NOTICE SUR LES TRAVAUX SCIENTIFIQUES DE GILLES PISIER

Dans le texte ci-dessous, je résume mes travaux ainsi que mes sujets de recherche actuels. Mon principal domaine de recherche est l'analyse fonctionnelle, prise dans un sens large, allant de la géométrie des espaces de Banach à la théorie des algèbres stellaires ou de von Neumann, en passant par la théorie des opérateurs "individuels" ("single operator theory") sur un espace de Hilbert. Mais, en fait, une des caractéristiques de mes travaux est de m'avoir permis des percées significatives dans des domaines a priori vraiment distincts, en probabilités et en analyse harmonique. Il y a évidemment dans cette "variété" une unité de pensée qui risque de ne pas bien apparaître dans ce qui suit. Peut-être le point commun qui réapparait à chaque fois est-il l'interaction de phénomènes aléatoires dans les structures algébriques (séries de vecteurs aléatoires, matrices ou opérateurs aléatoires, etc...).

ANALYSE HARMONIQUE

La source d'inspiration principale ici est claire: le livre de J. P. Kahane ("Random series of functions", 1968) basé sur les travaux remarquables de Paley, Salem et Zygmund ainsi que les travaux de son élève P. Billard sur les séries de Fourier aléatoires nous ont considérablement influencés dès le début, mon collaborateur américain d'alors Michael Marcus et moi. Nous avions vraiment à coeur de résoudre les problèmes posés dans ce livre, et c'est avec une immense joie et fierté que nous avons vu "rentrer" dans la deuxième édition (1985) plusieurs de nos résultats!

Séries de Fourier Aléatoires: Il s'agit ici essentiellement de deux travaux, tous deux en collaboration avec Marcus. D'une part le livre [30] publié en 81 par Princeton University Press, et d'autre part l'article [44] paru dans Acta Math. en 84. Dans le livre, on résout le problème de caractériser les séries de Fourier aléatoires

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} \epsilon_n a_n e^{int}$$

presque sûrement continues dans le cas où les signes $\epsilon_n = \pm 1$ sont choisis au hasard indépendamment. On montre que la condition d'entropie de Dudley-Fernique pour le cas Gaussien

$$\int_0 \sqrt{\mathrm{Log} N_d(\epsilon)}\, d\epsilon < \infty$$

est aussi valable dans ce cas; ici d est la distance

$$d(s,t) = (\sum |a_n|^2 |e^{ins} - e^{int}|^2)^{1/2}$$

et $N_d(\epsilon)$ est le nombre minimal de d-boules de rayon ϵ qui suffisent à recouvrir le cercle unité. Plus généralement, la même condition reste une caractérisation de la continuité presque sûre pour des séries aléatoires de la forme

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} Z_n a_n e^{int}$$

dans le cas où les Z_n sont des variables indépendantes bornées dans L_2 et minorées dans L_1. Cela ne s'applique plus si les Z_n n'ont pas de moment d'ordre 2, par exemple dans le cas p-stable avec $p < 2$. Dans l'article [44] (Acta Math.), on traite le cas p-stable complètement, et on démontre cette fois qu'une condition d'entropie différente relative à une métrique elle aussi différente caractérise la continuité. (Dans le cas $p = 1$, on obtenait seulement la necessité de la condition, mais Talagrand a démontré par la suite, comme nous l'avions conjecturé, qu'elle est suffisante.) La clé est l'utilisation de variables aléatoires Z à queues sous-exponentielles du type

$$P(\{Z > t\}) \le exp(-t^{p'}) \quad p' = \frac{p}{p-1}.$$

C'était à l'époque une grande nouveauté car l'intégrabilité des variables p-stables étant très différente pour $p < 2$ et pour $p = 2$, personne ne s'attendait semble-t-il à ce que la méthode d'entropie métrique de Dudley-Fernique, qui avait si bien réussi dans le cas gaussien, soit applicable aussi au cas p-stable. On peut signaler que nos idées ont été mises à profit par Johnson et Schechtman (Acta Math. 149 (1982) 71–85) pour estimer la norme de matrices aléatoires à coefficients p-stables, de manière asymptotiquement optimale.

Ensembles de Sidon:

Sur ce sujet, mes principaux résultats sont les suivants. D'une part ([23]) j'ai résolu, en utilisant les séries de Fourier aléatoires, un problème posé par Walter Rudin dans les années 60 (j'ai vu avec plaisir qu'il mentionne ma solution dans sa biographie): les ensembles de Sidon sont caractérisés par la propriété que leurs constantes en tant qu'ensembles $\Lambda(p)$ au sens de Rudin est $O(p^{1/2})$ quand p tend vers l'infini. Plus précisément les conditions suivantes pour un sous-ensemble $\Lambda \subset \mathbf{Z}$ sont équivalentes:

(i) Il existe une constante C telle que pour tout $p > 2$ et pour toute suite finie de coefficients scalaires on a

$$\|\sum_{n\in\Lambda} a_n e^{int}\|_p \le C\sqrt{p}(\sum |a_n|^2)^{1/2}.$$

(ii) Il existe $\delta > 0$ tel que pour toute suite finie de coefficients scalaires on a

$$\delta \sum |a_n| \le \|\sum_{n\in\Lambda} a_n e^{int}\|_\infty$$

Noter que (i) correspond à un comportement "sous-gaussien" et (ii) à une sorte d'indépendance. Ma contribution est ici que (i) implique (ii), donc en gros c'est un peu comme si la vailidité du théorème central limite impliquait nécessairement l'indépendance...

L'autre contribution importante que j'ai obtenue sur ce sujet est une caractérisation arithmétique des ensembles de Sidon, ce qui résolvait aussi un vieux problème sur ces ensembles. La caractérisation est la suivante, un ensemble d'entiers $\Lambda \subset \mathbf{Z}$ est de Sidon ssi il existe $c > 0$ tel que toute partie finie $A \subset \Lambda$ contient une sous partie quasi-indépendante $B \subset A$ de cardinal $|B| \ge c|A|$. Ici quasi-indépendant veut dire: ne vérifiant aucune relation non-triviale à coefficients ± 1. Le principal problème (toujours ouvert) reste de décider si tout ensemble de Sidon est une réunion finie d'ensembles quasi-indépendants (ou de Rider). Ma caractérisation arithmétique réduit ce problème à un problème purement combinatoire, qui a d'ailleurs intéressé les combinatoristes (voir en particulier, un papier de P. Erdös, Nesetril et Rödl intitulé: On Pisier type problems and results, in Mathematics of Ramsey Theory, Algorithms and Combinatorics, Vol. 5, Springer Verlag 1990).

PROBABILITES

Probabilités dans les Espaces de Banach

Dans cette direction, mes résultats ont porté sur les théorèmes-limites classiques: Loi des grands Nombres, Théorème Limite Centrale, Loi du Logarithme Itéré, que l'on abrègera en LGN,TLC, et LLI respectivement. Mes principales publications sont [14,15,16,22, et plus tard [52]. L'article [14] et l'exposé [16] ont été beaucoup utilisés et cités pendant les années 75-80. Pour des raisons diverses, je n'ai pas publié [16] ailleurs qu'au séminaire, bien que ce texte contienne beaucoup de résultats nouveaux.

Soit B un espace de Banach, et X une variable aléatoire dans (disons) $L^1(B)$. Considérons les trois propriétés suivantes.

(1) $\mathbf{E}(\|X\|^2) < \infty, \quad \mathbf{E}(X) = 0.$

(2) X vérifie le TCL.

(3) X vérifie la LLI.

Dans [14], on démontre que les espaces B de type 2 sont caractérisés par l'implication (1) $\Rightarrow$ (2). Dans [16], on montre que pour une variable aléatoire X à valeurs dans un Banach quelconque, on a (1) et (2) ensemble $\Rightarrow$(3), mais aucune autre implication n'est vraie en géneral. Ces résultats pour des variables à valeurs Banach m'ont conduit parfois à des résultats en Probabilités "classiques" comme par exemple dans l'article [52] sur les classes de Vapnik-Cervonenkis pour les distributions empiriques.

Martingales

Je mes suis toujours interessé à la théorie des martingales depuis l'article [8] où j'ai obtenu des caractérisations des espaces de Banach uniformément convexes par des inégalités de martingales (à valeurs Banach). C'est d'ailleurs ce premier travail (et quelques résultats publiés dans le séminaire Maurey-Schwartz de l'époque) qui ont inspiré les travaux ultérieurs importants de Burkholder sur la proriété UMD des espaces de Banach. Ce travail a aussi trouvé un écho plus tard dans l'étude des espaces uniformément convexes au sens complexe (cf.[69] et la thèse de mon élève QuanHua Xu) en relation avec les inégalités pour les martingales analytiques et de Hardy à valeurs vectorielles. Dans [61,65] (en collaboration avec Xu) nous démontrons plusieurs inégalités nouvelles sur la "p-variation forte"des martingales scalaires. La plus remarquable est sans doute la suivante, conjecturée par Bretagnolle qui avait démontré le cas à accroissements indépendants. (Une forme affaiblie en avait été obtenue avant nous par Lépingle.)

Soit $1 < p < 2$. Il existe une constante S_p telle que pour toute martingale scalaire (M_n) dans L_p telle que $M_0 = 0$, on a

$$\mathbf{E} \sup_{0=n_0<n_1<n_2<\dots} \sum_k |M_{n_k} - M_{n_{k-1}}|^p \leq S_p \sum_1^\infty \mathbf{E}|M_n - M_{n-1}|^p.$$

Dans [66], j'ai donné une démonstration classique simple des inégalités de Paul André Meyer sur les transformées de Riesz pour les mesures gaussiennes qui sont importantes dans le calcul de Malliavin sur le processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Cette démonstration est reproduite en bonne place dans le livre récent de Svante Janson sur les mesures gaussiennes (Cambridge Univ. Press).

Martingales non-commutatives

Plus récemment [97a,97b, 110], j'ai obtenu (en collaboration avec Q. Xu) des versions non-commutatives très générales des inégalités de Burkholder et Gundy sur les martingales dans L_p, que nous étendons au cas des L_p non-commutatifs. Le domaine des probabilités non-commutatives est en pleine explosion actuellement et je m'intéresse à toutes les ramifications et variations possibles de ces résultats en direction des probabilités dites "quantiques", des matrices aléatoires, ou bien des probabilités libres de Voiculescu. La théorie de Voiculescu a plusieurs points de contact avec la théorie des espaces d'opérateurs dont je m'occupe intensivement depuis plusieurs années, et l'un des axes de mon programme de recherche actuel est de les développer. Le semestre organisé récemment à l'IHP conjointement avec Biane et Voiculescu sur "probabilités libres et espaces d'opérateurs" en est une illustration. Il reste de nombreuses questions naturelles à éclaircir dans ce domaine, en particulier pour les inégalités de martingales associées aux intégrales stochastiques du "mouvement brownien libre", pour lesquelles Biane et Speicher ont obtenu un résultat très frappant.

Dans une direction voisine, on peut définir plusieurs versions non-commutatives naturelles des espaces H^1 et BMO, des mesures de Carleson et des "paraproduits" à valeurs matricielles. Pour une dimension matricielle finie, les différentes normes sont équivalentes, mais on est naturellement conduit à évaluer précisément l'ordre de grandeur des constantes intervenant dans ces équivalences quand la dimension n tend vers l'infini. Ce genre de question d'analyse matricielle est important pour les applications en théorie de la prédiction (ces idées remontent à Norbert Wiener et Kolmogorov). Tout récemment ([116]) dans un travail en collaboration avec F. Nazarov, S. Treil et A. Volberg, nous montrons que toute une série de constantes de ce genre croissent exactement comme $Log(n)$. Ce travail a aussi des rapports avec mes résultats sur le "problème de similarité de Halmos" (voir plus loin).

ANALYSE FONCTIONNELLE

Cette section couvre la plus grande part de mes activités de recherche. J'ai débuté sous la direction de Laurent Schwartz, et j'ai beaucoup profité de l'atmosphère extraordinairement stimulante de son laboratoire à l'Ecole Polytechnique. J'ai pu ainsi très tôt collaborer avec Bernard Maurey qui était mon ainé de 3 ans et qui m'a considérablement influencé. Je lui doit vraiment beaucoup. Je me souviens que mes premières cogitations portaient sur la théorie des applications radonifiantes de Schwartz qui me passionnait. Il y avait en particulier un problème d'approximation pour les applications p-radonifiantes avec $p < 1$ qui avait résisté à Schwartz lui-même et qui nous avait beaucoup frappé, Maurey et moi. Plusieurs démonstrations fausses étaient d'ailleurs apparues dans ces années là vers 72/74. C'est sans doute le tout premier problème ouvert auquel j'ai jamais réfléchi, et ce fut une très grande joie de pouvoir le résoudre (par un contre-exemple) 10 ans plus tard ! La construction [54] en est malheureusement trop compliquée pour avoir attiré beaucoup de lecteurs... Par la suite, aprés 74, les applications p-sommantes ont remplacé les radonifiantes et la géométrie des espaces de Banach a envahi le Séminaire Maurey-Schwartz de l'époque.

Théorie Locale des Espaces de Banach et Corps Convexes

Aprés les développements des notions de type et de cotype avec Maurey dans l'article [5] qui a, je crois pouvoir le dire, eu beaucoup d'influence sur le développement ultérieur du domaine, j'ai investi énormément d'énergie pour comprendre les difficultés liés à l'absence apparente d'une bonne dualité entre l' inégalité de type pour un Banach et celle de cotype pour son dual. Ce problème m'a très vite paru très lié à la recherche de généralisations nouvelles de l'inégalité classique de Grothendieck (voir ci-desous). Je renvoie à mon rapport au congrés de Varsovie [50] pour une description de ces résultats. Principalement, j'ai pu montrer (dans [37b] paru dans Annals of Math.) que les espaces de type non trivial vérifient une inégalité dite de K-convexité, qui implique toute une série de résultats remarquables, dont la bonne dualité recherchée entre l' indice de type pour l'espace et celui de cotype pour son dual. La clé de la démonstration est l'observation faite en [40b] que la K-convexité équivaut à l'analyticité d'un certain semi-groupe (soit le semi-groupe associé au produit de Riesz classique sur $\{-1,+1\}^{\mathbf{N}}$, soit son analogue gaussien, qui n'est autre que le semi-groupe du processus d'Ornstein -Uhlenbeck) sur L_p-à valeurs dans le Banach. Ce même travail résout partiellement une conjecture de Lindenstrauss: tout espace qui ne contient pas uniformément de ℓ_1^n contient des ℓ_2^n uniformément et uniformément complémentés. Dans cette même rubrique, on peut naturellement ranger les articles [34,35,39,40,41,42,51].

Vers 83,84 Maurey et moi avons trouvé une démonstration très simple de l'inégalité du type isopérimétrique pour les mesures gaussiennes qui est l'ingrédient essentiel de la démonstration du théorème de Dvoretzky suivant les idées (désormais classiques) de Milman. Cette démonstration rendait le théorème de Dvoretzky considérablement plus abordable pour les non-initiés. Elle est présentée, ainsi que plusieurs développements connexes, dans les notes du cours que j'ai donné à Varenna pour le CIME en 84, voir [59].

A partir de cette date, j'ai été très influencé pendant 3-4 ans par les idées lancées par Milman et Bourgain-Milman sur les possibilités d'appliquer les méthodes de la Théorie Locale aux corps convexes dans $\mathbf{R}^n$ et aux estimations de leur volume. Dans leurs travaux, une estimation que j'avais obtenue dans [33] joue un role crucial. Il s'agit de la majoration de la constante de K-convexité d'un espace normé E de dimension n par $CLog(n)$ où C est une constante numérique. Plus précisément, si E est d-isomorphe à l'espace euclidien ℓ_2^n, alors cette constante de K-convexité est majorée par $CLog(d)$. En utilisant des arguments d'interpolation (réelle ou complexe) des espaces normés, j'ai pu donner des démonstrations très simples tout d'abord de l'inégalité dite "Santaló inverse" de Bourgain-Milman, puis des inégalités inverses de Brunn-Minkowski dûes à Milman, (pour cette dernière, la démonstration originale de Milman, très compliquée, n'a d'ailleurs jamais été publiée). Sur ce thème, et le thème dérivé des espaces dits de "Hilbert faibles" j'ai publié les articles [56,57,63,64,73] et finalement le livre [67] (Cambridge Univ. Press) qui contient une présentation de tous ces résultats en ne supposant pratiquement rien de connu au départ.

Généralisations du Théorème de Grothendieck et Produits Tensoriels:

J'ai été fasciné pendant plusieurs années par un long article de Grothendieck intitulé "Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques". L'article se termine par une liste de 6 problèmes ouverts qui constituent un véritable programme de recherche pour les générations suivantes. Le premier et principal problème, le problème d'approximation (Tout Banach a-t-il la Propriété d'Approximation?) a été résolu par la négative par Enflo en 72. Je me suis intéressé très tôt aux problèmes restants et j'ai pu résoudre successivement les 3 problèmes laissés ouverts, en particulier le dernier, publié dans Acta Math.[45b]. J'avoue que la solution de ce dernier problème qui concluait plusieurs années de recherche m'a fait éprouver l'une des plus grandes satisfactions des trente premières années de ma vie. Dans cet article, je construis un espace X (ou plutôt toute une classe d'espaces) tel que les produits tensoriels projectif $X\hat{\otimes}X$ et injectif $X\check{\otimes}X$ coïncident algébriquement et topologiquement (i.e. avec des normes équivalentes). Un tel espace X ne peut pas posséder la propriété d'approximation (on a donc indépendamment des idées d'Enflo un nouveau contre-exemple à la Propriété d'Approximation). Ces espaces X sont de cotype 2 ainsi que leurs duaux. Ce sont aussi des contre-exemples à des conjectures de Lindenstrauss (formulée en 1970 au congrés de Nice) et de Maurey (formulée en 1974 au congrés de Vancouver). La construction elle-même n'est pas très compliquée mais elle utilise de façon fondamentale les résultats que j'avais progressivement obtenus auparavant sur les autres questions de Grothendieck. J'ai inclus tout cela dans mon second livre [55] qui contient tous mes travaux relatifs au Théorème de Grothendieck. Ce livre correspond à une série de dix conférences données à l'occasion d'un congrés spécial de l'AMS ("Regional conference") à Columbia Missouri, en 84. Je vais maintenant décrire les étapes essentielles qui m'ont conduit à ce résultat.

En utilisant une idée différente mais voisine des résultats ultérieurs de [37b] sur la K-convexité, j'ai démontré dans [33] (paru aux Annales de l'ENS) un nouveau théorème de factorisation généralisant celui de Grothendieck: Sous la propriété d'approximation, tout opérateur du dual d'un espace de cotype 2 dans un espace de cotype 2 se factorise par un Hilbert. Ce théorème contient tous les couples X, Y connus à ce jour pour lesquels tout opérateur de X dans Y se factorise par un Hilbert. Le contre-exemple X décrit ci-dessus a montré par la suite que la Propriété d'approximation ne peut pas être supprimée dans cet énoncé. Ce théorème fait suite à [18,19,20] où des généralisations successives du Théorème de Grothendieck (en abrégé TG) ont été obtenues pour les quotients L_1/R où R est un sous-espace réflexif de L_1 [18], et pour les C^*-algèbres et leurs duaux [19]. Ce dernier article contient une version non-commutative du TG qui s'est révélée très utile dans plusieurs questions de la Théorie des C^*-algèbres. Comme j'avais initialement supposé une propriété d'approximation supprimée par la suite par Haagerup, ce résultat est souvent cité (à mon grand plaisir) comme le théorème de Grothendieck-Haagerup-Pisier! Il m'a aussi procuré le grand plaisir de rentrer dans la bibliographie de la nouvelle édition (anglaise) du livre classique de Dixmier sur les C^*-algèbres, livre que j'avais étudié pieusement dans ma jeunesse! Mes recherches actuelles sur les applications complètement bornées ([72] voir plus loin) ou bien les espaces L_1 non-commutatifs [55,62] se rattachent elles-aussi au départ à [19].

Je n'ai depuis jamais cessé de m'intéresser aux versions non-commutatives de diverses propriétés des espaces L_p. Par exemple, mon article récent [69] (avec Haagerup) démontre plusieurs propriétés nouvelles des espaces L_1 non-commutatifs. Mon article [62] (avec F. Lust-Piquard) donne une généralisation non-commutative des inégalités de Khintchine (le plus interessant de cet article, à mon avis, est la méthode utilisée de factorisation de fonctions analytiques, qui fait à elle seule l'objet d'une section ci-dessous.)

Interpolation: Je me suis toujours intéressé de très prés aux méthodes d'interpo-lation réelle et complexe des espaces de Banach, comme en témoignent les articles [12,35, 43,44,60,61,71,77,78]. Le résultat principal de [35] est une caractérisation des treillis de Banach qui sont interpolés par la méthode complexe entre un treillis de Banach ordinaire et un treillis de Banach Hilbertien. L'article [60] contient un théorème de factorisation des opérateurs linéaires à travers L_p-faible qui complète des résultats de Nikishin et Maurey du début des années 70. Cette nouvelle approche s'étend aux opérateurs définis sur des C^*-algèbres et permet par exemple de donner une version non-commutative du théorème de Rosenthal qui affirme que tout sous-espace réflexif de L_1 se plonge dans L_p pour un $p > 1$.

Par la suite, j'ai obtenu une nouvelle démonstration de plusieurs résultats de Peter Jones sur l'interpolation entre les espaces H^1 et H^∞, par la méthode réelle et la méthode complexe. L'intérêt principal (outre la simplicité de l'approche) est que cette preuve s'étend sans difficulté au cas non commutatif. Soit S_p l'espace des opérateurs $T : \ell_2 \to \ell_2$ tels que $tr|T|^p < \infty$ muni de la norme naturelle $\|T\|_{S_p} = (tr|T|^p)^{1/p}$. cet espace est un analogue non-commutatif de L_p (ou plutôt de ℓ_p). L'analogue (ou plutôt un analogue) non-commutatif de H^p est le sous-espace $T^p \subset S_p$ formé des matrices triangulaires supérieures. Je démontre dans [77] les théorèmes d'interpolation suivants

$$(T^1, T^\infty)_{\theta,p} = T^p \quad \text{et} \quad (T^1, T^\infty)_\theta = T^p,$$

quand $1/p = 1 - \theta$. Il y a aussi des variantes pour les espaces de Lorentz. Dans [76], je donne (en suivant des idées analogues) une démonstration très simple d'un théorème de Bourgain qui est une version du TG pour l'algèbre du disque. Dans [78], je développe un nouveau point de vue sur un autre résultat de Jones, l'existence d'une solution de l'équation $\bar\partial$ (à une variable) qui satisfait à la fois une estimation L_∞ et une estimation L_1. Plus précisément, sur le disque unité D, considérons l'équation

$$\bar\partial g = \mu.$$

D'aprés le travail de Jones, il existe une solution g vérifiant à la fois

$$\|g\|_{L_\infty(\partial D)} \le c\|\mu\|_{Carleson} \quad et \quad \|g\|_{L_1(\partial D)} \le c|\mu|(D).$$

Dans cet article on démontre une forme un peu plus abstraite de ce phénomène en suivant les mêmes idées que dans [77].

Espaces H^p de fonctions analytiques à valeurs opérateurs:

De 87 à 92, l'essentiel de mes préoccupations mathématiques a tourné autour de problèmes de factorisation de fonctions analytiques à valeurs opérateurs. Bien que ces problèmes aient été étudiés par de nombreux auteurs (Wiener, Masani, Helson-Lowdenslager, Douglas, Lax, etc....) je dirai pour simplifier que notre point de départ est le théorème de Sarason affirmant que toute fonction (de norme 1) dans H^1 à valeurs dans l'espace des opérateurs à trace peut être factorisée en un produit de deux fonctions (de norme 1) dans H^2 à valeurs Hilbert Schmidt. Tout d'abord en collaboration avec Haagerup [69] nous avons généralisé (assez facilement) le théorème de Sarason au cas de fonctions à valeurs dans des espaces L_1 non commutatifs généraux (au lieu de l'espace des opérateurs à trace). A partir de ce travail, il m'a semblé que les extensions éventuelles du théorème de Sarason étaient un outil fondamental pour progresser dans la compréhension de la structure des espaces de Banach formés d'opérateurs et en particulier pour l'étude du produit tensoriel projectif de 2 espaces de Banach. Dans un deuxième article [70b], j'ai obtenu toute une classe d'espaces de Banach pour lesquels le théorème de Sarason admet une extension naturelle. L'article exhibe aussi toute une classe de normes autres que la norme nucléaire, pour lesquelles on a une bonne extension du théorème de Sarason. Par exemple, si l'on considère la classe des opérateurs entre deux espaces de Banach qui se factorisent par un Hilbert avec la norme naturelle associée, on démontre que toute fonction dans H^1 à valeurs dans cet espace est le produit de deux fonctions H^2 qui forment une "bonne" factorisation à travers un Hilbert. Ce résultat est à rapprocher du théorème de Grothendieck et de ses nombreuses extensions. A chaque "version" du théorème de Grothendieck correspond un cas d'application du théorème précédent. Au départ, la principale application de ces résultats était (avec des variantes et des généralisations diverses) le fait que le produit tensoriel projectif de deux espaces L_p est de cotype p pour $p > 2$. Seul le cas $p = 2$ était connu depuis 74 (dû à Tomczak), le cas $1 < p < 2$ reste ouvert. Il y a maintenant une autre application remarquable dûe à Kouba (qui a soutenu en 90 une thèse sur ce sujet sous ma direction) qui est un théorème d'interpolation complètement nouveau qui assure que l'interpolé complexe entre deux produits tensoriels projectifs d'espaces de Banach est le produit tensoriel projectif des interpolés à condition que tous les espaces soient "de type 2" (ce qui pour les L_p nous limite à $p > 2$ ou $p = 2$). De plus des exemples simples montrent que cela ne s'étend pas au cas de L_p pour $p < 2$. Pour une exposition pas trop technique de tous ces résultats voir [74]. Une autre application dans une direction différente se trouve dans un papier récent [62] en collaboration avec F. Lust-Piquard où nous donnons une description "complète" des séries aléatoires Gaussiennes (ou bien de Rademacher) p.s. convergentes dans les espaces d'opérateurs nucléaires entre certains espaces de Banach (c'est déjà nouveau pour les opérateurs nucléaires entre Hilbert, c'est à dire les opérateurs à trace.) Ces résultats suggèrent de nombreuses questions. Pour donner un exemple, j'ai proposé vers 1989 à Christian Le Merdy (qui préparait alors une thèse avec moi) de rechercher des généralisations Banachiques du théorème classique de Beurling sur les sous-espaces invariants par le shift de H^2 et il a obtenu une série de résultats partiels intéressants pour l'espace H^2 à valeurs Banach. Seul le cas de H^2 à valeurs Hilbert était connu (dû à Lax). Ce type de question est très lié à une autre direction de mes recherches récentes concernant la notion d'application complètement bornée.

Espaces d'opérateurs:

La notion d'application complètement bornée entre espaces d'opérateurs sur un Hilbert est devenu depuis le début des années 80, un outil majeur pour les spécialistes d'algèbres d'opérateurs (cf., e.g., les travaux de Stinespring, Arveson, et plus récemment Choi, Effros, Wittstock, Hadwin, Haagerup, Paulsen, Smith, Ward, Muhly, Power, Christensen, Sinclair; voir le livre de Paulsen, *Completely bounded maps and dilations, Pitman Research Notes 146, 1986.*) Je me suis proposé d'abord d'explorer les connections entre cette théorie et la théorie de factorisation des opérateurs entre Banach dans la ligne des travaux de Grothendieck continués par Pietsch, Kwapień, Maurey etc... Comme je l'ai montré dans [72], une grande partie de la théorie hilbertienne se généralise au cas d'une application $u : S \to B(X_1, Y_1)$ définie sur un sous-espace $S \subset B(X, Y)$ où X, Y, X_1, Y_1 sont tous des Banach, et où $B(X, Y)$ désigne l'espace des opérateurs bornés de X dans Y.

Mais en fait, vers 1992, j'ai très rapidement abandonné cette première direction "Banachique" pour me consacrer entièrement au cas d'opérateurs sur un Hilbert et je me suis intéressé à la théorie alors toute nouvelle des espaces d'opérateurs développée dans les travaux de Blecher-Paulsen et Effros-Ruan. J'ai observé qu'il existe dans cette catégorie un espace hilbertien particulier qui joue un rôle central parmi les espaces d'opérateurs, analogue à l'espace de Hilbert parmi les Banach. J'ai appelé cet espace d'opérateurs OH et j'en fais une étude détaillée dans [85 c].

Plus généralement [87b], j'ai développé une théorie des espaces-L_p non-commutatifs à valeurs vectorielles, qui étend la théorie dite de Lebesgue-Bochner des espaces $L_p(\Omega, \mu; E)$ où $1 \leq p \leq \infty$, avec (Ω, μ) un espace mesuré et E un espace de Banach.

Dans cette nouvelle théorie, E doit être muni d'une structure d'espace d'opérateurs. Alors à l'aide de l'interpolation, les espaces $L_p(\Omega, \mu; E)$ peuvent eux aussi être muni d'une structure d'espace d'opérateurs naturelle. Quand $p = 2$ et $E = \mathbf{C}$ on retrouve la théorie de l'espace OH.

Par exemple, considérons $M = B(\ell_2)$ avec la trace usuelle (qui est en quelque sorte discrète) "tr". Alors si $p < \infty$ $L_p(\tau)$ est la classe de Schatten S_p de tous les opérateurs compacts tels que $tr|T|^p < \infty$ muni de la norme

$$\|T\|_{S_p} = (tr|T|^p)^{1/p}.$$

Dans le cas particulier de la classe de Schatten, l'espace $L_p(\tau; E)$ est noté $S_p[E]$.
L'espace S_p (resp. $S_p[E]$) est analogue à un espace L_p "discret" ou encore "atomique", c'est-à-dire dans le cas commutatif ℓ_p (resp. $\ell_p(E)$). Ces espaces possèdent toutes les propriétés des espaces classiques de Lebesgue-Bochner $L_p(\Omega, \mu; E)$, telles que dualité, interpolation, injectivité et projectivité par rapport à l'espace des "valeurs" E.

Ce nouveau point de vue conduit à toute une série de résultats d'analyse harmonique non-commutative qui semblent très prometteurs, en particulier sur les multiplicateurs de Schur de la classe de Schatten, sur lesquels on sait très peu de choses. Voir à ce sujet la thèse de mon étudiante Asma Harcharras qui vient de paraitre dans Studia Math.

Plus récemment, dans [91], nous donnons une réponse négative à une question de Kirchberg et par là même obtenons la solution d'un problème assez ancien en théorie des C^*-algèbres: Il existe plus d'une norme de C^*-algèbre sur $B(H) \otimes B(H)$. En d'autres termes, nous montrons que la plus petite et la plus grande norme de C^*-algèbre ne sont pas identiques (ou ne sont pas équivalentes) sur $B(H) \otimes B(H)$. Résumé en une seule formule notre théorème est:

$$B(H) \otimes_{\min} B(H) \neq B(H) \otimes_{\max} B(H).$$

La question de savoir si on a l'égalité s'est posée dès le début de la théorie des C^*-algèbres nucléaires vers la fin des années 60 (Takesaki, Guichardet, Lance), mais il ne semble pas y en avoir de trace écrite.

Ce problème s'est révélé équivalent à la séparabilité pour une métrique naturelle de l'ensemble des espaces d'opérateurs de dimension finie. Nous disposons maintenant d'au moins trois approches pour exhiber le phénomène matriciel asymptotique qui exprime cette non-séparabilité. L'approche la plus fine utilise un ingrédient surprenant: les graphes dits "de Ramanujan" de Lubotzky-Philips-Sarnak, qui sont apparu récemment dans plusieurs domaines. L'ensemble de ces résultats laisse toutefois de nombreuses questions ouvertes. La plus importante est la conjecture de Kirchberg affirmant que si F est un groupe libre arbitraire on doit avoir

$$C^*(F) \otimes_{\min} C^*(F) = C^*(F) \otimes_{\max} C^*(F).$$

Cette question (sur laquelle évidemment je réfléchis) est maintenant au centre de la théorie des algèbres de von Neumann depuis que Kirchberg a démontré qu'elle est en fait équivalente à une question *fondamentale* posée par Alain Connes dans les années 70: toute algèbre de von Neumann est elle plongeable dans un ultra-produit d'algèbres matricielles? Ou bien en termes non techniques: toute trace est elle approximativement une trace matricielle?

Problèmes de similarité:

Un opérateur T sur un Hilbert est dit à puissances bornées si

$$\sup_{n \geq 1} \|T^n\| < \infty.$$

Il est dit polynômialement borné s' il existe $C > 0$ telle que pour tout polynôme P

$$\|P(T)\| \leq C \sup_{z \in \mathbf{C}, |z| \leq 1} |P(z)|.$$

Par exemple, toute contraction T, ou plus généralement tout opérateur semblable à une contraction c'est à dire de la forme $S^{-1}TS$ avec T contraction (et S inversible) vérifie cela. Un des plus célèbres problèmes ouverts de Théorie des Opérateurs (posé par Halmos vers 1970) était la réciproque:
tout opérateur polynômialement borné est-il semblable à une contraction?
On peut penser que ce problème a en fait circulé dès que Foguel a donné en 1964 le premier exemple d'opérateur à puissances bornées mais pas semblable à une contraction, ce qui répondait à une question posée par Béla Sz.- Nagy en 1958. Dans [99a,99b], j'ai obtenu un contre-exemple à cette réciproque. Ma

construction utilise les martingales et le mouvement brownien pour évaluer les opérateurs de Hankel à coefficient opérateurs qui y jouent un role crucial. Des simplifications importantes ont très rapidement été trouvées par d'autres auteurs (Kisliakov et Davidson-Paulsen), mais les exemples restent les mêmes.

Cette construction m'a indirectement conduit à une réflexion beaucoup plus générale sur les problèmes de similarité. Avant d'obtenir le contre-exemple ci-dessus, j'ai tout d'abord publié un livre [95] ("lecture notes") faisant une synthèse de ces questions. Ensuite, j'ai compris que la théorie des espaces d'opérateurs jouait un rôle crucial pour comprendre la classe des algèbres d'opérateurs qui vérifient un analogue de la propriété de similarité de Halmos. Cela m'a conduit à un nouveau concept, celui de

"degré de similarité" [101]

ou encore (je montre en fait que ces quantités sont égales) , de

"longueur d'une algèbre d'opérateurs",

en analogie avec la longueur d'un groupe (fini ou non) relativement à un système de générateurs (fini ou non).

Plus précisément, on peut définir la longueur d'une sous-algèbre (fermée) A de l'algèbre $B(H)$ des opérateurs bornés sur un Hilbert H comme suit. Soit $H^\infty = H \oplus H \oplus \cdots$, et soit $M_\infty(A)$ l'algèbre des matrices bi-infinies à coefficients dans A représentant un opérateur borné sur H^∞. Soit $K(A) \subset M_\infty(A)$ la sous-algèbre fermée engendrée par les matrices *finies* à coefficients dans A (complétées par des zéros). Dans $K(A)$ on distingue deux sous-algèbres d'une part l'algèbre $D(A)$ formée des matrices *diagonales*, d'autre part l'algèbre $K(\mathbf{C})$ formée des matrices de $K(A)$ à coeffcients tous scalaires. La longueur de A est alors définie comme le plus petit nombre d tel que tout élément de $K(A)$ puisse s'écrire comme un produit alterné de la forme

$$\alpha_0 D_1 \alpha_1 D_2 ... D_d \alpha_d,$$

avec $D_1, ..., D_d$ dans $D(A)$ et $\alpha_0, ..., \alpha_d$ dans $K(\mathbf{C})$

Dans [108] je construis des exemples d'algèbres d'opérateurs de "longueur" arbitraire. Le problème de savoir si l'on peut avoir de tels exemples parmi les algèbres auto-adjointes (=C^*-algèbres) reste ouvert. Ce problème (sur lequel je dois hélas avouer avoir déjà consacré en vain beaucoup d'énergie) est essentiellement équivalent à une conjecture de Kadison remontant aux années 50 ("Tout homomorphisme borné d'une C^*-algèbre à valeurs dans $B(H)$ est semblable à une représentation"), à une question soulevée par Dixmier vers la même époque, ou à l'annulation d'une certaine cohomologie. J'ai fait une rétrospective des différentes questions auxquelles ce problème se ramène, et de leurs motivations, dans l'exposé [104] ainsi que dans la nouvelle édition (augmentée) de mon mémoire [95]. C'est à mon avis un problème très important que j'espère toujours résoudre un jour prochain.

Paris, 25 septembre 2001

Gilles Pisier

LISTE DES PUBLICATIONS
DE
G. PISIER

1. "Type" des espaces normés. C.R. Acad. Sc. Paris, Série A. 276 (1973) 1673-1676.

2. Un théorème d'extrapolation et ses conséquences (En collaboration avec B. Maurey). C.R. Acad. Sc. Paris, série A, 277 (1973) 39-42.

3. Caractérisations d'une classe d'espaces de Banach par des propiétés de séries aléatoires vectorielles (En collaboration avec B. Maurey) C.R. Acad. Sc. Paris, Série A, 277 (1973) 687-680.

4. Sur les espaces de Banach qui ne contiennent pas uniformément ℓ_n^1. C.R. Acad. Sc. Paris, série A, 277 (1973) 991-994.

5. Séries de variables aléatoires vectorielles indépendantes et propriétés géométriques des espaces de Banach (En collaboration avec B. Maurey) Studia Math. 58 (1976) 45-90.

6. Séries aléatoires dans les espaces uniformément convexes ou uniformément lisses. C.R. Acad. Sc. Paris, série A, 279 (1974) 611-614 (En collaboration avec T. Figiel).

7. Martingales à valeurs dans les espaces uniformément convexes. C.R. Acad. Sc. Paris, série A, 279 (1974) 647-649.

8. Martingales with values in uniformly convex spaces. Israel J. Math. 20 Math. 20 (1975) 326-350.

9. B-convexity, super-reflexivity and the three space problem. Proceedings of the conference on random series, convex sets, and the geometry of Banach spaces. Aarhus University, Various publications series, 1975.

10. Sur la composition des opérateurs sommants, C.R. Acad. Sc. Paris, série A 280 (1975) 1681-1684.

11. On the "three space problem" (En collaboration avec Per Enflo et Joram Lindenstrauss) Math. Scand. 36 (1975) 199-210.

12. Un exemple concernant la super-réflexivité. Séminaire Maurey-Schwartz 74-75,annexe 1. Ecole Polytechnique, Palaiseau.

13. Remarques sur l'exposé d'Assouad (En collaboration avec B. Maurey)
Séminaire Maurey-Schwartz 74-75,annexe 2. Ecole Polytechnique, Palaiseau.

14. The law of large numbers and the central limit theorem in Banach spaces (En collaboration avec Jørgen Hoffmann-Jørgensen), Annals of Probability 4 (1976) 587-599.

15. Sur la loi du logarithme itéré dans les espaces de Banach. Probability in Banach spaces. Oberwolfach 1975, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, n°526, 203-210.

16. Le théorème de la limite centrale et la loi du logarithme itéré dans les espaces de Banach, Séminaire Maurey-Schwartz, année 75/76. Exposés 3,4 et corrections et additions à l'exposé 3.

17. Some results on Banach spaces without local unconditional structure. Compositio Math. 37 (1978) 3-19.

18. Une nouvelle classe d'espaces de Banach vérifiant le théorème de Grothendieck. Annales de l'Inst. Fourier 28 (1978) 69-90.

19. Grothendieck's theorem for non commutative C*-algebras with an appendix on Gro-thendieck's constants. J. of Functional Anal. 29 (1978) 397-415.

20. Topics on Grothendieck's theorem. Proceedings International Conference, Leipzig, Sept. 77, Teubner Text in Math (1978) 44-57.

21. Un nouveau théorème de factorisation. C.R. Acad. Sc. Paris, Série A, 185 (1977) 715-718.

22. On the limit theorems with values in the spaces L_p $(p > 2)$ (En collaboration avec J. Zinn). Z.F. Wahrschein, und verw. Gebiete 41 91978) 289-304.

23. Ensembles de Sidon et processus gaussiens. C.R. Acad. Sc. Paris, t. A 286 (1978) 671-674.

24. Lacunarité et processus gaussiens. C.R. Acad. Sc. Paris, t. A 286 (1978) 1003-1006.

25. Une propriété de stabilité de la classe des espaces ne contenant pas ℓ^1. C.R. Acad. Sc. Paris, t. A 286 (1978) 747-749.

26. Les inégalités de Khintchine-Kahane, d'aprés C.Borell. Séminaire sur la Géométrie des Espaces de Banach 1977-78, exp. 7, Ecole Polytechnique, Palaiseau.

27. Ensembles de Sidon et espaces de cotype 2.Séminaire sur la Géométrie des Espaces de Banach 1977-78, exp. 14, Ecole Polytechnique, Palaiseau.

28. Sur 1'espace de Banach des séries de Fourier aléatoires presque sûrement continues, Séminaire sur la Géométrie des Espaces de Banach 1977-78, exp. 17-18, Ecole Polytechnique, Palaiseau.

29. Necessary and sufficient conditions for the a.s. continuity of random trigonometric series (En collaboration avec B.M. Marcus), Séminaire de Probabilités de Strasbourg n° XIII, p. 72-89, Springer Lecture Notes n° 721.

30. *Random Fourier Series with Applications to Harmonic Analysis.* (Livre) Annals of Math. Studies n°101, Princeton University Press. (1981). (En collaboration avec M.B. Marcus).

31. A remarkable homogeneous Banach algebra. Israel J. Math. 34 (1979) 38-44.

32. De nouvelles caractérisations des ensembles de Sidon. Advances in Maths. Supplementary studies, vol 7B (1981) 685-726.

33. Un théorème sur les opérateurs linéaires entre espaces de Banach qui se factorisent par un Hilbert. Annales Scientifiques de l'E.N.S. 13 (1980) 23-43.

34. Sur les espaces de Banach de dimension finie à distance extrémale d'un espace euclidian, d'après V.D. Milman et H. Wolfson, exp. n° 16. Séminaire d'Analyse Fonctionnelle 1978-79, Ecole Polytechnique, Palaiseau.

35. Some applications of the complex interpolation method to Banach lattices. Journal d'Analyse mathématique de Jerusalem 35 (1979) 264-281.

36. Conditions d'entropie assurant la continuité de certains processus et applications à l'Analyse har-

monique. Séminaire d'Analyse Fonctionnelle 1979-80, exp. n° 13-14, Ecole Polytechnique, Palaiseau.

37.a. Semi-groupes holomorphes et géométrie des espaces de Banach. Note aux C.R. Acad. Sc., Paris, série A, 291 (1980) 341-342.

37.b. Holomorphic semi-groups and the geometry of Banach spaces. Annals of Math, 115 (1982) 375-392.

38. De nouveaux espaces de Banach sans la propriété d'approximation (d'après Szankowski). Séminaire N. Bourbaki - Juin 1979 - Springer Lecture Notes n° 542.

39. On the duality between type and cotype. Martingale theory in Harmonic Analysis and Banach spaces. Proceedings - Cleveland 1981 - Springer Lecture Notes n° 939. p. 131-144.

40.a. K-convexity - Proceedings of Research Workshop on Banach Space Theory, June 29 - July 31, 1981 - Univeristy of Iowa Press (1982).

40.b. Sur les espaces de Banach K-convexes. Séminaire d'Analyse Fonctionnelle 1979-80, exp.11, Ecole Polytechnique, Palaiseau.

40.c. Factorisation d'opérateurs aléatoires, d'aprés Benyamini et Gordon. Séminaire d'Ana-lyse Fonctionnelle 1979-80, exp. n° 22, Ecole Polytechnique, Palaiseau.

41. Quotients of Banach spaces of cotype q. Proc. A.M.S. 85 (1982) 32-36.

42. On the dimension of the ℓ_p^n subspaces of Banach spaces, for $1 < p < 2$. Trans. A.M.S. (1983), Vol. 276, p. 201-211.

43. Some applications of the metric entropy condition to Harmonic Analysis - Proceedings in Harmonic Analysis - (Storrs) - Springer Lecture Notes - n° 995 - 123-154.

44. Characterization of almost surely continuous p-stable random Fourier series and strongly stationary processes (En collaboration avec M.B. Marcus) - Acta Math. 152 (1984) 245-301.

45.a. Contre-exemple à une conjecture de Grothendieck - C.R. Acad. Sci - Paris, Sc. A 293 (1981) 681-683.

45.b. Counterexamples to a conjecture of Grothendieck. Acta Math. Vol. 151, (1983), 181-209.

46. Condition d'entropie et caractérisations arithmétiques des ensembles de Sidon. Modern Topics in Harmonic Analysis - Torino/Milano - June/July 1982, Inst. di Alta Math - Rome (1983) vol. II., 911-944.

47. Arithmetic characterizations of Sidon sets. Bull. A.M.S. (1983) Vol. 8, 87-90.

48. Les produits tensoriels d'espaces de Banach depuis Grothendieck - Séminaire d'Ini-tiation à l'Analyse, 81/82 - Exposé n° 10. Université Paris 6.

49. Une remarque sur certains problèmes de relèvement. Séminaire d'Analyse Fonctionnelle - Université de Paris 7.

50. Finite rank projections on Banach spaces and a conjecture of Grothendieck. Actes du Congrès International des mathématiciens. Varsovie (1983).

51. A construction of $\mathcal{L}_\infty$-spaces and related Banach spaces. (En collaboration avec J. Bourgain). Bol. Soc. Bras. Mat. 14 (1983) 109-123.

52. Une remarque sur les classes de Vapnik-Cervonenkis. Annales de l'I.H.P. Probabilités et Statistiques 20 (1984) 287-298.

53. Some results on the continuity of stable processes and the domain of attraction of continuous stable processes. (En collaboration avec M.B. Marcus). Annales de l'I.H.P. Probabilités et Statistiques 20 (1984) 177-199.

54. Sur les opérateurs p-sommants et p-radonifiants pour $p < 1$. (Colloque Laurent Schwartz.) Astérisque. Soc. Math. France 131(1985) 163-175.

55. *Factorization of Linear Operators and the Geometry of Banach Spaces.* (Livre) CBMS. Regional conference of the A.M.S. n° 60 (1986). Reprinted with corrections 1987.

56. Gaussian processes and Mixed Volumes. (En collaboration avec V. Milman). Annals of Probability 15 (1987) 292-304.

57. Banach spaces with a weak cotype 2 property (En collaboration avec V. Milman.) Israel J. Math. 54 (1986), 139-158.

58. Stochastic processes with sample paths in exponential Orlicz spaces. (En collaboration avec M. Marcus.) Springer Lecture Notes n° 1153 (1985) 329-358.

59. Probabilistic methods in the Geometry of Banach spaces. Course given at CIME Summer school June 1985. Springer Lecture Notes n° 1206 (1986)167-241.

60. Factorization of operators through $L_{p\infty}$ or L_{p1} and non-commutative generalizations. Math Annalen 276 (1986), 105-136.

61. Random series in the real interpolation spaces between the spaces V_p. (En collaboration avec Quanhua Xu.) GAFA. Springer Lecture Notes n° 1267 (1987), 185-209.

62. Non-Commutative Khintchine and Paley inequalities. (En collaboration avec F. Lust-Piquard.) Arkiv för Math. 29 (1991) 241-260.

63. Weak-Hilbert Spaces. Proc. London Math. Soc. 56 (1988), 547-579.

64. A new approach to several results of V. Milman. Journal für die reine und Angew. Mathematik. 393 (1989) 115-131.

65. The strong p-variation of martingales and orthogonal series.(En collaboration avec Quanhua Xu) Probab. Th. Related Fields 77(1987), 497-514.

66. A simpler analytic proof of P. A. Meyer's inequality. Séminaire de Probabilités XXII. Springer Lecture Notes n°1321 (1988).

67. *The volume of Convex Bodies and Banach Space Geometry* . (Livre) Cambridge University Press. 1989.

68. The dual J^* of the James space has cotype 2 and the Gordon-Lewis property. Proc. Cambridge Phil. 103 (1988) 323-331.

69. Factorization of analytic functions with values in non-commutative L_1-spaces. (En collaboration avec U. Haagerup.) Canadian Journal of Math.41 (1989) 882-906

70.a. Factorization de fonctions analytiques à valeurs opérateurs. C.R.Acad.Sci.Paris. 307 (1988) 955-960.

70.b. Factorization of operator valued analytic functions. Advances in Math. 93 (1992) 61-125.

71. A remark on $\pi_2(\ell_p, \ell_p)$. Math. Nachr. 148 (1990) 243-245.

72. Completely bounded maps between sets of Banach space operators. Indiana Univ. Math. Journal 39 (1990) 249-277.

73. The proportional UAP characterizes Weak Hilbert Spaces. (En collaboration avec W.B. Johnson.) Journal London Math.Soc. 44 (1991) 525-536.

74. Factorization of Operator Valued Analytic Functions and Complex Interpolation. Festschrift in honor of I.Piatetski-Shapiro, Part II: Papers in Analysis, Number Theory and Automorphic L-functions (edited by S.Gelbart, R.Howe and P.Sarnak), Weizmann Science Press of Israel, IMCP,vol.3 (1990) 197-220.

75. Remarks on complemented subspaces of von-Neumann algebras. Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 121A (1992) 1-4.

76. A simple proof of a theorem of Jean Bourgain. Mich. Math. Journal. 39 (1992) 475-484.

77. Interpolation Between H^p Spaces and Non-Commutative Generalizations I.
Pacific J. Math. 155 (1992) 341-368.

78. Interpolation Between H^p Spaces and Non-Commutative Generalizations II. Revista Mat. Iberoameriacana 9 (1993) 281-291.

79. Random series of trace class operators. Proceedings del cuarto CLAPEM (Mexico, Sept. 1990). Contribuciones en probabilidad y estadìstica matemàtica, 3 (1991) p. 29-43.

80. The K_t-functional for the interpolation couple $L_1(A_0), L_\infty(A_1)$. Journal of Approximation Theory. 73 (1992) 106-117.

81. Bounded linear operators between C^*-algebras.(En collaboration avec U. Haagerup.) Duke Math. J. 71 (1993) 889-925.

82.a. Multiplicateurs et ensembles lacunaires dans les groupes non moyennables. Comptes Rendus Acad. Sci. Paris 315 (1992) 43-48.

82.b. Multipliers and lacunary sets in non amenable groups. Amer. J. Math. 117 (1995) 337-376.

83. Complex interpolation and regular operators between Banach lattices. Archiv der Mat.(Basel) Archiv der Mat. (Basel) 62 (1994) 261-269.

84. The K_t-functional for the interpolation couple $(L_\infty(dx, L_1(dy)), L_\infty(dy, L_1(dx))$. (En collaboration avec A. Hess.) Quarterly J. Math. (Oxford) 46 (1995) 333-344.

85.a. Espace de Hilbert d'opérateurs et interpolation complexe. Comptes Rendus Acad. Sci. Paris Série I, 316 (1993) 47-52.

85.b. Sur les opérateurs factorisables par OH. Comptes Rendus Acad. Sci. Paris Série I, 316 (1993) 165-170.

85.c. *The operator Hilbert space OH, complex interpolation and tensor norms.* Memoirs Amer. Math. Soc.

vol. 122 , 585 (1996) 1-103.

86. Dvoretzky's theorem for operator spaces and applications. Houston J. Math. 22 (1996) 399-416.

87.a. Espaces L_p non commutatifs à valeurs vectorielles et applications complètement p-sommantes. Comptes Rendus Acad. Sci. Paris Série I, 316 (1993) 1055-1060.

87.b. *Noncommutative vector valued L_p-spaces and completely p-summing maps.* Soc. Math. France. Astérisque 237 (1998).

88. Projections from a von Neumann algebra to a subalgebra. Bull. Soc. Math. France 123 (1995) 139-153.

89. Regular operators between non-commutative L_p-spaces. Bull. Sci. Math. 119 (1995) 95-118.

90. Exact operator spaces. Colloque sur les algèbres d'opérateurs. in "Recent advances in operator algebras" (Orléans 1992) Astérisque (Soc. Math. France) 232 (1995) 159-186.

91. Bilinear forms on exact operator spaces and $B(H) \otimes B(H)$. (En collaboration avec Marius Junge) Geometric and Functional Analysis (GAFA Journal) 5 (1995) 329-363.

92. Subspaces of Banach Lattices. En Préparation.

93. A simple proof of a theorem of Kirchberg and related results on C^*-norms. J. Op. Theory. 35 (1996) 317-335.

94. Espaces de Banach quantiques: Une introduction à la théorie des espaces d'opérateurs. Journée de la Société mathématique de France, 1994.

95. *Similarity problems and completely bounded maps.* Springer Lecture Notes 1618,
Springer-Verlag, Berlin, 1996. viii+156 pp.
Nouvelle Edition Augmentée (2001) 198p.

96. Quadratic forms in unitary operators. Linear Algebra Appl. 267 (1997), 125–137.

97.a. Inégalités de martingales non commutatives. (En collaboration with Q. Xu) C. R. Acad. Sci. Paris 323 (1996) 817-822.

97.b. Non-commutative martingale inequalities. (En collaboration with Q. Xu) Comm. Math. Physics, 189 (1997) 667–698.

98. Espaces d'opérateurs: une nouvelle dualité. (French) [Operator spaces: a new duality] Séminaire Bourbaki, Vol. 1995/96. Astérisque No. 241, (1997), Exp. No. 814, 4, 243–272.

99.a. Un opérateur polynômialement borné sur un Hilbert qui n'est pas semblable à une contraction. Comptes Rendus Acad. Sci. Paris 322 (1996) 547-550.

99.b. A polynomially bounded operator on Hilbert space which is not similar to a contraction. Journal Amer. Math. Soc. 10 (1997) 351-369.

100 *An introduction to the theory of operator spaces.* Livre En Préparation (400p. environ).

101 The similarity degree of an operator algebra. St. Petersburg Math. J. 10 (1999) 103-146.

102 The “maximal” tensor product of operator spaces. (Joint with T. Oikhberg) 42 (1999) 267-284.

103 Joint similarity problems and the generation of operator algebras with bounded length. Integral Equations Operator Theory 31 (1998) 353–370.

104 Problèmes de similarité pour les opérateurs sur l’espace de Hilbert. (Colloque en l’honneur de J. Dieudonné, Nice 1996) Séminaires et Congrés 3 (Soc. Math. france) 169-201.

105 Operator spaces and similarity problems, Proc. ICM Berlin, Plenary talk, Doc. Math. 1998, Extra Vol. I, 429–452 (electronic).

106 Are unitarizable groups amenable? En Préparation.

107 On a question of Niels Grønbaek. Proc. Royal Irish Soc. 100A (2000) 55-58.

108 The similarity degree of an operator algebra. II. Math. Zeit. 234 (2000) 53-81.

109 Remarks on the similarity degree of an operator algebra. International J. Math. (2001).

110 An inequality for p-orthogonal sums in non-commutative L_p. Illinois J. Math. 44 (2000) 901-923.

111 Similarity problems and length. International Conference on Mathematical Analysis and its Applications (Kaohsiung, 2000). Taiwanese J. Math. 5 (2001), no. 1, 1–17.

112 Multipliers of the Hardy space H^1 and power bounded operators. Colloq. Math. 88 (2001), no. 1, 57–73.

113 Operator spaces. Handbook on Banach spaces (edited by W.B. Johnson and J. Lindenstrauss). Elsevier, à paraître.

114 Non-commutative L^p-spaces (avec Q. Xu). Handbook on Banach spaces (edited by W.B. Johnson and J. Lindenstrauss). Elsevier, à paraître.

115 Notes on Banach space valued H^p-spaces, non-commutative martingale inequalities and matrix valued Harmonic Analysis. En préparation.

116 Sharp estimates in vector Carleson imbedding theorem and for vector paraproducts, J. Für die reine und agew. Math. (En collaboration avec F. Nazarov, S. Treil et A. Volberg). J. Reine Angew. Math. 542 (2002), 147–171.

117 Grothendieck’s theorem for operator spaces (avec D. Shlyakhtenko). Invent. Math. 150 (2002), no. 1, 185–217.

118 The Operator Hilbert Space OH and TYPE III von Neumann Algebras. Bull. London Math. Soc. To appear.

119 Completely bounded maps with values in $(C, R)_\theta$. In preparation.

LIVRES

(déjà inclus dans la liste précédente)

1. *Random Fourier Series with Applications to Harmonic Analysis.*
(En collaboration avec M.B. Marcus)
Annals of Math. Studies n°101, Princeton University Press, 1981, 150p.

2. *Factorization of Linear Operators and the Geometry of Banach Spaces.*
CBMS. Regional conference of the A.M.S. n° 60 (1986). Reprinted with corrections 1987.

3. *The volume of Convex Bodies and Banach Space Geometry .*
Cambridge University Press, 1989, 250p. Deuxième édition (brochée) 1999.

4 *The operator Hilbert space OH, complex interpolation and tensor norms.*
Memoirs Amer. Math. Soc. vol. 122 , 585 (1996) 1-103.

5 *Noncommutative vector valued L_p-spaces and completely p-summing maps.*
Soc. Math. France. Astérisque 237 (1998) 131p.

6 *Similarity problems and completely bounded maps.*
Springer Lecture Notes 1618, Springer-Verlag, Berlin, 1996. viii+156 pp.
Nouvelle Edition Augmentée (2001) 198p.

7 *Introduction to Operator Space Theory.*
Cambridge University Press. En Préparation (400p. environ). A paraître en 2002.

CURRICULUM VITAE

PISIER Gilles Jean Georges

Né le 18 Novembre 1950 à Nouméa.

1967	Baccalauréat (Mathématiques Elémentaires au lycée Buffon, Paris)
1967-68 1968-69	Mathématiques Supérieures et Mathématiques Spéciales au lycée Louis-le Grand, Paris.
1969-72	Elève à l'Ecole Polytechnique
1972	D.E.A. de Mathématiques pures à l'université PARIS VI.
Oct. 72	Stragiaire puis Attaché de Recherche au C.N.R.S.
Nov. 77	Thèse de doctorat d'état sous la direction de Laurent Schwartz.
Oct. 79	Chargé de Recherche au C.N.R.S.
Oct. 81	Professeur à l'Université PARIS VI.

DISTINCTIONS DIVERSES

– Prix Salem 1979.

– Cours Peccot au Collège de France (janv. Févr. 81)

– Prix Carrière de l'Académie des Science de Paris 1982.

– Conférencier invité au congrès international des mathématiciens (Varsovie 1983).

–Fellow of the Institute of Mathematical Statistics, 1989.

–Grands prix de l'Académie des Sciences de Paris: Prix Fondé par l'Etat 1992

– Conférence d'une heure, Congrés A.M.S. (College Station, Texas 1993).

–Élu Membre Correspondant de l'Académie des Sciences de Paris (Avril 94).

–Prix Ostrowski, 1997.

–Conférence pleinière, International Congress of Mathematicians, Berlin 1998.

–"Invited one hour address" , Congrés joint de la société mathématique de Hong-Kong (HKMS) et de la société mathématique américaine (AMS), à Hong-Kong, décembre 2000.

–Médaille Stefan Banach décernée par l' Académie Polonaise des Sciences (mai 2001).

–Élu Membre de l'Académie des Sciences de Paris (Novembre 2002).

PRINCIPALES CONFÉRENCES RÉCENTES

-Journée Soc. Math. France, Paris juin 94.

-British Math. Colloquium, Edimbourg, 94.

-Colloquium, UCLA, Los Angeles, septembre 97.

-Colloquium, Princeton Math. Dept. Novembre 97.

-Colloquium, MIT (Cambridge, Mass.). Octobre 97.

-Distinguished lecture series, Kansas State Univ. Manhattan, Kansas, printemps 97.

-Conférencier invité, Great Plains Operator theory Seminar (=GPOTS), Kingston, Ontario, Canada, mai 97.

-Wabash seminar, Indianapolis, USA, mai 97.

-Conférencier invité, Real and Complex Analysis conference, Euler Institute, St. Petersbourg, Russie, juin 97.

-Conférencier invité, Operator Algebras, Shanghai, Chine, aout 97.

-Distinguished special lecture series, Georgia Tech., Atlanta, USA décembre 97.

-Distinguished lecture series (“Cantrell lectures”), University of Georgia, Athens, USA décembre 98.

-Conférencier invité, Harmonic Analysis conference (in honor of Figa-Talamanca), Ponza, Italie, juin 98.

-Conférencier invité, Operator algebra and non-commutative geometry Copenhagen, Danemark, juillet 98.

-Conférencier invité, Harmonic and Functional Analysis (ICM satellite conference), Kiel, Allemagne, aout 98.

-ICM, Berlin (plenary) aout 98.

-Conférencier invité, Austrian Math. Soc. annual meeting, Salzburg, septembre 98.

-Colloquium, Orsay, Nov 98.

-Applied Math. Seminar (ex-J.L. Lions seminar), novembre 98.

-Distinguished lecture series, UC Irvine, USA, mai 99.

-Conférencier invité, Geometric and Functional Analysis conference, Pacific Institute PIMS, Vancouver, Canada, aout 99.

-Keynote Speaker, ICMAA 2000, Taiwan, janvier 00.

-Conférencier invité, GPOTS, Puerto Rico, may 00.

-Conférencier invité, First Latin American Congress , Rio, Brazil, aout 00.

-Conférencier invité, Korean Math. Soc. annual meeting, Seoul, octobre 00.

-“Distinguished lecture Series”, Univ. Calif. Los Angeles (UCLA), prévu Nov. 2001.

-“Plenary speake”r, GPOTS, Univ. of Illinois, Urbana, mai 03.

-Sélection d’autres exposés de séminaire au cours des dernières années: Orléans, Lille, Bordeaux, Besançon, Genève, Neuchatel, Edimbourg, Cambridge, Newcastle, Londres (UCL), Reading, Heidelberg, Odense, Amsterdam, Rome, Vienne, Houston (UH), Albuquerque, Los Angeles (UCLA), Santa Barbara, Berkeley, Austin, Urbana, Houston (Rice), Dubrovnik, Chengde, Madrid, Tokyo, Kyoto, Kyushu.

DIRECTION DE RECHERCHE

Direction des thèses de troisième cycle et d'Université de: R. Hernandez (troisième cycle, 1982) , Hernandez est devenu ingénieur des Télécom.

D. Lamberton (troisième cycle, 1982), Lamberton est actuellement Professeur à l'Uni-versité de Marne La Vallée.

L. Mezrag (troisième cycle, 1983), Mezrag est actuellement maître de conférences à l'Université de M'Sila (Algérie).

T. Coulhon (troisième cycle, 1982), Coulhon est actuellement professeur à l'Université de Cergy-Pontoise.

Quan-Hua Xu (Nouvelle thèse en 1988 et habilitation en 92), Xu est actuellement Professeur à l'Université de Besançon.

A. Pajor (Thése de 3ème cycle en 1984 et Habilitation en 1989), Pajor est actuellement Professeur à l'Université de Marne La Vallée.

O. Kouba (Thèse de doctorat en juin 1990), Kouba est enseignant-chercheur en Syrie.

C. Le Merdy (thèse de doctorat soutenue le 10 janvier 92, Lemerdy a été recruté au CNRS en 92) et est actuellement Professeur à Besançon.

P. Rauch (Pseudo-complémentation dans les espaces de Banach, thèse de doctorat soutenue le 27 mai 92) P. Rauch est Professeur en Math. Spé, dans un lycée parisien.

A. Harcharras (Thèse de doctorat soutenue à Paris 6 en sept. 97) Actuellement en postdoc à University of Missouri (Columbia, Missouri).

F. Lehner (Thèse de doctorat soutenue à Paris 6 en sept. 97) Post-doc à Odense puis Orléans, actuellement en poste a Gratz (Autriche).

N. Ozawa (Thèse Univ. de Tokyo et Texas A&M Univ.) Mai 2001. Actuellement en poste à l'Université de Tokyo et Postdoc à Berkeley et UCLA.

E. Ricard (ENS, Ulm). Actuellement Chargé de Recherche au CNRS, en poste à Besançon.

Supervision partielle des thèses de H. Lelièvre et J. Marcolino qui les ont soutenues sous la direction de Q. Xu. Supervision partielle (à Texas A&M) de la thèse de T. Oikhberg en 1998.

Thèse en préparation:

- Tao Mei (WuHan Univ. and Texas A& M Univ.).