réduit dont l'ombre sur E_1 est l'intersection des ombres de a et b (autrement dit, π définit un isomorphisme du treillis des ombres de drapeaux sur E_1 sur le treillis des pavés).

La figure affine constituée par un pavé d'espèce i dépend seulement de la partie du graphe Δ comprise entre les sommets 1 et i.

(b) Les résultats précédents redonnent en particulier les résultats classiques sur les polytopes réguliers et les pavages réguliers des espaces euclidiens et de Lobatchevski (cf. Coxeter et Moser, loc. cit.); on peut les obtenir comme cas particuliers de résultats encore plus généraux, mais moins agréables à énoncer, portant sur un graphe Δ quelconque et une partie privilégiée $\mathbf{i}$ de $\Sigma(\Delta)$ (jouant le rôle du sommet privilégié 1 dans le cas particulier envisagé plus haut).

Morphismes et couples de drapeaux génériques. Spécialisations

(a) Soient A une $P(\Delta)$-géométrie et φ_1, φ_2 deux $P(\Delta)$-morphismes de celle-ci dans $\Gamma(\Delta)$. On dira que φ_1 est une *spécialisation* de φ_2 (resp. que φ_1 et φ_2 sont *équivalentes*) s'il existe un $P(\Delta)$-endomorphisme (resp. un $P(\Delta)$-automorphisme) α de $\Gamma(\Delta)$ tel que $\varphi_1 = \varphi_2\alpha$. Un $P(\Delta)$-morphisme de A dans $\Gamma(\Delta)$ sera dit *générique* si tout autre $P(\Delta)$-morphisme de A dans $\Gamma(\Delta)$ en est une spécialisation. Les couples de drapeaux d'espèces $\mathbf{i}$ et $\mathbf{j}$ données pouvant être identifiés canoniquement avec les $P(\Delta)$-morphismes d'une géométrie A constituée par deux drapeaux non comparables d'espèces $\mathbf{i}$ et $\mathbf{j}$ dans $\Gamma(\Delta)$, nous pourrons parler de spécialisation et d'équivalence de couples de drapeaux, et de couples de drapeaux génériques.

(b) Pour que deux $P(\Delta)$-morphismes d'une $P(\Delta)$-géométrie A dans $\Gamma(\Delta)$ soient équivalents, il faut et il suffit que chacun d'eux soit une spécialisation de l'autre.

(c) Soient (a, b) et (a', b') deux couples de drapeaux. Pour que (a, b) soit une spécialisation de (a', b'), il faut et il suffit que pour toute chaîne de drapeaux d'extrémités a' et b', il existe une chaîne de même espèce et d'extrémités a et b. Il suffit aussi que cela soit vrai pour toute chaîne tendue d'extrémités a' et b'.

(d) Deux drapeaux a, a' seront dits *opposés* si les cônes $a\omega$ et $a'\omega$ le sont. Si Δ est connexe, la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe des drapeaux opposés est que Δ soit de type sphérique (i.e. que $G(\Delta)$ soit fini), auquel cas tout drapeau a possède un opposé a'; en outre, les drapeaux a et a' sont de même espèce, sauf si Δ est le schéme de Dynkin de l'une des algèbres de Lie $A_n (n > 1)$, D_{2m+1} ou E_6, auquel cas l'espèce de a' est transformée de l'espèce de a par l'unique permutation d'ordre 2 de $\Sigma(\Delta)$ qui induit un automorphisme de Δ. Δ étant toujours supposé connexe, la condition nécessaire et suffisante pour qu'un couple (a, b) de drapeaux différents de 0 soit générique (de son espèce), est que Δ soit de type sphérique et que b soit incident à l'opposé de a (ou, ce qui revient au même, que a soit incident à l'opposé de b). De ces propositions, on déduit aisément les conditions pour qu'un drapeau possède un opposé ou pour qu'un couple de drapeaux soit générique dans le cas général (Δ quelconque).

Sous-géométries convexes

(a) Soit Γ' une sous-géométrie de $\Gamma(\Delta)$. Les trois conditions suivantes sont équivalentes: (i) Etant donné un drapeau quelconque a n'appartenant pas à Γ', il existe un $P(\Delta)$-endomorphisme de Γ ne conservant pas a et dont la restriction à Γ' soit l'identité; (ii) Tout sous-drapeau d'un drapeau appartenant à Γ' appartient encore à Γ', et le cône Ω', réunion des cônes $a\omega$ ($a \in \Gamma'$) est convexe; (iii) Ω' est l'intersection de Ω et d'une famille de demi-espaces radiciels. Lorsque ces conditions sont remplies, nous dirons que Γ' est une sous-géométrie *convexe* de Γ.

(b) Tous les drapeaux maximaux d'une sous-géométrie convexe de Γ ont même hauteur; celle-ci sera appelée la *hauteur* de la sous-géométrie en question. Les sous-géométries convexes de hauteur n de Γ sont les images de Γ par ses $P(\Delta)$-endomorphismes idempotents.

Sous-géométrie déterminée par deux drapeaux

(a) On appellera sous-géométrie *déterminée* par deux drapeaux a et b, la plus petite sous-géométrie convexe qui les contient, c'est-à-dire la géométrie constituée par tous les drapeaux invariants par tout $P(\Delta)$-endomorphisme de Γ conservant a et b. Un drapeau appartenant à cette sous-géométrie sera dit *intermédiaire* entre a et b.

(b) Pour que deux couples de drapeaux (a, b) et (a', b') soient équivalents, il faut et il suffit qu'il existe un $P(\Delta)$-isomorphisme de la sous-géométrie déterminée par a et b sur celle déterminée par a' et b', qui applique a sur a' et b sur b'.

(c) Pour qu'une chaîne de drapeaux $a_1, \ldots, a_n$ soit tendue, il faut et il suffit que, pour tout triple d'entiers i, j, k tels que $1 \leq i \leq j \leq k \leq n$, a_j soit intermédiaire entre a_i et a_k. Pour qu'un drapeaux c soit intermédiaire entre deux drapeaux a et b, il faut et il suffit qu'il existe une chaîne tendue d'extrémités a et b qui contienne c, sauf si a et b sont des drapeaux minimaux opposés, auquel cas on doit avoir $c = a$ ou b.

(d) Soient Δ de type sphérique (i.e. $G(\Delta)$ fini), (a, b) un couple générique de drapeaux, et a' l'opposé de a. La géométrie déterminée par a et b a même hauteur que le drapeau $a' + b$ (qui est défini puisque a' et b sont incidents). Si a et b sont minimaux et non opposés, elle se réduit à une chaîne dont les éléments sont alternativement de hauteurs 1 et 2, et qui est alors la seule chaîne tendue d'extrémités a et b.

Projection

(a) Étant donnés deux drapeaux a et b, il existe un drapeau b_a, appelé *projection* de b sur a, défini par l'une quelconque des trois propriétés suivantes: (i) b_a est maximum dans l'ensemble des drapeaux supportés par a et intermédiaires entre a et b; (ii) Si $x \in a\omega$ et $y \in b\omega$, tout point du segment $[xy]$ suffisamment voisin de x est contenu dans $b_a\omega$; (iii) b_a est supporté par a et si V_a désigne la variété linéaire engendrée par $a\omega$, la projection du cône $b\omega$ dans V/V_a est contenue dans celle de $b_a\omega$.

(b) Γ_a désignant la géométrie résiduelle d'un drapeau a donné, l'application $\Gamma \to \Gamma_a$ qui envoie tout drapeau b sur sa projection est un morphisme (mais non un $P(\Delta)$-morphisme!).

(c) Le stabilisateur de b_a dans G est l'intersection des stabilisateurs de a et b. On en déduit immédiatement que l'intersection d'une famille quelconque de stabilisateurs de drapeaux (c'est-à-dire de sous-groupes conjugués à des sous-groupes de la forme $G_{\mathbf{i}}$, avec $\mathbf{i} \in \Sigma(\Delta)$) est encore le stabilisateur d'un drapeau.

N.B. Les propriétés de la projection sont un outil essentiel pour la démonstration de la plupart des résultats énoncés dans ce § 4 (par suite, l'ordre d'exposition adopté ici ne conviendrait pas à un exposé avec démonstrations).