Notice sur les travaux mathématiques de
Christophe SOULÉ

Membre de l'Académie des Sciences,
Directeur de Recherches au CNRS,
Institut des Hautes Études Scientifiques.

La discipline qui a le plus stimulé et focalisé ma recherche mathématique est sans doute la *géométrie des nombres*. On entend par là l'étude des *réseaux euclidiens*, c'est-à-dire les sous-groupes discrets à quotient compact d'un espace euclidien réel (Figure 1). La lecture à seize ans du théorème de Minkowski, selon lequel un tel réseau rencontre la boule unité en dehors de l'origine dès que son covolume est assez petit (Figure 1), m'a émerveillé[1]. Qu'on puisse en déduire des énoncés arithmétiques aussi fondamentaux que la finitude du groupe des classes d'un anneau d'entiers algébriques ou le calcul du rang de ses unités ne cesse de m'étonner. Même si les analogies et les outils algébriques ont souvent guidé mes travaux, mon objectif premier a été de développer les *méthodes pour la théorie des nombres* et, de préférence, des méthodes géométriques et topologiques. Comme on le verra, j'ai pu montrer quelques résultats en arithmétique mais, plus fréquemment, ce sont d'autres mathématiciens qui ont appliqué les résultats de nature plus abstraite et générale que j'avais obtenus, seul ou en compagnie de mon collaborateur durant plusieurs années, H. Gillet, de Chicago.

Outre les réseaux euclidiens, j'ai aussi croisé plusieurs fois les *nombres de Bernoulli*. Il s'agit des coefficients b_n, $n \geq 1$, de la série

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 + \sum_{n \geq 1} b_n \, \frac{x^n}{n!} \, . \tag{1}$$

On a ainsi $b_1 = -\frac{1}{2}$, $b_2 = \frac{1}{6}$, $b_3 = 0$, $b_4 = -\frac{1}{30}, \ldots, b_{12} = -\frac{691}{2730}, \ldots$ Un des charmes de ces nombres est d'être liés aussi bien à la fonction zêta de Riemann $\zeta(s)$, par la formule

$$\zeta(1-n) = (-1)^{n-1} \, \frac{b_n}{n} \, , \tag{2}$$

qu'au théorème de Fermat, par le résultat de Kummer au dix-neuvième siècle : si un nombre premier impair p ne divise aucun des numérateurs des nombres b_n, $n \geq 1$, l'équation

$$x^p + y^p = z^p$$

n'a pas de solution entière non triviale. Par la suite je noterai w_n le dénominateur de $b_n/2n$ quand n est pair, et $w_n = 2$ quand n est impair.

Mon travail a d'abord porté sur les *groupes arithmétiques* et la *K-théorie algébrique*, puis je me suis engagé résolument, en 1984, vers le développement de la *géométrie d'Arakelov*

[1] En dimension deux, le réseau hexagonal est optimal ; les abeilles l'ont su avant nous.

en dimension quelconque. J'ai ainsi pu voir comment mes travaux de K-théorie servaient à d'autres mathématiciens. Par contre, je ne pense pas que le cadre très général que Gillet et moi avons mis au point pour la géométrie d'Arakelov ait encore donné ses meilleurs fruits. J'ai bon espoir qu'il pourra un jour servir à la preuve de nouveaux résultats sur les équations diophantiennes ou les valeurs de fonctions L.

Mais il est temps de décrire plus précisément mes travaux passés.

1. Groupes discrets, groupes arithmétiques

1.1. J'ai commencé la recherche sous la direction de R. Godement. Son séminaire portait sur les représentations des groupes de Lie et la théorie de Langlands des formes automorphes. J'en ai gardé un respect immense (et paralysé) pour celle-ci, mais je fus plus attiré par un thème géométrique proposé par Godement : l'étude des *groupes discrets* via leur action sur des espaces topologiques. Je lus les textes de Serre sur "La cohomologie des groupes discrets" et "Arbres et amalgames". Si un groupe agit sur un arbre avec domaine fondamental un segment, Serre montre que ce groupe est le produit amalgamé des stabilisateurs des extrémités de ce segment. Mon premier résultat, obtenu au début de ma troisième année à l'ENS, généralise ceci en dimension quelconque, en donnant une condition nécessaire et suffisante pour qu'un groupe soit amalgame d'une famille de sous-groupes le long de leurs intersections. Il fit l'objet d'une note aux Comptes Rendus [1].

Je me suis aussi intéressé à la question de savoir quand le groupe des matrices à coefficients dans un anneau est de présentation finie [2] [4].

1.2. Un exemple intéressant d'une action discrète d'un groupe sur un espace topologique est le suivant. Si G est un groupe de Chevalley sur un corps F, et si $F[t]$ est l'anneau des polynômes sur F, le groupe discret $G(F[t])$ agit sur un immeuble affine de Bruhat-Tits, associé au groupe $G(F((t)))$. Je montre dans [8] que cette action a même domaine fondamental que celle du groupe de Weyl ("sphérique") sur l'appartement standard de l'immeuble. Là aussi, c'est la généralisation d'un résultat de Serre pour le groupe GL_2. Outre un énoncé d'amalgame, elle fournit des informations cohomologiques sur $G(F[t])$. Par exemple, si F est un corps fini de caractéristique p et si $\ell \neq p$ est un nombre premier, la cohomologie de $G(F[t])$ à coefficients $\mathbb{Z}/\ell$ est la même que celle de $G(F)$. Knudson a poursuivi cette étude dans le cas où F est de caractéristique zéro (1995).

1.3. L'étude des réseaux euclidiens mentionnée dans l'introduction est liée à celle du groupe $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ des matrices $n \times n$ à coefficients entiers et déterminant un. Si l'on choisit une base dans un réseau Λ de rang n, un produit scalaire euclidien sur $\Lambda \otimes \mathbb{R}$ est la donnée d'une forme quadratique définie positive en n variables

$$\varphi((x_i)) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij}\, x_i\, x_j$$

($a_{ij} = a_{ji} \in \mathbb{R}$) (Figure 2). Un changement de base orientée de Λ correspond précisément à un changement linéaire par une matrice γ de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ des variables (x_i) dans la forme φ. On obtient ainsi une nouvelle forme quadratique $\gamma \cdot \varphi$. La *réduction des formes quadratiques*, initiée par Gauss, consiste à chercher γ de sorte que $\gamma \cdot \varphi$ ait des coefficients aussi petits que possible. Elle intervient dans la question de savoir quels entiers sont représentés par une forme quadratique donnée.

En langage plus moderne, le groupe $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ opère à gauche sur l'espace symétrique $X = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ (les formes quadratiques à scalaire près) et la théorie de la réduction fournit un domaine fondamental pour cette action. Le cas de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est bien connu (Figure 3). Serre montre que la réunion Y des translatés par $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ du bord inférieur du domaine fondamental habituel est un arbre (Figure 3), d'où il suit que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est un amalgame et que l'on peut aisément calculer sa cohomologie.

J'ai étendu ces résultats au groupe $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ [5]. Je montre d'abord, avec Lannes, que, si $n \geq 2$, le sous-espace $Y \subset X$ des formes quadratiques à n variables possédant un ensemble de vecteurs minimaux de rang n est un rétracte de X. Quand $n = 3$, j'exhibe un domaine fondamental pour l'action de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ sur Y (Figure 4), et je décris le quotient de Y par ce groupe. Je déduis de ce calcul que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$, $n \geq 2$, est l'amalgame d'une famille finie de sous-groupes finis. Mais surtout j'obtiens un *calcul complet de la cohomologie à coefficients entiers de* $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$. Si $\Gamma = \mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ opérait sans point fixe sur Y, cette cohomologie ne serait autre que celle du quotient $\Gamma \backslash Y$. Mais tout élément d'ordre fini dans Γ fixe une forme quadratique, et la cohomologie de Γ est reliée par une suite spectrale à celle de ses sous-groupes finis. On parvient cependant à mener le calcul jusqu'au bout (la cohomologie de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ est tuée par 12).

1.4. Le calcul exact de la cohomologie de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$, $n \geq 4$, s'avérant très difficile, on peut s'intéresser à des classes de cohomologie particulières de ce groupe. En 1975, Sullivan montre que la restriction à $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ de la *classe d'Euler* du fibré réel universel de rang n est une classe de torsion, tuée par w_n. J'eus envie d'étendre son joli argument topologique aux *classes de Chern*, mais je n'y parvins pas.

Par contre, je pus montrer que cette borne w_n est optimale. En effet, on sait depuis Minkowski que les nombres de Bernoulli ont à voir avec $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$: si p est un nombre premier impair, l'ordre maximal d'un p-sous-groupe fini de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ est la p-partie du produit des nombres w_m pour $m \leq n$. En restreignant la classe d'Euler (ou les classes de Chern) aux sous-groupes finis de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ on peut ainsi donner une borne inférieure à l'ordre de ces classes [3]. Le cas $p = 2$ est plus délicat et a fait l'objet par la suite de plusieurs articles d'Eckmann et Mislin.

2. K-théorie des entiers d'un corps de nombres

2.1. Une des plus belles approches de la réduction des formes quadratiques est celle de Voronoi (1907), qui utilise les *formes parfaites*. Une forme quadratique φ est parfaite si les seules formes quadratiques ayant le même ensemble de vecteurs minimaux sont les multiples de φ. Voronoi montre qu'il n'y a qu'un nombre fini de formes parfaites de rang n, modulo l'action de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$, et qu'elles permettent de définir une décomposition cellulaire invariante de X (un peu "épaissi"). De cette décomposition cellulaire on peut déduire des renseignements précieux sur la cohomologie de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$. C'est cette approche que j'ai suivi, après Lee et Szczarba, pour l'étude des groupes $\mathrm{SL}_4(\mathbb{Z})$ et $\mathrm{SL}_5(\mathbb{Z})$ [6] [64].

Voronoi a donné la liste des formes parfaites en rang inférieur à cinq, puis Barnes l'a fait en rang six (1957), et Jaquet en rang sept (1991). On peut donc, en principe, calculer avec les groupes $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$, $n \leq 7$. Mais il s'agit d'un calcul énorme. Récemment, avec Elbaz-Vincent et Gangl, nous avons entrepris cette étude par ordinateur [74]. Le cas $n = 5$ prend quelques minutes, $n = 6$ prend deux jours, et nous n'avons pas encore abordé $n = 7$. Ceci nous donne de bons résultats sur la cohomologie de $\mathrm{SL}_5(\mathbb{Z})$ et $\mathrm{SL}_6(\mathbb{Z})$.

2.2. Un calcul voisin est celui de la *K-théorie algébrique* de l'anneau des entiers. Au début des années soixante-dix, Quillen a associé à tout anneau A une suite de groupes abéliens $K_m(A)$, $m \geq 0$. Il en donne plusieurs définitions, dont aucune n'est très simple. Une de ces définitions consiste à introduire un H-espace $\mathrm{BGL}(A)^+$ dont l'homologie est celle du groupe $\mathrm{GL}(A)$, réunion des groupes $\mathrm{GL}_N(A)$, $N \geq 1$, pour des inclusions naturelles. On pose alors, si $m > 0$,

$$K_m(A) = \pi_m \, \mathrm{BGL}(A)^+ \, .$$

Il y a donc un morphisme d'Hurewicz

$$K_m(A) \to H_m(\mathrm{GL}(A), \mathbb{Z}) \tag{3}$$

dont j'ai montré [20] que son noyau est tué par un petit entier fonction de m (résultat précisé par Arlettaz). Par ailleurs les groupes $H_m(\mathrm{GL}(A), \mathbb{Z})$ et $H_m(\mathrm{GL}_N(A), \mathbb{Z})$ coïncident si N est grand (par rapport à m et à la dimension de A). Par conséquent, le calcul de l'homologie de $\mathrm{GL}_N(A)$ permet aussi celui de la K-théorie de A.

Dans le cas où $A = \mathbb{Z}$ on savait avant la définition de Quillen que $K_0(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $K_1(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2$, et $K_2(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2$. Un résultat difficile de Lee et Szczarba (1976) dit que $K_3(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/48$. Mes calculs sur $\mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$ [64] ont permis à Rognes de montrer il y a deux ans que $K_4(\mathbb{Z}) = 0$. Mes travaux récents avec Elbaz-Vincent et Gangl [74] mènent aux faits que $K_5(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ et que $K_6(\mathbb{Z}) = 0$ (le calcul de la 2-torsion est conséquence des théorèmes de Vœvodsky).

2.3. Quand j'ai abordé l'étude de la K-théorie algébrique, on savait calculer les groupes $K_m(A)$, $m \geq 0$, si A est corps fini (Quillen). On savait aussi que si $A = \mathcal{O}_F$ est l'anneau des entiers d'un corps de nombres F les groupes de $K_m(A)$ sont finis si $m > 0$ est pair et de type fini si m est impair (leur rang s'exprime en fonction du nombre de places réelles et complexes de F) (Quillen, Borel).

Une magnifique conjecture de Lichtenbaum, encore ouverte à ce jour, relie l'ordre des groupes de K-théorie de $\mathcal{O}_F$ aux valeurs de la fonction zêta $\zeta_F(s)$ du corps de nombres F. Elle affirme que, si $i > 0$ est un entier pair et si F est totalement réel,

$$|\zeta_F(1-i)| = 2^d \, \frac{\# \, K_{2i-2}(\mathcal{O}_F)}{\# \, K_{2i-1}(\mathcal{O}_F)} \, , \tag{4}$$

où d est le degré de F sur $\mathbb{Q}$ et $\# \, X$ désigne le cardinal d'un ensemble fini X. Par exemple, pour $F = \mathbb{Q}$, cette conjecture s'écrit (cf. (2))

$$\frac{b_i}{2i} = (-1)^{i/2} \frac{\# \, K_{2i-2}(\mathbb{Z})}{\# \, K_{2i-1}(\mathbb{Z})} \, .$$

En utilisant l'homotopie stable des sphères, Quillen avait exhibé dans $K_{2i-1}(\mathbb{Z})$ un sous-groupe cyclique d'ordre w_i. Harris et Segal avaient étendu ceci aux corps de nombres. Mais rien n'était connu sur les numérateurs des nombres de Bernouilli.

2.4. La lecture de l'article de Grothendieck "Classes de Chern et représentations linéaires des groupes discrets" (1966) allait me permettre de progresser vers la conjecture de Lichtenbaum. Dans cet article, Grothendieck associe des classes de Chern étales équivariantes à l'action d'un groupe discret sur un schéma muni d'un fibré vectoriel. Dans son style très catégorique, il insiste sur le fait que ces classes étales sont beaucoup mieux adaptées aux phénomènes arithmétiques que les classes topologiques. L'exemple qu'il en donne est le fait que la i-ème classe de Chern de la représentation naturelle de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ est annulée par w_i. Il n'eut guère de mal à me convaincre, moi qui avait vainement tenté un an plus tôt de prouver ce résultat par la méthode topologique de Sullivan !

Je décidai donc d'apprendre la géométrie algébrique (en commençant par la cohomologie étale ...) et d'exploiter les classes de Chern étales de Grothendieck dans le calcul de la K-théorie algébrique [9]. En effet, le composé du morphisme d'Hurewicz (3) et du cap-produit avec les classes de Chern étales équivariantes de la représentation naturelle fournit des morphismes

$$c_{i,k} : K_m(A;\mathbb{Z}/n) \to H^k_{\text{ét}}(\mathrm{Spec}\,(A\,[1/n]), \mu_n^{\otimes i}) \tag{5}$$

à chaque fois que les entiers naturels m, i et k vérifient la relation

$$m + k = 2i\ . \tag{6}$$

Ici A est un anneau commutatif unitaire, $A\,[1/n]$ est son localisé en dehors de n et $\mathrm{Spec}\,(A\,[1/n])$ le schéma associé. Le groupe de K-théorie à coefficients $K_m(A,\mathbb{Z}/n)$ est défini comme le m-ième groupe d'homotopie à coefficients de $\mathrm{BGL}(A)^+$, et $\mu_n^{\otimes i}$ est la i-ème puissance tensorielle du faisceau étale des racines n-ièmes de l'unité.

Ayant défini la flèche $c_{i,k}$, je montre qu'elle est compatible aux produits et aux transferts en K-théorie et en cohomologie. Si A est l'anneau des entiers d'un corps de nombres j'en déduis que, si $i \geq 2$, *le morphisme* $c_{i,2}$ *est surjectif* (ou plutôt son conoyau est tué par $i!$).

2.5. Ce résultat de surjectivité de $c_{i,2}$ a plusieurs conséquences. D'abord, si i est pair, si F est totalement réel, et si ℓ est un nombre premier impair, il résulte de la conjecture principale de la théorie d'Iwasawa, démontrée par Mazur-Wiles puis Wiles dans les années 80, que la partie ℓ-primaire du nombre rationnel $\zeta_F(1-i)$ est le quotient de l'ordre des groupes $H^2_{\text{ét}}(\mathrm{Spec}\,(A\,[1/\ell]), \mathbb{Z}_\ell\,(i))$ et $H^1_{\text{ét}}(\mathrm{Spec}\,(A\,[1/\ell]), \mathbb{Z}_\ell\,(i))$, où $\mathbb{Z}_\ell\,(i)$ est la limite projective des faisceaux $\mu_{\ell^n}^{\otimes i}$, $n \geq 1$.

On en conclut que $\#\,K_{2i-2}(\mathcal{O}_F)$ est divisible par le *numérateur* de $\zeta_F(1-i)$. Par exemple, le groupe $K_{22}(\mathbb{Z})$ contient un élément d'ordre 691, le numérateur de $\zeta(-11) = 691/32760$. Ceci vient donc confirmer la conjecture de Lichtenbaum.

Mais on peut aussi utiliser la surjectivité de $c_{i,2}$ en sens inverse. En effet, puisque les groupes $K_m(\mathcal{O}_F)$ sont finis si m est pair, on en déduit que si $i \geq 2$, et quel que soit le corps de nombres F, le groupe $H^2(\mathrm{Spec}\,(\mathcal{O}_F[1/\ell]), \mathbb{Z}_\ell\,(i))$ est fini, et nul pour presque tout ℓ. Dans le cas général, c'est la seule méthode connue à ce jour pour prouver ce résultat.

2.6. Il fallut attendre une dizaine d'années pour que Kurihara remarque une autre conséquence (assez immédiate) de la surjectivité de $c_{i,2}$. Elle concerne la *conjecture de Vandiver*, dont Vandiver pensait qu'elle impliquerait le deuxième cas du théorème de Fermat. Soit p un nombre premier impair. Notons C le quotient par p du groupe de classes de $\mathbb{Q}(\sqrt[p]{1})$. La conjecture affirme que C ne contient aucun élément non nul invariant par la conjugaison complexe. Elle est connue si $p \leq 4.10^6$. Si $C^{(j)}$ est le sous-groupe de C des éléments de C où le groupe de Galois de $\mathbb{Q}(\sqrt[p]{1})$ sur $\mathbb{Q}$ agit par la j-ème puissance du caractère de Teichmüller, une reformulation dit que $C^{(j)} = 0$ quand j est pair.

Or un calcul standard montre querap2003

$$C^{(p-i)} = H^2_{\text{ét}}(\mathrm{Spec}\,(\mathbb{Z}\,[1/p], \mathbb{Z}_p\,(i))/p\,.$$

Si $p > i$, le morphisme $c_{i,2}$ fournit donc une surjection

$$K_{2i-2}(\mathbb{Z}) \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow C^{(p-i)}\,.$$

Comme $K_4(\mathbb{Z}) = 0$, Kurihara en déduit que $C^{(p-3)}$ est nul. Sitaraman a pu utiliser cette information et des arguments à la Vandiver pour déduire certains cas du théorème de Fermat.

J'ai repris récemment cette discussion en estimant le nombre de formes parfaites de rang donné [66]. Il en résulte une borne sur le nombre de cellules de Voronoi dans l'espace symétrique, modulo $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$. Un joli argument de Gabber permet alors de borner l'ordre de la torsion dans l'homologie de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ et dans la K-théorie de $\mathbb{Z}$. En définitive j'obtiens que

$$C^{(p-n)} = 0 \qquad \text{si} \qquad \log(p) > n^{200n^4}\,.$$

Cette borne gigantesque est le seul résultat connu sur la conjecture de Vandiver pour les grands nombres premiers. Celle-ci et les énoncés de 2.5 sont donc une application de la géométrie des nombres à la théorie algébrique des nombres, par l'intermédiaire de la K-théorie algébrique.

J'ai étendu aux corps de nombres les résultats de [66], et obtenu, par des méthodes de géométrie des nombres, une borne explicite de la torsion de la K-théorie supérieure de ces anneaux [75].

2.7. L'article [9] est le premier à établir un lien entre la K-théorie supérieure et la cohomologie étale, après les travaux de Tate calculant le K_2 d'un corps de nombres en termes d'un groupe H^2 galoisien. Il fut suivi de nombreux travaux. Gillet développa une théorie des classes de Chern. Dwyer et Friedlander définirent une K-théorie étale, qui leur permit de se débarasser du $i!$ dans 2.4. Merkurjev et Suslin étendirent le théorème de Tate à un corps quelconque. Thomason obtint un résultat très général après "inversion de l'élément de Bott". Récemment, les brillants travaux de Vœvodsky calculent complètement la K-théorie supérieure à coefficients $\mathbb{Z}/2$ des variétés algébriques en termes de la cohomologie étale modulo 2. On s'attend à ce que le cas $\mathbb{Z}/\ell$, ℓ impair, suive de ses méthodes, ce qui finirait de montrer la conjecture de Lichtenbaum (4).

3. Les éléments cyclotomiques et les régulateurs p-adiques

3.1. Si F est un corps de nombres, $A = \mathcal{O}_F$ son anneau d'entiers et $\ell \neq 2$ un nombre premier, je démontre dans [10] que l'application

$$c_{i,1} : K_{2i-1}(A) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^1_{\text{ét}}(\operatorname{Spec}(A[1/\ell]), \mathbb{Z}_\ell(i))$$

est un isomorphisme modulo torsion si $i \geq 2$. Autrement dit, je donne une construction ℓ-adique des éléments d'ordre infini trouvés par Borel dans la K-théorie. Pour ce faire, on part d'une suite d'unités (u_n) dans les extensions cyclotomiques de F, compatibles pour les normes entre ces extensions. On considère la norme vers F des u_n tordus à la Tate. On constate que les éléments ainsi obtenus sont dans la limite projective

$$\varprojlim_n K_{2i-1}(A; \mathbb{Z}/\ell^n) = K_{2i-1}(A) \otimes \mathbb{Z}_\ell\,.$$

Modulo torsion, cette construction décrit complètement la source et le but de $c_{i,1}$ [10].

J'appelle *éléments cyclotomiques* les éléments ainsi obtenus quand la suite (u_n) est constituée d'unités cyclotomiques, si F est abélien sur $\mathbb{Q}$. Ce sont des généralisations à la K-théorie (et à la cohomologie étale) des unités cyclotomiques dans $K_1(A) = A^*$.

3.2. Une propriété importante des unités cyclotomiques est que l'application régulateur (resp. régulateur p-adique) envoie ces unités sur la valeur en $s = 1$ d'une fonction L de Dirichlet (resp. d'une fonction L p-adique à la Kubota-Leopoldt). Soit F_p le produit des complétés de F aux places divisant p. J'appelle *régulateur p-adique* l'application composée de $c_{i,1}$ (avec $\ell = p$) avec le morphisme naturel

$$H^1_{\text{ét}}(\operatorname{Spec}(A[1/p]), \mathbb{Z}_p(i)) \to H^1(F_p, \mathbb{Z}_p(i))/\text{tors} \simeq \mathbb{Z}_p^d\,,$$

et où d est le degré de F sur $\mathbb{Q}$. Je montre dans [10] que l'indice dans $\mathbb{Z}_p^d$ de l'image des éléments cyclotomiques est la valeur en $s = i \geq 2$ d'une fonction L p-adique. En particulier, il est non nul quand p ne divise pas les numérateurs des nombres de Bernouilli.

3.3. Je reprends l'étude des éléments cyclotomiques dans [24]. Je montre qu'ils sont toujours d'ordre infini et engendrent un sous-groupe d'indice fini dans $H^1(\operatorname{Spec}(A[1/\ell]), \mathbb{Z}_\ell(i))$. Si $i = 2$, je prouve aussi que les éléments cyclotomiques sont dans l'image de l'application $K_3(A) \to K_3(A) \otimes \mathbb{Z}_\ell$. Ce dernier résultat fut démontré pour tout $i \geq 2$ par Beilinson et Deligne (travail repris par Hüber et Wildeshaus).

3.4. Une application inattendue des résultats de 3.2 est due à W. Hsiang et al. On sait exprimer la conjecture des hautes signatures de Novikov pour un groupe discret Γ en terme de la K-théorie hermitienne de l'algèbre $\mathbb{Z}[\Gamma]$. Hsiang et al. réussirent à démontrer l'analogue de cette conjecture pour le groupe linéaire par une méthode p-adique, et réduction au cas $\Gamma = \{1\}$. Ils utilisent dans ce dernier cas les éléments cyclotomiques.

3.5. Les éléments cyclotomiques jouent aussi un rôle important dans l'étude, par Ihara, Deligne et al., de l'action du groupe de Galois absolu de $\mathbb{Q}$ sur le groupe fondamental de la droite projective privée des points 0, 1 et ∞. Ihara (et Drinfeld) décrivent cette action par des séries formelles non commutatives à deux variables. Le fait que les éléments cyclotomiques sont d'ordre infini me permet de montrer que certains coefficients de ces séries sont non nuls.

Deligne retrouve ces éléments cyclotomiques dans son travail sur $\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$. La conjecture dite de Deligne-Ihara affirme qu'une certaine algèbre est libre et engendrée par des éléments duaux des éléments cyclotomiques.

3.6. Enfin, les éléments cyclotomiques sont au centre des travaux récents de Kölster-Nguyen Quang Do et Hüber-Kings, qui prouvent les conjectures de Lichtenbaum et Bloch-Kato concernant la valeur de la fonction zêta d'un corps de nombres F abélien sur $\mathbb{Q}$ aux entiers $i > 1$ tels que $\zeta_F(1-i) = 0$. Leur preuve est une synthèse de théorèmes de Beilinson avec les résultats de 3.2 et 3.3.

3.7. Le principe de la construction des éléments cyclotomiques est général. Je l'ai repris dans le cas d'une courbe elliptique à multiplication complexe E [23]. Je définis des régulateurs p-adiques et des "éléments elliptiques" dans la K-théorie de E à coefficients $\mathbb{Z}_p$, dont l'image par le régulateur s'exprime en fonction des valeurs entières de la fonction L p-adique de E. Je dois, pour cela, avoir recours aux fonctions L p-adiques à deux variables. Ce travail a servi à Kings pour montrer la conjecture de Bloch-Kato pour E.

4. Opérations en K-théorie algébrique

4.1. On notera que, en général, du même groupe $K_m(A)$ sont issues *plusieurs* classes de Chern $c_{i,k}$ (cf. (5) et (6)). C'est ce qui attira mon intérêt sur les opérations sur les groupes $K_m(A)$ que l'on peut déduire des représentations des schémas en groupes GL_N. En effet, celles-ci permettent de définir une filtration décroissante $F_\gamma^i K_m(A)$ de $K_m(A)$ (due à Grothendieck quand $m = 0$). Si $i \neq j$, le morphisme $c_{i,k}$ est nul sur le quotient $\mathrm{gr}_\gamma^j K_m(A) = F_\gamma^j K_m(A)/F_\gamma^{j+1} K_m(A)$. Il convient donc de restreindre $c_{i,k}$ à $\mathrm{gr}_\gamma^i K_m(A)$.

L'article [20] est une étude systématique des opérations sur la K-théorie algébrique. Je définis ces opérations sur la K-théorie d'un schéma quelconque. Je borne la longueur de la γ-filtration F_γ^i à l'aide des théorèmes de stabilité de Suslin. Je montre que les opérations sont compatibles aux diverses suites exactes et suites spectrales calculant la K-théorie, ce qui fait de $\mathrm{gr}_\gamma^i K_m(X)$ une bonne théorie cohomologique sur les schémas.

Quand X est régulier et nœthérien, je montre que les opérations d'Adams agissent par un scalaire sur trois diagonales de la suite spectrale de Gersten-Quillen. Il en résulte que celle-ci dégénère modulo torsion et l'on obtient des isomorphismes

$$\mathrm{CH}^i(X) \otimes \mathbb{Q} \simeq \mathrm{gr}^i K_0(X) \otimes \mathbb{Q} \simeq \mathrm{gr}_\gamma^i K_0(X) \otimes \mathbb{Q} \tag{7}$$

pour tout entier $i \geq 0$, où $\mathrm{CH}^i(X)$ est le groupe des cycles de codimension i sur X modulo équivalence linéaire (*groupe de Chow*), et gr^i est le gradué associé à la filtration de $K_0(X)$ par la codimension des supports.

On notera que (7) concerne le groupe de Grothendieck classique $K_0(X)$, mais que sa preuve utilise la K-théorie de Quillen. Ces isomorphismes étaient connus quand X est une variété sur un corps, mais ils sont nouveaux pour un schéma régulier quelconque. Leur intérêt, comme l'avait déjà souligné Grothendieck, est que le produit tensoriel des fibrés algébriques induit un accouplement naturel

$$\mathrm{gr}^i_\gamma K_0(X) \otimes \mathrm{gr}^j_\gamma K_0(X) \to \mathrm{gr}^{i+j}_\gamma K_0(X) .$$

Par conséquent (7) permet de définir une intersection sur les cycles algébriques sur un schéma régulier nœthérien arbitraire (modulo torsion et équivalence linéaire). Cela me fut utile quand d'abordai la théorie d'Arakelov (cf. 5.2 ci-dessous).

4.2. Avec Gillet nous nous sommes aperçus que les isomorphismes (7), et leur variante à support, *démontre une conjecture de Serre* [25]. Celle-ci affirme que si A est un anneau local régulier de dimension d, M et N deux A-modules de type fini tels que $M \otimes N$ soit annulé par l'idéal maximal de A et que la somme des codimensions des supports de M et N est supérieure à d, la multiplicité d'intersection $\chi(M,N)$ (une somme alternée des longueurs de groupes Tor) est nulle. Notre preuve s'écrit d'ailleurs sans référence à la K-théorie de Quillen. Elle vaut aussi quand A est d'intersection complète, et un argument similaire montre une conjecture de Szpiro sur le comportement de $\chi(M,N)$ sous l'action de Frobenius en caractéristique positive.

Cette conjecture de Serre a aussi été prouvée par Roberts. Plus tard, utilisant le théorème de De Jong, Gabber a montré que $\chi(M,N)$ est toujours positif ou nul.

4.3. Pour revenir aux classes de Chern $c_{i,k}$, notons que, puisque $k \geq 0$, l'égalité $m+k=2i$ implique qu'il n'y a pas de classe de Chern $c_{i,k}$ issue de $K_m(X)$ quand $2i > m$. Ceci m'a conduit à penser que $\mathrm{gr}^i_\gamma K_m(X) = 0$ quand $2i > m$. Beilison eut la même idée. Il imagina l'existence d'une *cohomologie motivique* $H^k(X, \mathbb{Z}(i))$ telle que $H^k(X, \mathbb{Z}(i)) \otimes \mathbb{Q}$ soit isomorphe à $\mathrm{gr}^i_\gamma K_m(X) \otimes \mathbb{Q}$. L'annulation ci-dessus signifie alors qu'il n'y a pas de cohomologie motivique en degrés négatifs. Il fallut plus d'une quinzaine d'années pour que Vœvodsky parvienne à définir cette cohomologie motivique. La *conjecture d'annulation* de Beilinson-Soulé reste ouverte. C'est le principal obstacle à surmonter pour définir une catégorie abélienne de motifs mixtes.

4.4. Les opérations sont aussi liées aux valeurs des fonctions L. C'est ainsi que les opérations "cannibales" de Bott et Adams agissent sur gr^i_γ par multiplication par les numérateurs des nombres b_i/i. Dans [12] je note le lien entre ces opérations cannibales et les éléments de Stickelberger. J'utilise aussi les opérations d'Adams pour comparer la K-théorie étale et la cohomologie étale des schémas. Ce résultat a servi à Thomason dans sa preuve de la conjecture de pureté cohomologique de Grothendieck. Il sert aussi à Niziol dans sa preuve des conjectures de Fontaine sur la cohomologie des variétés p-adiques.

4.5. Si $K'_m(X)$ est la K-théorie des faisceaux cohérents sur un schéma X, on peut aussi munir $K'_m(X)$ d'une γ-filtration. Quand X est un schéma de type fini sur $\mathbb{Z}$, je propose dans [13] que l'ordre du zéro en $s = i$ de la fonction zêta *naïve* de X est la somme alternée des rangs de groupes $\mathrm{gr}_i^\gamma K'_m(X)$, $m \geq 0$. Cet énoncé prolonge des conjectures de Tate sur cette fonction.

4.6. Mon premier travail avec Gillet porte sur la K-théorie des schémas et ses filtrations [65]. Notre objectif était de comparer la γ-filtration et la filtration par la codimension du support sur $K_m(X)$. Ceci s'avère difficile. Nous y parvenons en ramenant le problème au cas du groupe K_0 du schéma simplicial classifiant BGL_N. Ceci nous conduit à considérer la théorie homotopique des faisceaux simpliciaux et la K-théorie des faisceaux simpliciaux Zariski, et à comparer la suite spectrale de Gersten-Quillen avec celle provenant de la tour de Postnikov du faisceau de K-théorie. Nous avons commencé cet article très technique en 1983 et l'avons terminé en 1998.

Une des constructions intéressante de ce texte est celle d'opérations sur la K-théorie d'un schéma simplicial arbitraire. Elle a servi à Beilinson et Deligne pour le résultat signalé à la fin de la section 3.3.

5. Géométrie d'Arakelov et théorème de Riemann-Roch

5.1. En 1983 Faltings démontre la célèbre *conjecture de Mordell* : toute courbe sur $\mathbb{Q}$ de genre au moins deux n'a qu'un nombre fini de points rationnels. Autrement (et moins précisément) dit, si P est un polynôme à deux variables aux coefficients entiers, l'équation

$$P(x,y) = 0 \ , \quad x,y \in \mathbb{Q},$$

n'a, en général, qu'un nombre fini de solutions. Une notion essentielle dans la preuve de Faltings est celle de hauteur d'une variété abélienne, une notion issue de la théorie dite d'Arakelov. Ce jeune mathématicien russe avait développé au début des années soixante-dix une théorie d'intersection sur les surfaces arithmétiques, avec l'objectif avoué d'étendre la preuve de cette conjecture de Mordell du cas géométrique (où $\mathbb{Q}$ est remplacé par un corps de fonctions) au cas arithmétique. Il cessa malheureusement son œuvre mathématique dès 1975. Après sa preuve de la conjecture de Mordell en caractéristique positive, Szpiro s'intéressa aux travaux d'Arakelov. Puis Faltings développa l'étude des surfaces arithmétiques et Deligne considéra les familles de courbes.

Je décidai d'apprendre cette théorie en l'enseignant dans un cours de troisième cycle, et pensai à l'étendre en dimension supérieure. Gillet fit le même projet de son côté et nous avons alors décidé de collaborer. Comme le proposait Manin dans un article programmatique, l'objectif de ce travail était d'obtenir un théorème de Riemann-Roch-Grothendieck arithmétique général. A l'époque, *aucun* des termes de ce théorème n'était défini dans la généralité requise. Notre choix impliquait un travail de fondement, laissant à d'autres le soin d'aborder les énigmes proprement arithmétiques du sujet.

5.2. L'idée générale d'Arakelov est la suivante. Si X est un schéma sur $\mathbb{Z}$ (quasi-projectif et plat) la géométrie algébrique de ce schéma n'est pas suffisante pour résoudre les questions arithmétiques le concernant. Il convient de compléter chaque notion de cette géométrie par une donnée analytique sur la variété holomorphe $X(\mathbb{C})$ des points complexes de X. Par exemple, le schéma $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ doit être complété par un point ∞, et une surface arithmétique X doit être complétée par la surface de Riemann $X(\mathbb{C})$ au-dessus de ∞ (Figure 5). Un fibré algébrique E sur X doit être complété par la donnée d'une métrique hermitienne lisse h sur la restriction $E_{\mathbb{C}}$ de E à $X(\mathbb{C})$, d'où un *fibré hermitien* $\overline{E} = (E,h)$. De même un cycle algébrique Z sur X doit être complété par la donnée d'un *courant de Green* sur $X(\mathbb{C})$.

Arakelov avait introduit ces notions en dimension relative un. Il imposait de plus aux métriques et aux fonctions de Green des conditions de normalisation et d'harmonicité par rapport à une métrique fixée sur $X(\mathbb{C})$. Nous avons choisi de renoncer à ces restrictions, car les formes harmoniques ne sont en général pas stables par produit ni par image inverse. Si Z est un cycle sur X, notons δ_Z le courant sur $X(\mathbb{C})$ d'intégration sur $Z(\mathbb{C})$ (dû à Lelong). Nous appelons courant de Green pour Z la donnée d'un courant g sur $X(\mathbb{C})$ tel que $dd^c g + \delta_Z$ soit un courant lisse, c'est-à-dire donné par l'intégration contre une forme différentielle ω. En codimension un, cette condition est vérifiée grâce à l'équation dite de Poincaré-Lelong. Le quotient du groupe libre engendré par les couples (Z, g), où Z est un cycle de codimension p et g un courant de Green pour Z, par une relation d'équivalence linéaire naturelle définit le *groupe de Chow arithmétique* $\widehat{\mathrm{CH}}^p(X)$, $0 \leq p \leq \dim(X)$. Une condition de normalisation à la Arakelov définit un sous-groupe de $\widehat{\mathrm{CH}}^p(X)$.

L'article [31] est consacré à la définition et l'étude des groupes de Chow arithmétiques. On montre qu'ils sont reliés par diverses suites exactes aux groupes de Chow usuels de X et aux formes différentielles sur $X(\mathbb{C})$, qu'ils sont contravariants en X et, surtout, qu'il existe un accouplement associatif et commutatif, l'*intersection arithmétique*

$$\widehat{\mathrm{CH}}^p(X) \otimes \widehat{\mathrm{CH}}^q(X) \to \widehat{\mathrm{CH}}^{p+q}(X) \otimes \mathbb{Q}\,. \tag{8}$$

Définir cet accouplement nécessite de surmonter plusieurs difficultés. La première concerne l'intersection de deux cycles sur X, pour laquelle nous utilisons les constructions évoquées dans les sections 4.1 et 4.2 ci-dessus. La seconde est que la définition d'un courant de Green pour l'intersection de deux cycles nécessite, en général, de faire le produit de deux distributions. Nous nous tirons de cette difficulté à l'aide du théorème d'Hironaka et l'introduction de courants de Green de type logarithmique. La vérification que le produit est commutatif, associatif et compatible à l'équivalence linéaire est difficile. Elle utilise l'énoncé précis d'Hironaka et une variante en K-théorie du lemme de déplacement de Chow.

Si l'on compose le produit (8) avec le morphisme de degré arithmétique

$$\widehat{\mathrm{CH}}^{\dim(X)}(X) \to \widehat{\mathrm{CH}}^1(\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})) = \mathbb{R}\,,$$

on obtient divers *nombres d'intersection arithmétiques* à valeurs réelles (quand leur analogue algébrique est à valeur entière).

5.3. Dans [32] nous associons à tout fibré hermitien sur X des *classes de Chern* $\widehat{c}_p(\overline{E})$ dans $\widehat{\mathrm{CH}}^p(X)$, $p \geq 0$. La forme ω associée à $\widehat{c}_p(\overline{E})$ n'est autre que la forme de Chern définie par la métrique h sur $E_{\mathbb{C}}$, notée $c_p(E_{\mathbb{C}}, h)$. En particulier, la classe $\widehat{c}_p(\overline{E})$ *dépend* du choix de la métrique sur E. Si h et h' sont deux métriques sur E, la différence $\widehat{c}_p(E,h) - \widehat{c}_p(E,h')$ est la classe du couple $(0, \widetilde{c}_p)$, où $\widetilde{c}_p$ est une classe secondaire introduite en 1962 par Bott et Chern, solution de l'équation

$$dd^c\, \widetilde{c}_p = c_p(E_{\mathbb{C}}, h) - c_p(E_{\mathbb{C}}, h')\,.$$

On notera que la motivation de Bott et Chern était de comprendre la théorie de Nevanlinna sur la distribution des valeurs d'applications méromorphes. Vojta a constaté un parallélisme entre les équations diophantiennes et la théorie de Nevanlinna. Les courants de Green et les classes de Bott-Chern permettent de mieux comprendre cette analogie. Par exemple, si Z est un sous-espace linéaire de l'espace projectif, la *forme de Levine*, introduite en théorie de Nevanlinna, fournit un courant de Green g explicite pour Z, et le couple (Z, g) représente une des classes de Chern $\widehat{c_p}$ du fibré hermitien standard sur l'espace projectif [38].

5.4. Notre construction des classes de Chern, et des autres classes caractéristiques, dans [32], se fait par l'étude des groupes de Chow arithmétiques des variétés Grassmanniennes. Nous calculons également les nombres d'intersections arithmétiques sur l'espace projectif. Ce sont des nombres rationnels, sommes de nombres harmoniques $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$. J'ai conjecturé que tous les *nombres de Schubert arithmétiques*, c'est-à-dire les nombres d'intersections des classes de Chern arithmétiques des fibrés hermitiens standards sur les Grassmanniennes, sont des nombres rationnels. Ceci fut démontré par Maillot, et le calcul exact de ces nombres a donné lieu depuis à de brillants travaux de Maillot, Tamvakis et al.

5.5. Un morphisme projectif $f : X \to Y$, s'il est lisse sur la fibre générique, induit un morphisme d'image directe des groupes de Chow arithmétiques de X vers ceux de Y. Il n'est par contre pas clair du tout comment définir une métrique sur l'image directe d'un fibré algébrique E sur X. Quillen a réfléchi à cette question. Il m'expliqua comment le fibré en droites $\lambda(E) = \det \mathrm{Rf}_*(E)$ sur Y doit être équipé de la métrique h_Q produit de la métrique L^2 sur les fibres de $X(\mathbb{C}) \to Y(\mathbb{C})$ par la *torsion analytique* de Ray-Singer du Laplacien à coefficients dans la restriction de $E_{\mathbb{C}}$ à ces fibres. Si, par exemple, la dimension relative est un, notons $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \ldots$ les valeurs propres non nulles de ce Laplacien Δ (avec multiplicité). La fonction zêta $\zeta_\Delta(s) = \sum_{i \geq 1} \lambda_i^{-s}$ converge si le nombre complexe s a une partie réelle supérieure à un, se prolonge de façon méromorphe au plan complexe, sans pôle en $s = 0$. La torsion analytique est alors le nombre

$$\det(\Delta) = \exp\left(-\frac{d}{ds}\,\zeta_\Delta(s)\,|_{s=0}\right) ,$$

aussi appelé le *déterminant régularisé* de Δ. Dans le cas d'une famille de surfaces de Riemann, Quillen avait vérifié que la métrique h_Q sur $\lambda(E)$ est lisse et que sa courbure est donnée par un théorème de Riemann-Roch valable au niveau des formes différentielles sur $Y(\mathbb{C})$, et pas seulement de sa cohomologie.

Gillet et moi nous sommes associés avec Bismut, qui venait d'étudier avec Freed une connexion sur $\lambda(E)$ définie par un procédé voisin. Dans les articles [27] [28] [29] nous étudions la métrique de Quillen h_Q dans le cas d'une famille quelconque. Nous montrons qu'elle est lisse, et nous calculons sa courbure ainsi que sa variation en fonction de la métrique sur $E_{\mathbb{C}}$ et sur le fibré tangent relatif de $X(\mathbb{C})$ sur $Y(\mathbb{C})$. Ainsi que le suggère le formalisme à la Arakelov, cette variation (aussi appelée "anomalie" par les physiciens) fait intervenir l'intégrale des classes secondaires à la Bott-Chern.

La maîtrise par Bismut des techniques analytiques de développement asymptotique du noyau de la chaleur et des superconnexions joue un rôle crucial dans ce travail et dans nos autres collaborations, l'avantage du point de vue Arakelov étant de pouvoir prédire certaines formules. Notons aussi que la comparaison des différents points de vue (par exemple celle de la définition algébrique de $\lambda(E)$ par Mumford avec la définition analytique qu'en donne Quillen) n'a pas toujours été facile.

5.6. Une fois ces définitions posées, on s'attend à ce que le théorème de Riemann-Roch arithmétique affirme que la classe de Chern $\widehat{c}_1$ du fibré en droites hermitien $(\lambda(E), h_Q)$ soit l'image directe (en degré un) du produit de $\widehat{\mathrm{ch}}(\overline{E})$ par la classe de Todd arithmétique du fibré tangent relatif à $f : X \to Y$. Mais le cas le plus simple d'une telle égalité, $X = \mathbb{P}^1$, $Y = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ et $E = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$, s'avère faux. La raison en est que le déterminant régularisé du Laplacien sur la sphère n'est pas un nombre rationnel simple. Son calcul fait intervenir la dérivée en -1 de la fonction zêta de Riemann !

Gillet et moi eûmes l'idée qu'il fallait ajouter à la classe de Todd $\widehat{\mathrm{Td}}$ une *nouvelle classe caractéristique*, définie dans le cas d'un fibré en droites par une série $R(x)$. En calculant la torsion analytique du fibré constant sur tous les espaces projectifs, il était possible de prédire un à un les coefficients de la série $R(x)$. C'est ce que je fis à l'aide de l'ordinateur. Une fois la formule devinée, Zagier parvint à démontrer l'identité combinatoire générale [33]. La formule pour $R(x)$ est la suivante :

$$R(x) = \sum_{\substack{m\geq 1\\ m \text{ impair}}} \left(2\,\zeta'(-m) + \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m}\right)\zeta(-m)\right)\frac{x^m}{m!}\,, \tag{9}$$

où $\zeta(s)$ désigne la fonction zêta de Riemann et $\zeta'(s)$ sa dérivée. On notera l'analogie des formules (9) avec (1) (compte-tenu de (2)), qui sert à définir la classe de Todd usuelle.

Je ne connais aucun autre contexte où les nombres $\zeta'(-m)$ interviennent dans une classe caractéristique. Ceci permet d'espérer des applications de la géométrie d'Arakelov à la théorie des valeurs des fonctions L. C'est ainsi que Bismut, Köhler et Rœssler ont étudié l'analogue équivariant de la série $R(x)$, qui intervient dans l'analogue équivariant (théorème de Lefschetz) du théorème de Riemann-Roch arithmétique. Et récemment, Köhler et Rœssler ont montré comment retrouver, à l'aide du théorème de Lefschetz arithmétique, un théorème de Colmez exprimant la hauteur des variétés abéliennes de type CM en termes des dérivées logarithmiques à l'origine des fonctions L de Dirichlet: ces nombres apparaissent par le biais de la correction apportée au genre de Todd équivariant. Kudla a aussi conjecturé des généralisations de la formule de Gross-Zagier faisant intervenir des nombres d'intersection arithmétique.

5.7. Le théorème de Riemann-Roch arithmétique, formulé dans [33], est démontré dans [48]. La preuve nécessite de reprendre dans le cadre Arakelov la stratégie de Grothendieck, ce qui est vraiment difficile car aucune des classes considérées n'est invariante par déformation. On se ramène au cas d'une immersion. Il faut dans ce cas considérer les classes de Bott-Chern singulières le long d'une sous-variété [41], montrer qu'elles se comportent bien par déformation au cône normal [42], et aussi comparer la métrique de Quillen d'un fibré sur une sous-variété avec celle d'une résolution sur la variété ambiante. Ce dernier point est dû à Bismut dans une série d'articles dont le dernier, écrit avec Lebeau, fait cinq cents pages ! Là-aussi la théorie d'Arakelov a aidé à prévoir le résultat et, en particulier, l'apparition de la série $R(x)$ dans le calcul d'immersion [43]. De plus, l'absence de résolution des singularités pour les variétés sur $\mathbb{Z}$ nous a conduit à un énoncé à la Fulton-Mac Pherson quand les fibres spéciales ne sont pas lisses, ce qui nécessite un travail supplémentaire [48]. L'énoncé de cet article est en degré un car il en est ainsi chez Bismut et Lebeau, mais le travail récent de Bismut, qui étend en tous degrés l'article de Bismut-Lebeau, permet aussi, par les arguments de [48], de montrer l'énoncé général, formulé dans [33].

Ce théorème de Riemann-Roch-Grothendieck est sûrement le plus difficile auquel il m'a été donné de contribuer. Notons que, dans le cas des courbes, le résultat a une signification en *physique des cordes*, car il calcule exactement la norme d'un isomorphisme dû à Mumford entre fibrés déterminants, c'est-à-dire la fonction de partition des cordes bosoniques fermées.

6. Amplitude, hauteurs et minima successifs

6.1. Les thèmes de recherche en géométrie d'Arakelov sont très nombreux. La quasi-totalité des énoncés de la géométrie algébrique classique semblent avoir un analogue "arithmétique" dans cette théorie. De plus, celle-ci permet d'aborder de nouvelles questions arithmétiques, par exemple dans le domaine des équations diophantiennes.

Par exemple, nous étudions dans [34] l'analogue arithmétique du polynôme de Hilbert-Samuel. Soit $\overline{L}$ un fibré inversible hermitien sur une variété régulière X, projective et plate sur $\mathbb{Z}$. Considérons la caractéristique d'Euler-Poincaré

$$\chi_Q(\overline{L}^{\otimes n}) := \widehat{c}_1(\lambda(\overline{L}^{\otimes n}), h_Q) \in \widehat{\mathrm{CH}}^1(\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})) = \mathbb{R}$$

des puissances de $\overline{L}$. Le théorème de Riemann-Roch implique que, quand n tend vers $+\infty$, le terme dominant de l'asymptotique de $\chi_Q(\overline{L}^{\otimes n})$ est $\widehat{c}_1(\overline{L})^d n^d/d!$, où d est la dimension de X. Si la courbure de $\overline{L}_{\mathbb{C}}$ est positive, Bismut et Vasserot montrent que la torsion analytique des puissances de $\overline{L}_{\mathbb{C}}$ croit comme $n^{d-1}\log(n)$. Supposons de plus que L est ample sur X et que $\widehat{c}_1(\overline{L})^d$ est positif. On obtient que le covolume du réseau $H^0(X, L^{\otimes n})$ pour la norme L^2 tend vers zéro quand n tend vers l'infini. Par conséquent – grâce au théorème de Minkowski ! – on peut conclure que, si n est assez grand, $L^{\otimes n}$ a une section globale sur X de norme inférieure à un.

Une telle section petite est ce dont Vojta avait besoin pour finir sa *nouvelle preuve de la conjecture de Mordell* (1989), inspirée des méthodes de l'approximation diophantienne. Elle est l'analogue pour les variétés des "polynômes auxiliaires", qui interviennent toujours en théorie de l'approximation.

En somme, la géométrie d'Arakelov permet de faire une synthèse entre la géométrie algébrique et la géométrie des nombres.

Ce thème de l'*amplitude arithmétique* fut ensuite développé plus avant par Zhang, Abbès-Bouche, et Rumely et al..

6.2. A la suite du travail de Vojta sur les courbes, Faltings étudia l'approximation diophantienne sur les variétés abéliennes et obtint la preuve des conjectures de Lang sur les points rationnels de ces variétés. Il construisit des sections petites sans utiliser la théorie d'Arakelov, mais eut recours à celle-ci pour définir la *hauteur des variétés projectives*. Si $X \subset \mathbb{P}^N$ est une telle variété et si $\overline{L} = \overline{\mathcal{O}(1)}/X$ est le fibré canonique muni de sa métrique de Fubini-Study, la hauteur $h(X)$ n'est autre que le nombre $\widehat{c}_1(\overline{L})^{\dim(X)}$ (calculé sur une altération de X à la De Jong si X n'est pas régulière). Faltings montre plusieurs propriétés utiles de cette hauteur.

Dans l'article [44] je montre que $h(X)$ est aussi la hauteur de la forme de Chow de X (plus un multiple explicite de son degré), un invariant utilisé par les spécialistes de la transcendance (Nesterenko, Philippon). Il en résulte qu'il n'y a qu'un nombre fini de variétés dont la hauteur et le degré sont inférieurs à une constante fixée.

Nous avons ensuite fait équipe avec Bost et Gillet pour étudier systématiquement les propriétés de la hauteur projective [52]. Nous montrons que $h(X)$ est supérieure à un multiple explicite du degré $\deg(X)$ de la variété $X(\mathbb{C})$, et égale à celui-ci si et seulement si X est le sous-espace linéaire de $\mathbb{P}^N$ défini par l'annulation de certaines des coordonnées. Un résultat curieux de ce long article est aussi le calcul de l'intégrale sur la sphère de $\log|R|$, où R est le polynôme résultant d'une famille de polynômes (de degrés arbitraires): c'est toujours un nombre rationnel ! Nous donnons aussi trois démonstrations d'un *théorème de Bézout arithmétique* de la forme

$$h(X \cap Y) \leq h(X)\,\deg(Y) + \deg(X)\,h(Y) + c\deg(X)\,\deg(Y)\,,$$

où la constante c ne dépend que des dimensions de X et Y.

6.3. Une des plus belles conjectures de la théorie d'Arakelov, non démontrée à ce jour, fut formulée par Parshin en 1986. Soit X une surface arithmétique semi-stable sur l'anneau des entiers d'un corps de nombres F. Notons ω^2 l'auto-intersection de la classe $\widehat{c_1}$ du fibré dualisant relatif de X, muni de la métrique définie par Arakelov. Parshin pense que ω^2 est inférieur à $\alpha \log|D| + \beta\,[F:\mathbb{Q}]$, où D est le discriminant absolu de F et $[F:\mathbb{Q}]$ son degré, et α, β sont des constantes. Il montre que cette conjecture implique une version *effective* de la conjecture de Mordell (le théorème de Faltings), et donc la conjecture *abc* et celle de Szpiro sur le discriminant des courbes elliptiques. Parshin note aussi l'analogie de son inégalité avec l'inégalité $c_1^2 \leq 3\,c_2$, connue pour les variétés de type général.

En 1988, Miyaoka a cru démontrer cette conjecture de Parshin (et donc le théorème de Fermat en degré assez grand) à l'aide de la géométrie d'Arakelov. Il s'avéra qu'il avait obtenu l'inégalité

$$\widehat{c_1}(\overline{E})^2 \leq 4\,\widehat{c_2}(\overline{E}) \tag{10}$$

pour tout fibré hermitien de rang deux sur une surface arithmétique dont la restriction à $X(\mathbb{C})$ est semi-stable. Si l'on applique (10) à une extension du fibré dualisant relatif ω par le faisceau constant, on obtient une borne supérieure pour ω^2, mais Miyaoka ne parvint pas à déduire de celle-ci l'inégalité de Parshin.

Je repris le travail de Miyaoka durant les années qui suivirent. Grâce au travail de Donaldson sur les métriques Einstein-Hermitiennes (qui m'avait déjà mis sur la piste des classes de Bott-Chern), je montrai que, dans le cas d'une extension de classe e, on peut borner $\widehat{c_2}(\overline{E})$ par $\log\|e\|$. J'obtins ainsi un *analogue arithmétique du théorème d'annulation de Kodaira* [54].

6.4. Ainsi, quand L est un fibré inversible ample sur X, la norme des éléments non nuls du réseau $H^1(X, L^{-1})$ est borné inférieurement par des nombres d'intersection arithmétique sur X. Ceci se traduit aussi par une borne supérieure sur le dernier minimum successif du réseau dual, c'est-à-dire, d'après la dualité de Serre, celui des sections de $\omega \otimes L$.

Rappelons que, si Λ est un réseau euclidien de rang n, on peut définir une suite croissante de nombres réels positifs $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$, appelés les *minima successifs* de Λ de la façon suivante : λ_k est le plus petit rayon d'une boule de $\Lambda \otimes \mathbb{R}$ centrée à l'origine dont l'intersection avec Λ engendre un sous-espace de rang au moins k. Une forme plus précise du théorème de Minkowski est que le produit $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n$ est essentiellement le covolume de Λ.

La géométrie d'Arakelov donne plusieurs renseignements utiles sur les minimas successifs des sections de fibrés hermitiens inversibles sur certaines variétés arithmétiques. Dans [56] je déduis de la théorie de la stabilité de Mumford une borne inférieure pour le premier minimum de $H^0(X, \omega \otimes L)$ si $\dim(X) = 2$. Quand $X(\mathbb{C})$ est une surface de type général, je borne aussi le quotient λ_n/λ_1 du réseau des sections d'une grande puissance du fibré canonique.

J'ai pu par la suite améliorer les résultats de [54] en bornant la moitié des minimas successifs par une expression quadratique. Pour cela j'utilise la réponse apportée par C.Voisin à une question que je lui avais posée sur les variétés sécantes de courbes [72].

Je crois que ce type de résultats pourra servir dans le futur, car la méthode de l'approximation diophantienne repose précisément sur des informations concernant les minima successifs.

7. Géométrie d'Arakelov non archimédienne

7.1. La théorie exposée dans la section 5 privilégie la place réelle de $\mathbb{Q}$, ce qui n'est pas satisfaisant du point de vue arithmétique. Au lieu d'un couple (Z, g) où Z est un cycle sur une variété sur $\mathbb{Z}$ et g un courant de Green sur ses points complexes, on préfèrerait considérer une variété $X_{\mathbb{Q}}$ sur les rationnels, un cycle algébrique sur $X_{\mathbb{Q}}$ et, pour toute place $p \leq \infty$, un courant de Green g_p pour Z. De même, on aimerait considérer des métriques p-adiques sur les fibrés algébriques sur $X_{\mathbb{Q}}$.

Avec Bloch et Gillet nous avons développé dans [55] une théorie d'Arakelov non archimédienne, en imitant avec les groupes de cycles l'idée de Raynaud selon laquelle la cohomologie rigide de Tate d'une variété sur un corps local est la limite des cohomologies de De Rham des modèles de cette variété. Si R est un anneau à valuation discrète, de corps de fractions K et de corps résiduel k, et si X est une variété projective et lisse sur K, nous considérons tous les modèles réguliers $\mathcal{X}$ de X sur R et leur fibre spéciale $\mathcal{X}_0 = \mathcal{X}_R \otimes k$. Celle-ci est en général singulière. Elle possède des groupes de Chow homologiques $\mathrm{CH}_*(\mathcal{X}_0)$ et des groupes de Chow cohomologiques $\mathrm{CH}^*(\mathcal{X}_0)$. Nous considérons la limite projective (resp. injective) de ces groupes comme un analogue des courants (resp. des formes différentielles) sur une variété complexe.

Nous développons ainsi un formalisme des groupes de Chow arithmétiques pour X tout à fait parallèle à celui des sections 5.2 et 5.3 ci-dessus. L'énoncé selon lequel la cohomologie des courants coïncide avec celle des formes différentielles est vrai dans ce contexte quand le théorème d'Hironaka est valable pour les modèles de X (donc quand k est de caractéristique zéro).

7.2. Un autre énoncé de géométrie complexe dont on peut chercher l'analogue non archimédien est le fait que les deux définitions de la cohomologie $\partial\overline{\partial}$ d'une variété compacte Kähler coïncident. Nous montrons dans [58] que ceci est vrai dans le contexte non archimédien si les groupes de cycles de chacune des strates d'un modèle semi-stable de X vérifient les conjectures standard (i.e. Lefschetz vache et la positivité de Hodge). La preuve consiste à adapter à ce contexte la théorie de la monodromie de Steenbrink, Saito et Deligne.

Les articles [55] et [58] conduisent à construire de nouveaux invariants cohomologiques de X à partir de la fibre spéciale d'un de ses modèles. Dans un travail non publié je me suis intéressé à la question de savoir si ces invariants satisfont une formule de Künneth, ce que j'ai montré dans un cas non trivial.

Une application de ce travail fut la définition, due à Künneman, d'un accouplement de hauteur p-adique sur les cycles algébriques d'une variété abélienne (jusque là on ne savait pas le faire en général sans admettre certaines conjectures).

7.3. Un aspect mystérieux de la théorie d'Arakelov non archimédienne est à nouveau la question de l'image directe des fibrés hermitiens. Avec Gillet, nous avons proposé une solution à ce problème [69]. L'analogue de la torsion analytique provient du fait que si $f : X \to Y$ est un morphisme propre de variétés sur K et $\underline{f} : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ un morphisme entre modèles de ces variétés, l'image directe par $\underline{f}$ d'un fibré sur $\mathcal{X}$ n'est pas compatible à des changements de modèles $\mathcal{X}' \to \mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}' \to \mathcal{Y}$. La famille des défauts est un courant (lisse si f est plat), appelé torsion analytique non archimédienne.

Nous obtenons dans [69] un analogue du théorème de Riemann-Roch arithmétique. Si k est de caractéristique zéro, la cohérence de nos constructions est garantie par la preuve récente (Włodarczyk et al.) de la factorisation de tout morphisme birationnel comme composé d'éclatements et de contractions.

Il serait intéressant d'avoir aussi une approche plus analytique dans le cas p-adique. Pour les courbes on dispose des travaux de Zhang, où le déterminant des Laplaciens sur les graphes joue un rôle analogue à celui de la torsion analytique sur les surfaces de Riemann.

8. Géométrie différentielle

8.1. Les invariants de géométrie complexe développés en K-théorie ou en géométrie d'Arakelov ont souvent des parallèles en géométrie différentielle, avec lesquels on peut les comparer. Dans l'article [22] je définis pour les régulateurs de Beilinson une K-théorie multiplicative dans le style de Karoubi, analogue à la K-théorie étale de Dwyer et Friedlander (cf. 2.7). Je compare également les classes caractéristiques de Cheeger-Simons d'un fibré plat sur une variété algébrique complexe à celles de Deligne-Beilinson. Ce travail a été généralisé par Brylinski et Dupont-Hain-Zucker.

8.2. Avec Gillet nous montrons dans [32] comment exprimer les régulateurs de Beilison sur K_1 en termes des classes de Bott-Chern. Ceci fut étendu au cas général par Burgos-Wang.

Dans l'article [35] nous exhibons un morphisme des groupes de Chow arithmétiques de X vers les caractères différentiels (dus à Cheeger et Simons) de la variété différentielle $X(\mathbb{C})$. Ce morphisme est fonctoriel et multiplicatif. Le rôle de la torsion analytique en théorie d'Arakelov est joué par l'invariant êta dans celle de Cheeger-Simons.

9. Motifs

9.1. Le premier travail où j'ai utilisé la notion de *motifs* de Grothendieck est l'article [17] concernant la K-théorie et les groupes de Chow d'une variété X projective et lisse sur un corps fini $\mathbb{F}_q$. L'endomorphisme de Frobenius F de la variété X agit sur les groupes en question. Or il coïncide avec l'opération d'Adams ψ^q et opère donc par multiplication par q^i sur $\mathrm{CH}^i(X)$ et $\mathrm{gr}^i_\gamma\, K_m(X)$. Par ailleurs F est induit par une correspondance algébrique, c'est-à-dire un cycle sur $X \times X$. Si $P(T)$ est le polynôme caractéristique de cette correspondance, le théorème de Hamilton-Cayley implique $P(F) = 0$, et par conséquent la multiplication par $P(q^i)$ est nulle sur $\mathrm{CH}^i(X)$ et $\mathrm{gr}^i_\gamma\, K_m(X)$.

Cet argument vaut si X est une courbe et montre (grâce au théorème de Weil) que $K_m(X) \otimes \mathbb{Q} = 0$ si $m > 0$, un résultat difficile de Harder. Il s'applique aussi aux variétés dont le motif se ramène à un produit de courbes, par exemple les variétés abéliennes, pour lesquelles je montre que l'équivalence homologique et l'équivalence linéaire coïncident. Ceci conduit à chercher à vérifier les conjectures standards pour les groupes de Chow de X. Je montre ainsi, dans certains cas, un théorème de Lefschetz vache pour ces groupes et une généralisation en codimension quelconque du théorème du cube pour les diviseurs.

9.2. L'article [15] avec Colliot-Thélène et Sansuc étudie le groupe de Chow de codimension deux $\mathrm{CH}^2(X)$ d'une variété X projective et lisse sur un corps k. L'outil essentiel est le théorème de Merkurjev-Suslin sur le groupe K_2 des corps (cf. 2.7). Si k est un corps fini nous montrons que la torsion de $\mathrm{CH}^2(X)$ est un groupe fini. Nous étudions aussi le cas où k est algébriquement clos et où k est un corps p-adique.

9.3. Au début des années soixante, Serre avait demandé s'il est possible, étant donné un entier $q \geq 0$, d'associer à toute variété quasi-projective X sur un corps k fixé des *nombres de Betti virtuels* $h^q(X) \in \mathbb{Z}$ tels que, si $Y \subset X$ est une sous-variété fermée,

$$h^q(X) = h^q(Y) + h^q(X - Y)$$

et, si X est projective et lisse, $h^q(X) \in \mathbb{N}$ soit le q-ième nombre de Betti de X. Ce problème est à l'origine de la théorie des poids de Grothendieck et Deligne. Une définition de $h^q(X)$ peut être donnée en termes de la filtration des poids de Deligne.

Dans un article plus récent sur les motifs, Serre revient sur cette question : peut-on associer à X un *motif virtuel* $[X]$ tel que, si $Y \subset X$ est comme ci-dessus,

$$[X] = [Y] + [X - Y]\,,$$

et, si X est projective et lisse, $[X]$ soit le motif canonique associé à X.

Gillet et moi avons répondu positivement à cette question quand k est de caractéristique zéro [59]. Nous utilisons pour cela le théorème d'Hironaka et la K-théorie supérieure (résolution de Gersten). Ce résultat implique qu'il existe des nombres de Betti virtuels à coefficients finis, et que la filtration des poids peut être définie sur la cohomologie à supports compacts et coefficients entiers.

Dans un travail non publié, grâce au théorème de De Jong, nous étendons notre résultat à la caractéristique positive.

Le résultat de [59] a été depuis beaucoup utilisé dans les travaux de Kontsevich, Denef-Lœser et autres sur l'intégration motivique.

9.4. L'analogie entre $\mathbb{Z}$ et une courbe sur un corps fini suggère (d'après 9.1) que les conjectures standards de Grothendieck (i.e. Lefschetz vache et la positivité de Hodge) ont des variantes en théorie d'Arakelov. Gillet et moi formulons de telles conjectures dans l'article [50]. Elles conduisent à des inégalités très fines pour les nombres d'intersections arithmétiques. Même dans le cas des variétés Grassmanniennes, elles sont difficiles à vérifier. Kresch et Tamvakis y sont parvenus, après un long calcul, pour les variétés $G(2,n)$.

10. Un corps de base pour l'arithmétique ?

10.1. Comme je l'ai dit en 5.2, la géométrie d'Arakelov fournit une sorte de compactification de la variété affine $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$. Mais, pour que l'analogie entre $\mathbb{Z}$ et une courbe projective et lisse soit complète, il faudrait que $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ soit défini sur un corps de base. C'est le *corps de caractéristique un*, ou *corps à un élément* $\mathbb{F}_1$ dont ont rêvé Tits et Manin. Certains de mes travaux sont inspirés de cette philosophie.

Par exemple, reprenons le théorème de Minkowski pour un réseau euclidien Λ (voir l'introduction). On remarque que son analogue géométrique est l'énoncé de Riemann selon lequel tout fibré de grand degré sur une courbe possède des sections globales. Dans [47], Gillet et moi montrons un analogue sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ du théorème de Riemann-Roch pour les courbes. Notons $\Lambda^* = \mathrm{Hom}(\Lambda, \mathbb{Z})$ le réseau euclidien dual de Λ, $h^0(\Lambda)$ le logarithme du nombre de points de Λ dans la boule unité, n la dimension de $\Lambda \otimes \mathbb{R}$, et V_n le volume de la boule unité standard. On a :

$$|h^0(\Lambda) - h^0(\Lambda^*) - \log(\mathrm{covolume}\,(\Lambda))| \leq n \log(6) - \log(V_n)\,.$$

10.2. Quand $\overline{E}$ est un fibré hermitien sur une variété arithmétique projective X, le résultat du paragraphe précédent et le théorème de Riemann-Roch arithmétique (5.6) conduisent à proposer une définition des nombres de Betti $h^q(X, \overline{E}) \in \mathbb{R}$ [62]. Le fait que les nombres de Betti usuels sont positifs nous a suggéré une conjecture intéressante en géométrie riemannienne : soit $(E_{\mathbb{C}}, h)$ un fibré hermitien sur une surface de Riemann et $\det(\Delta)$ le déterminant régularisé du Laplacien de $E_{\mathbb{C}}$ (cf §5.5). Celui-ci dépend du choix de h, mais nous conjecturons que, quand h varie, $\det(\Delta)$ reste *borné* supérieurement.

Nous montrons ce résultat, quand le fibré $E_{\mathbb{C}}$ est de rang un, si celui-ci a peu de cohomologie (on se ramène à l'inégalité de Moser-Trudinger) ou si $X_{\mathbb{C}}$ est la droite projective. Un thèsard de Princeton a continué à étudier cette question.

10.3. Dans [68] puis [76] je propose une définition des *variétés sur le corps à un élément*, dont l'existence avait été imaginée par Manin et Smirnov. L'idée est en gros que ces variétés sont entièrement déterminées par une partie finie naturelle de leurs points entiers. Les variétés toriques lisses sur les entiers sont définies sur le corps à un élément, de même que tous les réseaux euclidiens. Je formule une conjecture de Weil sur le corps à un élément, qui est vraie dans les cas ci-dessus. La considération de la K-théorie du corps à un élément me conduit aussi à une conjecture précise sur les motifs de Tate mixtes qui apparaissent dans les variétés toriques, en liaison avec un résultat de Totaro.

11. Fonctions zêtas

11.1. Dans mon livre sur la géométrie d'Arakelov [45], Chap. 5, je suggère que la régularisation zêta, utilisée pour définir la torsion analytique (cf. §5.5), pourrait aussi servir à définir des produits infinis en théorie des nombres. C'est un des ingrédients utilisés par Deninger dans son travail, très spéculatif, sur un analogue sur $\mathbb{Z}$ de la cohomologie ℓ-adique des variétés sur un corps fini. Il propose par exemple que la fonction zêta de Riemann (ou plutôt $s(s-1)\,\zeta(s)$) est le produit régularisé des $s-\rho$, où ρ décrit les zéros non triviaux de $\zeta(s)$. Avec Schröter, j'ai pu déduire ceci d'un article de Cramér [51]. Notons aussi que Perez-Marco vient de répondre à une question que j'avais posée dans mon livre [45]: le produit (convenablement régularisé) de tous les nombres premiers est égal à $4\pi^2$.

11.2. Je me suis intéressé au travail de Connes sur la conjecture de Riemann. Je montre dans [70] que l'on peut déduire de la construction par Godement et Jacquet de la fonction L d'une forme automorphe supercuspidale d'une algèbre simple un opérateur (presque) unitaire dans un espace de Hilbert naturel, dont les valeurs propres sont les zéros critiques de cette fonction.

12. Mathématique et Biologie

Depuis une vingtaine d'années je m'intéresse par curiosité à la biologie, en suivant par exemple des cours au Collège de France. Depuis 2000, Gromov et Carbone ont organisé un séminaire et des conférences sur le sujet dans le cadre de l'IHES, activités auxquelles j'ai participé régulièrement. Un thème a plus particulièrement retenu mon attention, celui des réseaux d'interaction entre les gènes. Je crois qu'il y a quelques résultats utiles de mathématiques à trouver dans ce domaine. C'est ainsi que j'ai pu démontrer une conjecture faite il y a vingt ans par R.Thomas (et connue dans des cas particuliers) selon laquelle un tel réseau ne peut conduire à plusieurs états stationnaires (différentiation) que s'il possède un circuit positif [75].

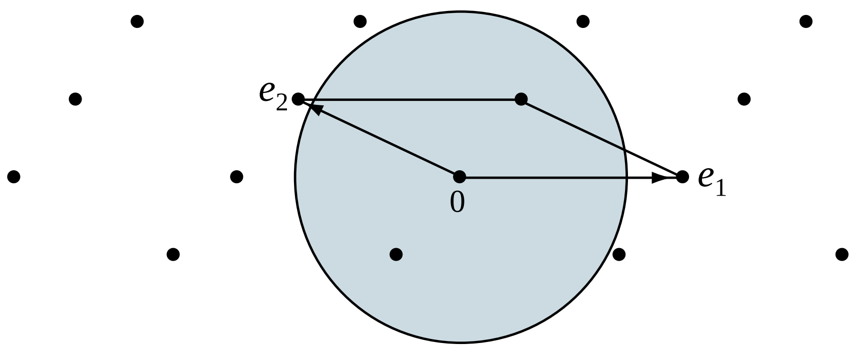

Figure 1: Un réseau euclidien.

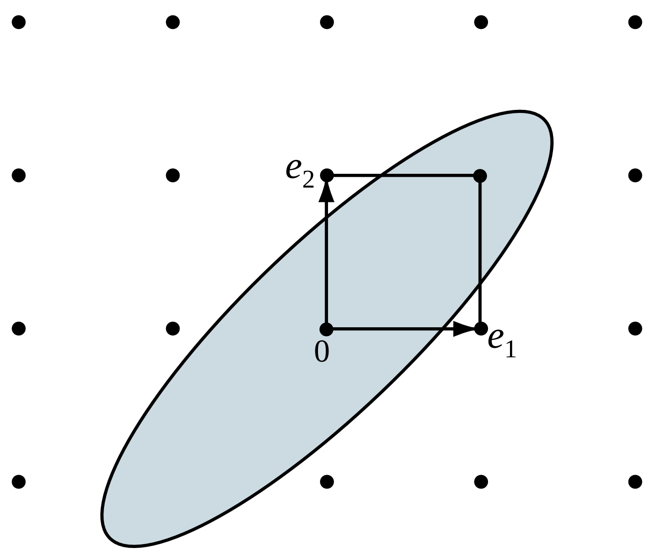

Figure 2: Le même, après changement de base.

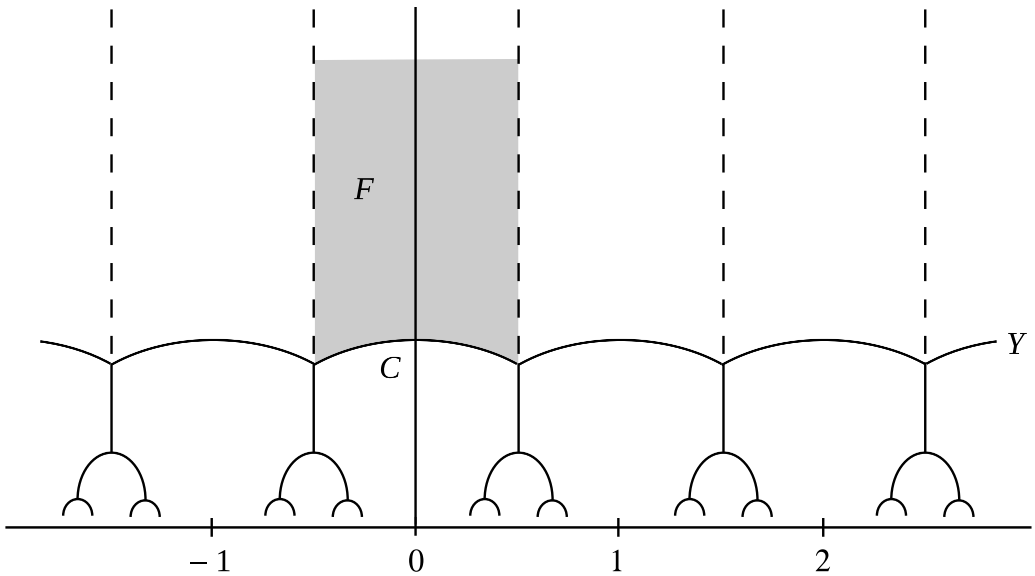

Figure 3: L'arbre de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

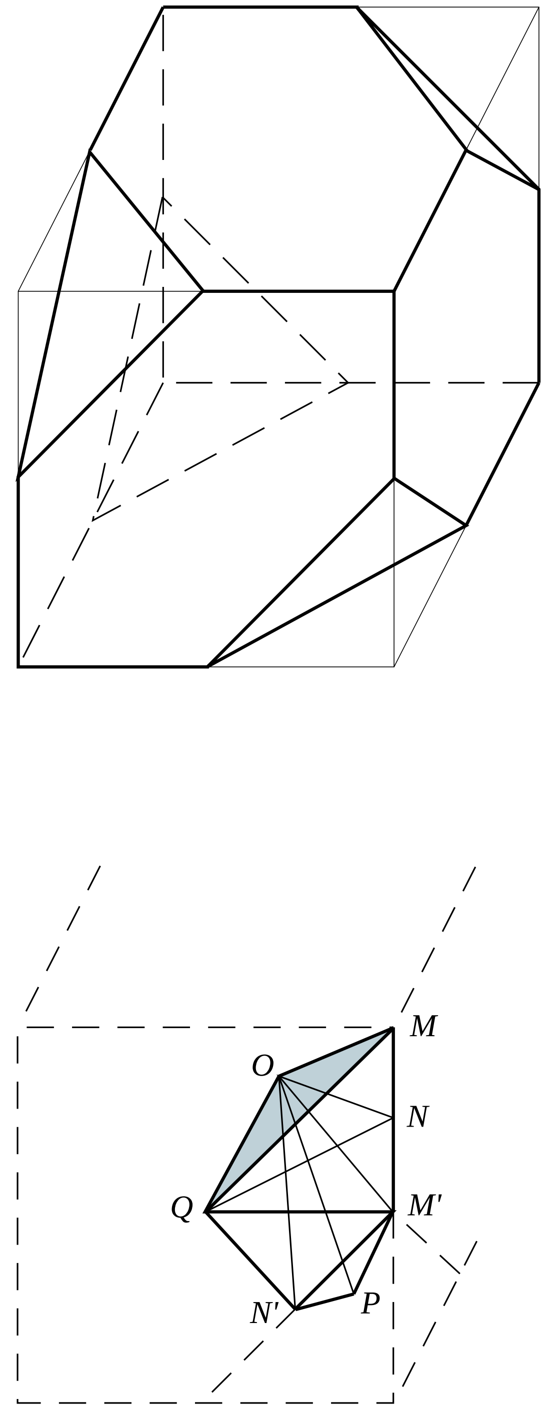

Figure 4: L'analogue pour $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ (un domaine fondamental).

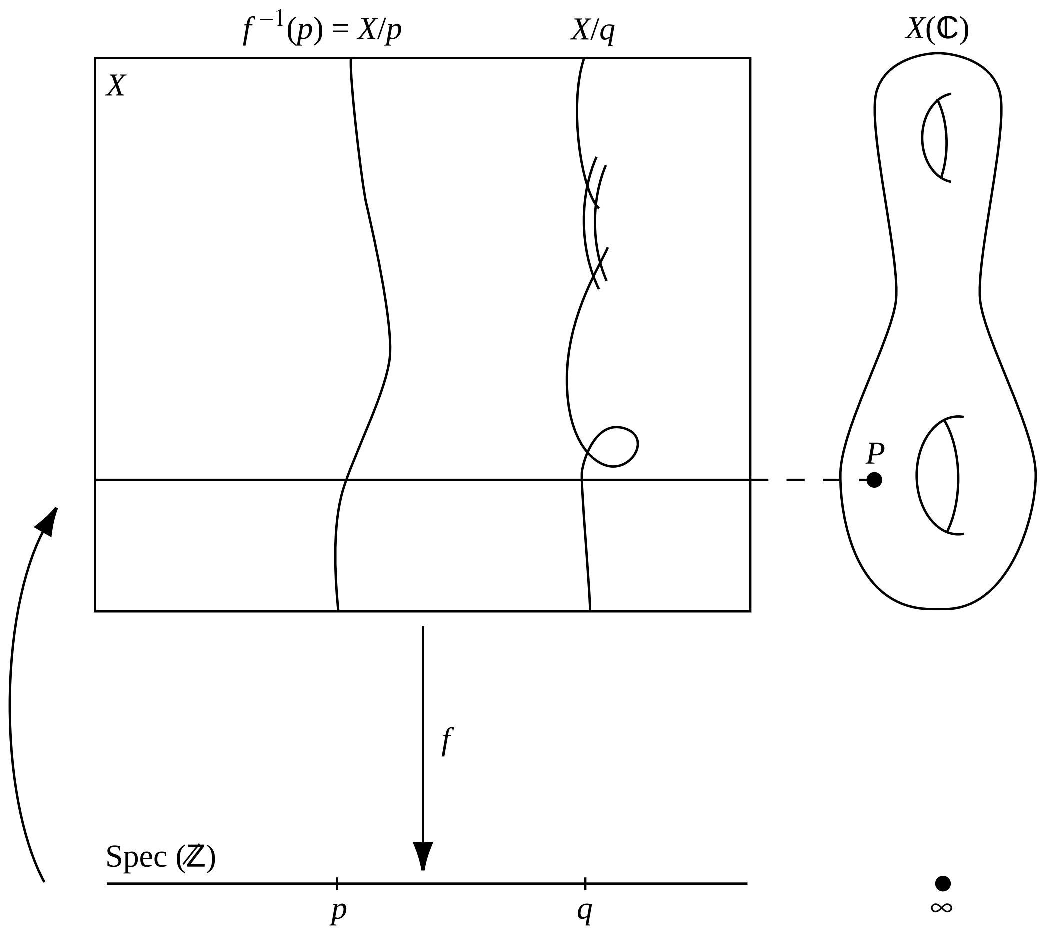

Figure 5: Une surface arithmétique