Notice personnelle

Jean-François Le Gall

Janvier 2014

Cette notice comprend trois parties. La première, qui est la plus longue, est une présentation détaillée de mes principaux travaux de recherche. La seconde donne la liste de mes étudiants en thèse avec une brève description de leur travail. Enfin la dernière comprend ma liste de publications.

1 Travaux scientifiques

Dans la présentation qui suit, j'ai privilégié cinq grands thèmes de recherche : mes premiers travaux autour des auto-intersections du mouvement brownien et des marches aléatoires, l'introduction du serpent brownien et ses applications aux processus à valeurs mesures appelés superprocessus par Dynkin, les liens entre le serpent brownien et une classe d'équations aux dérivées partielles semilinéaires, l'utilisation des processus de Lévy pour coder et étudier la généalogie des processus de branchement à espace d'états continu, et enfin mes travaux récents sur la carte brownienne, qui est un modèle universel de géométrie aléatoire dans le plan. Les références numérotées [1],[2],... renvoient à ma liste de publications à la fin de ce document. Je laisse de coté beaucoup d'autres contributions, notamment mes travaux en collaboration avec Marc Yor sur les nombres de tours du mouvement brownien [10,18,37], mes résultats autour des points cônes du mouvement brownien plan [15,42], mon travail avec Maury Bramson et Ted Cox sur le modèle du votant [77], ma série d'articles avec Jean Bertoin sur les modèles de coalescence [74,81,84,90], ou encore mon travail récent avec Nicolas Curien [115] sur la mesure harmonique des boules dans les arbres aléatoires. Ces résultats ne me semblent pas moins intéressants, mais ils sont quelque peu "marginaux" par rapport aux grands axes évoqués ci-dessous.

1.1 Intersections de mouvements browniens et de marches aléatoires

Propriétés fines des points multiples browniens. A la fin des années 1950, des articles classiques de Dvoretzky, Erdös and Kakutani ont établi l'existence de points multiples d'un ordre fini quelconque de la courbe brownienne plane, et même de points de multiplicité infinie. Une question naturelle formulée par Taylor était d'étudier la taille de l'ensemble des points ayant une multiplicité donnée, et en particulier de comparer la taille de l'ensemble des points de multiplicité n à celle de l'ensemble des points de multiplicité $n+1$: peut-on dire en un sens précis qu'il y a beaucoup plus de points de multiplicité n que de points de multiplicité $n+1$? Dans son livre *Quelques aspects de la pensée d'un mathématicien*, Paul Lévy avait déjà exprimé l'idée que la notion de mesure de Hausdorff permettrait de distinguer entre points de multiplicité

n et points de multiplicité $n+1$: si h est une fonction croissante positive définie sur les réels positifs, on peut lui associer une mesure appelée la h-mesure de Hausdorff (très informellement, la h-mesure attribue localement une masse $h(r)$ à une boule de rayon r). Taylor avait conjecturé que, si $h_\alpha(x) = x^2(\log \frac{1}{x})^\alpha$, la h_α-mesure de Hausdorff de l'ensemble des points de multiplicité n est 0 pour $\alpha < n$ mais ∞ pour $\alpha > n$. Mon article [11] publié en 1986 démontre la conjecture de Taylor. Un outil important de la preuve, utile dans d'autres applications, consiste à approcher la mesure naturelle sur l'ensemble des points de multiplicité n (construite à partir du temps local d'intersection, qui avait été introduit indépendamment par Dynkin et Geman-Horowitz-Rosen) par l'aire de l'intersection de saucisses de Wiener indépendantes - voir ci-dessous pour la définition de la saucisse de Wiener associée à un mouvement brownien.

Dans l'article [21], j'améliore les méthodes qui m'avaient servi dans la preuve de la conjecture de Taylor, pour donner la fonction de mesure de Hausdorff exacte (c'est-à-dire la fonction h telle que la h-mesure de l'ensemble considéré soit à la fois strictement positive et finie), pour l'ensemble des points de multiplicité n de la courbe brownienne plane, ainsi que pour l'ensemble des points doubles de la courbe brownienne en dimension 3. La fonction de mesure exacte est $x^2(\log \frac{1}{x} \log\log\log \frac{1}{x})^n$ en dimension 2 et $x(\log\log \frac{1}{x})^2$ pour les points doubles en dimension 3, ce qui généralise des résultats de Lévy, Ciesielski and Taylor pour la courbe brownienne.

Je me suis aussi intéressé aux points de multiplicité infinie de la courbe brownienne plane, dont l'existence avait tant fasciné Lévy. Dans un article [17] de 1987, je montre l'existence de points de multiplicité infinie ayant un type d'ordre arbitraire. Précisément, si K est un sous-ensemble compact d'intérieur vide de la droite réelle $\mathbf{R}$, il existe un point z de la courbe brownienne tel que l'ensemble des temps où le mouvement brownien se trouve en z est l'image de K par un homéomorphisme croissant de $\mathbf{R}$. En particulier, ceci entraîne l'existence de points de multiplicité exactement dénombrable, ce qui était alors un problème ouvert. Ces résultats apparemment spectaculaires peuvent pourtant être établis sans estimations techniques fastidieuses, l'idée-clé étant de donner un sens précis à l'assertion selon laquelle, entre les deux instants où il passe par un point double, le mouvement brownien se comporte comme un lacet brownien.

Théorèmes limites pour la saucisse de Wiener. Si $B = (B_t, t \geq 0)$ est un mouvement brownien dans $\mathbf{R}^d$, $d \geq 2$, et K est un sous-ensemble compact non-polaire de $\mathbf{R}^d$, la saucisse de Wiener S_t^K est la réunion des ensembles $B_s + K$ quand s varies dans l'intervalle $[0,t]$. En particulier, si K est une boule fermée centrée en l'origine, S_t^K est un voisinage tubulaire de la courbe brownienne sur l'intervalle $[0,t]$. Pour simplifier les notations, on écrit $S^K := S_1^K$. Si m désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^d$, le comportement de $m(S_t^K)$ quand $t \to \infty$ est (essentiellement) équivalent à celui de $m(S^{\varepsilon K})$ quand $\varepsilon \to 0$, via un argument de changement d'échelle. Un résultat classique de Kesten, Spitzer et Whitman énonce qu'en dimension $d \geq 3$, $t^{-1} m(S_t^K)$ converge p.s. vers la capacité newtonienne de K. En dimension deux, $(\log t/t) m(S_t^K)$ converge p.s. vers 2π (voir mes articles [11] pour le cas de la boule et [26] pour le cas général). Cette dernière convergence est liée à un développement asymptotique de l'espérance $E[m(S_t^K)]$ dû à Spitzer, qui avait relié le volume moyen de la saucisse de Wiener à un problème de conduction de la chaleur : la différence $E[m(S_t^K)] - m(K)$ s'interprète comme la quantité totale de chaleur transmise par K au milieu environnant avant l'instant t, si on suppose que K est maintenu à la température constante 1 alors que le milieu environnant $\mathbf{R}^d \backslash K$ est initialement à la température 0.

Dans plusieurs articles entre 1985 et 1990, j'ai obtenu des théorèmes asymptotiques donnant des informations plus précises sur la mesure de la saucisse de Wiener. En particulier, dans un article [26] de 1988, je donne des théorèmes de fluctuations correspondant à la “loi des grands nombres” de Kesten-Spitzer-Whitman. En dimension $d \geq 3$, la loi limite est normale mais, de manière un peu inattendue, ce n'est pas vrai en dimension deux. Dans ce dernier cas, la loi limite est celle d'un temps local d'auto-intersection renormalisé du mouvement brownien plan (introduit par Varadhan) défini formellement par

$$\gamma := \iint_{0 \leq s < t \leq 1} (\delta_0(B_s - B_t) - E[\delta_0(B_s - B_t)])\, ds\, dt,$$

où δ_0 désigne la mesure de Dirac en 0. La variable γ est une sorte de mesure du “nombre d'auto-intersections” de la courbe brownienne.

Dans un article [36] de 1990 que je considère comme l'une de mes contributions les plus importantes, je vais plus loin dans l'étude de la saucisse de Wiener plane ($d = 2$), en donnant un développement asymptotique complet pour la mesure $m(S^{\varepsilon K})$ quand $\varepsilon \to 0$. Le p-ième terme de ce développement fait apparaître un temps local d'auto-intersection renormalisé, noté γ_p, associé aux points de multiplicité p de la courbe brownienne plane (en particulier $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = \gamma + C$ pour une certaine constante C). Pour énoncer le résultat, posons pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$,

$$a_\varepsilon := \frac{1}{\pi} \log \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\pi} L(K),$$

où $L(K)$ désigne la constante de Robin de K (i.e. le logarithme de la capacité logarithmique de K). Alors, pour tout entier $n \geq 1$,

$$m(S^{\varepsilon K}) = \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p+1}\, a_\varepsilon^{-p}\, \gamma_p + r_n(\varepsilon),$$

où le “reste” $r_n(\varepsilon)$ est tel que $|\log \varepsilon|^n r_n(\varepsilon)$ converge vers 0 dans L^2, et presque sûrement quand K est étoilé (en particulier si K est un disque). Ce développement asymptotique, dont l'idée m'est venue de conversations avec Dynkin, est une sorte de couronnement de mes travaux autour des points multiples et de la saucisse de Wiener : il relie les temps locaux d'intersection renormalisés (appelés aussi les puissances du champ d'occupation du mouvement brownien) dont la définition délicate avait fait l'objet de nombreux travaux notamment de Dynkin, Rosen et Yor, au problème plus “concret” de l'étude de la mesure d'un voisinage tubulaire de la courbe brownienne.

En prenant les espérances dans le développement précédent, on obtient un développement asymptotique pour $E[m(S_t^K)]$ quand $t \to \infty$, qui précise considérablement le résultat classique de Spitzer mentionné ci-dessus. Dans un article suivant [27], j'établis des résultats analogues en dimension $d \geq 3$, qui améliorent sensiblement des développements antérieurs dûs à Spitzer et Kac.

Une question complètement différente, à nouveau motivée par le problème de conduction de la chaleur mentionné ci-dessus, est de trouver des développements asymptotiques pour $E[m(S_t^K)]$ quand $t \to 0$. Je traite ce problème dans un article en collaboration avec M. van den Berg [48], sous l'hypothèse que K a une frontière lisse. Le théorème principal donne les deux premiers termes du développement, qui font apparaître respectivement la mesure de la frontière de K et l'intégrale de sa courbure moyenne.

Une bonne partie de mes résultats autour de la saucisse de Wiener et des points multiples browniens est présentée dans mon cours [43] de l'école de probabilités de Saint-Flour.

Marches aléatoires. Beaucoup des résultats précédents ont des analogues pour les marches aléatoires sur le réseau $\mathbf{Z}^d$. Dans deux articles [12,13] de 1986, je traite d'une façon exhaustive le problème du comportement asymptotique du nombre de points d'intersection des trajectoires jusqu'à l'instant n de k marches aléatoires indépendantes (centrées et de variance finie) dans $\mathbf{Z}^d$. Une motivation importante était d'établir un théorème de fluctuation pour le nombre de points visités par une marche aléatoire plane. Le nombre de points visités par une marche aléatoire (*range*) avait été étudié par Dvoretzky et Erdös dans un travail pionnier en 1950, puis par Jain et Pruitt dans une série d'articles dans les années 1960. L'existence d'un théorème de fluctuation en dimension 2 était sans doute le problème ouvert le plus important restant en suspens. Je résouds ce problème [12] en montrant que, si R_n désigne le nombre de points distincts visités par une marche aléatoire plane (centrée et de variance finie) avant l'instant n, on a

$$\frac{(\log n)^2}{n}(R_n - E[R_n]) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{(d)}} -C\,\gamma,$$

où C est une constante positive, γ est le temps local d'auto-intersection renormalisé (pour les points doubles) introduit ci-dessus, et $\xrightarrow{\text{(d)}}$ indique la convergence en distribution (en loi).

Ce résultat peut être appliqué à des principes d'invariance pour les marches aléatoires faiblement auto-évitantes : alors que pour une marche aléatoire simple sur le réseau $\mathbf{Z}^2$ la probabilité de suivre l'un des chemins possibles (partant de l'origine et se déplaçant à chaque pas en l'un des voisins du site précédent) est la même pour tous les chemins, une marche aléatoire faiblement auto-évitante affecte à chaque chemin possible un poids de probabilité d'autant plus petit que le chemin se recoupe "beaucoup". Pour un choix adéquat des paramètres, une marche aléatoire faiblement auto-évitante sur l'intervalle $[0, n]$, convenablement changée d'échelle, convergera en loi vers la mesure de polymère en dimension deux (qui a une densité de la forme $c_1 \exp(-c_2\,\gamma)$, où c_1 et c_2 sont des constantes positives, par rapport à la loi du mouvement brownien). Dans un article [66] de 1997, je donne une preuve simple de ce résultat, qui avait été établi par Stoll avec des outils d'analyse non-standard. Dans le même esprit, un article [53] de 1994, écrit en réponse à une question de Gordon Slade, montre l'existence de moments exponentiels positifs pour la variable γ (l'existence de moments exponentiels négatifs, établie précédemment par Varadhan, autorise la construction de la mesure de polymère plane). La finitude de (certains) moments exponentiels positifs permet de construire les modèles de mouvement brownien auto-attractif étudiés ensuite par Brydges et Slade.

Un article [39] de 1991 avec Jay Rosen explore des extensions des résultats classiques (mentionnés ci-dessus) pour le nombre de points visités par une marche aléatoire dans $\mathbf{Z}^d$, aux marches aléatoires dans le domaine d'attraction de lois stables. Sous des hypothèses de régularité relativement faibles, ce travail donne un panorama assez complet des théorèmes limites pour le nombre de points visités qui peuvent être obtenus dans ce cadre.

1.2 Serpent brownien et superprocessus

Dans la deuxième moitié des années quatre-vingt, plusieurs auteurs dont Eugene Dynkin et Edwin Perkins entreprirent une étude approfondie des processus à valeurs mesures appelés superprocessus par Dynkin. Initialement, ces processus avaient pour but de modéliser l'évolution de populations soumises à un double phénomène de branchement et de déplacement spatial. En dehors de cette motivation initiale, il apparut assez vite que les superprocessus étaient des objets importants pour de nombreuses autres raisons, dont certaines seront expliquées ci-dessous. En particulier, les superprocessus interviennent dans l'étude asymptotique de modèles variés issus de la mécanique statistique, la combinatoire ou encore la théorie des systèmes de particules en interaction (voir notamment mon article [77] avec Maury Bramson et Ted Cox).

Si on se limite au cas où le phénomène de branchement est indépendant de la position dans l'espace, un superprocessus est décrit par la donnée de deux éléments, le déplacement spatial ξ qui est un processus de Markov, et le mécanisme de branchement ψ qui est une fonction définie sur $\mathbf{R}_+$. Pour la plupart des applications, le cas de loin le plus important est le mécanisme de branchement quadratique $\psi(u) = c\,u^2$, qui apparaît dans la limite des systèmes de particules avec branchement quand la loi de reproduction (la loi du nombre d'enfants d'un individu) est critique (c'est-à-dire de moyenne 1) et de variance finie. Dans ce cas particulier, le processus de la masse totale du superprocessus est un processus de diffusion appelé diffusion de Feller. En général, le processus de la masse totale est un processus de branchement à espace d'états continu (*continuous-state branching process* en anglais) de loi caractérisée par le mécanisme de branchement ψ.

Le serpent brownien. Ma première contribution [40] à l'étude des superprocessus, publiée en 1991, fut une construction trajectorielle dans le cas du mécanisme de branchement quadratique, qui sépare clairement les rôles du phénomène de branchement et du déplacement spatial. Plus précisément, l'arbre généalogique sous-jacent des "particules infinitésimales" du superprocessus est d'abord codé par une excursion brownienne (ou plutôt par un processus de Poisson de telles excursions, qu'on peut engendrer par la trajectoire d'un mouvement brownien réfléchi) et ensuite il est aisé de construire les déplacements spatiaux en utilisant cette structure généalogique. Un gros avantage de cette approche, déjà exploité dans [40], est le fait que de nombreuses propriétés trajectorielles, concernant par exemple les instants d'extinction locale, deviennent faciles à obtenir. L'idée que la généalogie de la diffusion de Feller peut être codée par des excursions browniennes apparaissait dans les travaux antérieurs de divers auteurs qui établissaient des liens entre le mouvement brownien linéaire et les arbres associés aux processus de branchement. Plus tard, cette idée a été rendue précise par Aldous dans son travail sur l'arbre brownien continu (CRT), qui n'est rien d'autre que l'arbre codé par une excursion brownienne normalisée, i.e. de durée égale à 1. Dans l'article [46], je donne une approche directe simple des lois marginales du CRT, qui utilise seulement les propriétés des excursions browniennes, alors que l'approche initiale d'Aldous reposait sur des approximations discrètes du CRT.

Dans un article [45] publié en 1993, je présente une version différente de ma construction trajectorielle des superprocessus, reposant sur l'introduction du processus appelé le *serpent brownien* (cette nouvelle approche s'avèrera très importante pour les applications à venir). Si l'on considère les trajectoires spatiales individuelles des "particules" comme étant paramétrées par le temps de l'excursion brownienne qui code la généalogie (ce temps n'a rien à voir avec celui du superprocessus !), on obtient un **processus de Markov** à valeurs dans les trajectoires finies, qui est le serpent brownien. Le comportement du serpent brownien est facile à décrire. Sa valeur à l'instant s est une trajectoire W_s du déplacement spatial ξ (partant d'un point initial fixé) avec un temps de vie aléatoire ζ_s. Le processus aléatoire $(\zeta_s)_{s\geq 0}$ suit la loi d'un mouvement brownien réfléchi (la valeur absolue d'un mouvement brownien standard en dimension un). De manière informelle, quand ζ_s décroît, la trajectoire W_s est raccourcie à partir de son point terminal (le point de départ ne change jamais) et quand ζ_s croît, la trajectoire W_s est allongée en lui ajoutant au niveau de son point terminal des "petits bouts" de trajectoires suivant la loi du déplacement spatial. Pour résumer, on peut construire les trajectoires historiques d'un superprocessus (avec branchement quadratique) en considérant l'ensemble des valeurs prises par le serpent brownien, qui est un processus de Markov à valeurs dans les trajectoires.

Le serpent brownien étant un "bon" processus de Markov symétrique, j'ai rapidement eu l'idée d'utiliser des outils de théorie du potentiel probabiliste pour attaquer les problèmes de polarité qui intéressaient alors beaucoup les spécialistes. Déjà dans l'article [45] introduisant le serpent brownien (le nom de serpent brownien n'a en fait été utilisé qu'à partir de 1995 sur une suggestion de Dynkin) je m'intéresse au problème de décrire les ensembles polaires pour le superprocessus. Cela revient à trouver les sous-ensembles A de l'espace d'états de ξ qui sont tels que l'ensemble des trajectoires rencontrant A soit polaire pour le serpent brownien – au sens où, avec probabilité 1, le serpent brownien ne visite pas cet ensemble. Le critère d'énergie classique conduit à une condition suffisante de non-polarité pour un déplacement spatial général. Dans le cas particulier du super-mouvement brownien (i.e. quand le déplacement spatial est le mouvement brownien dans $\mathbf{R}^d$), on retrouve les conditions obtenues par Perkins et Dynkin (comme Dynkin l'a montré en utilisant les liens avec les équations aux dérivées partielles, ces conditions sont dans ce cas à la fois nécessaires et suffisantes). Dans un article suivant [49] publié en 1994, je continue l'étude du serpent brownien du point de vue de la théorie du potentiel, en donnant une formule simple pour l'énergie d'une mesure sur les trajectoires, et en déterminant la mesure capacitaire de l'ensemble des trajectoires qui visitent un sous-ensemble donné de l'espace d'états (ou bien de l'ensemble des trajectoires qui quittent un domaine par un sous-ensemble donné de sa frontière). En conséquence de la théorie générale, ces mesures capacitaires sont solutions de problèmes variationnels simples sur l'espace des mesures de probabilité sur les trajectoires.

Peut-être l'un des avantages les plus convaincants du serpent brownien est, lorsque le déplacement spatial est le mouvement brownien dans $\mathbf{R}^d$, de fournir une image très claire, en même temps qu'un moyen de calcul effectif, pour la mesure aléatoire appelée "Integrated super-Brownian excursion" (ISE) qui s'est avérée un objet fondamental pour décrire diverses asymptotiques en mécanique statistique ou en combinatoire. Comme cela est expliqué dans le chapitre IV de ma monographie [72], ISE n'est rien d'autre que la mesure uniforme sur l'ensemble des points visités par un serpent brownien dont le processus des temps de vie $(\zeta_s)_{s\geq 0}$, au lieu de suivre la loi d'un mouvement brownien réfléchi, est une excursion de durée 1 de ce mouvement brownien en dehors de 0 (on parle alors du serpent brownien dirigé par une excursion brownienne normalisée).

Propriétés trajectorielles du super-mouvement brownien. Dans la fin des années quatre-vingt, Perkins et ses collaborateurs ont établi de nombreuses propriétés trajectorielles très précises du super-mouvement brownien, concernant en particulier la mesure de Hausdorff du support à un temps fixe, ou de la réunion des supports (*range* en anglais). Les deux problèmes ouverts les plus importants étaient la détermination de la fonction de mesure de Hausdorff exacte dans les dimensions critiques ($d = 2$ pour le support à un temps fixe, $d = 4$ pour la réunion des supports). J'ai pu résoudre ces deux problèmes grâce au serpent brownien. Dans un article [58] de 1995 en collaboration avec Edwin Perkins, je montre que la fonction de mesure de Hausdorff exacte pour le support en dimension 2 est $\varphi(r) = r^2 \log \frac{1}{r} \log\log\log \frac{1}{r}$ (comme pour la courbe brownienne plane). Dans un article suivant [71] publié en 1999, j'obtiens le résultat analogue pour la réunion des supports en dimension 4 : la fonction correspondante est $\varphi(r) = r^4 \log \frac{1}{r} \log\log\log \frac{1}{r}$. Dans les deux cas, le serpent brownien joue un rôle essentiel en fournissant des outils (notamment la propriété de Markov forte du serpent) qui ne sont pas accessibles par d'autres approches.

D'autres propriétés trajectorielles du super-mouvement brownien seront décrites ci-dessous dans le paragraphe consacré aux applications aux équations aux dérivées partielles. Dans leur travail de thèse sous ma direction, J.F. Delmas, J.S. Dhersin et L. Serlet ont aussi donné plusieurs applications du serpent brownien aux propriétés trajectorielles des superprocessus.

1.3 Applications aux équations aux dérivées partielles

Entre 1993 et 1998, j'ai consacré une partie importante de mon activité de recherche aux liens entre serpent brownien et équations aux dérivées partielles. Ces liens ont des analogies fortes avec les résultats classiques de Doob et Kakutani reliant mouvement brownien et fonctions harmoniques, qui m'avaient fasciné depuis toujours. Cependant le cadre non linéaire conduit à des phénomènes nouveaux intéressants.

On savait depuis les années 1970 que la fonctionnelle de Laplace d'un superprocessus s'exprime en termes de la solution d'une équation aux dérivées partielles semilinéaires. Pourtant, c'est seulement avec le travail de Dynkin au début des années 1990 (et notamment avec la solution du problème de Dirichet non linéaire, et le lien entre ensembles polaires et singularités éliminables pour l'EDP associée) que la richesse de ces relations devint évidente. Ma contribution personnelle fut d'observer que pour différents problèmes (et en particulier pour le problème important de la classification des solutions dans un domaine) le serpent brownien fournit une approche plus efficace et plus "trajectorielle" pour d'abord deviner et ensuite démontrer des énoncés analytiques par des méthodes probabilistes. Bien que cette approche semble limitée au cas quadratique (et donc à l'équation $\Delta u = u^2$ ou à l'équation parabolique associée), il s'est avéré que la quasi-totalité des résultats établis dans ce cas particulier ont pu ensuite être étendus à des équations plus générales, par des méthodes aussi bien analytiques que probabilistes.

Dans ce qui suit, le mot "solution" signifie toujours "solution positive".

Singularités éliminables. Dans l'article [54], je propose une reformulation des liens entre superprocessus et équations aux dérivées partielles dans le langage du serpent brownien. Davantage qu'une reformulation, le serpent brownien permet de simplifier considérablement certaines constructions, et notamment celle de la mesure de sortie d'un domaine D : de manière informelle, la mesure de sortie hors d'un domaine D est "uniformément répartie" sur l'ensemble des points de sortie des trajectoires W_s hors de D.

Dans un domaine lisse, la solution maximale de l'équation $\Delta u = u^2$ qui s'annule à la frontière sauf éventuellement sur un sous-ensemble compact donné $K \subset \partial D$ s'exprime via la probabilité que l'une des trajectoires W_s sorte de D en un point de K. En conséquence, K est une singularité éliminable à la frontière si et seulement si l'ensemble des trajectoires qui sortent de D en un point de K est polaire pour le serpent brownien (les singularités éliminables à la frontière ont été étudiées pour des équations de la forme $\Delta u = u^p$ par Gmira et Véron, qui ont montré que les singletons sont éliminables si et seulement si $d \geq \frac{p+1}{p-1}$). En utilisant l'observation précédente et les outils de théorie du potentiel probabiliste, je montre dans [49] que K est non polaire à la frontière dès qu'il porte une mesure non-triviale ν telle que

$$\int_D G_D(x_0,y)\Big(\int_{\partial D} P_D(y,z)\,\nu(dz)\Big)^2\,dy < \infty,$$

où G_D est la fonction de Green de D, P_D est son noyau de Poisson et x_0 est un point fixé de D dont le choix n'a pas d'importance. Dynkin avait conjecturé que cette condition est non seulement suffisante mais aussi nécessaire pour la non-polarité. La preuve du caractère nécessaire est donnée dans mon article [56], qui, avec [63] décrit ci-dessous, est l'une de mes deux contributions les plus significatives à l'approche probabiliste des équations aux dérivées partielles. Cette preuve utilise des arguments analytiques inspirés des travaux de Baras et Pierre. Il est intéressant de noter que le résultat analogue pour l'équation $\Delta u = u^p$ a été obtenu plus tard, par Dynkin et Kuznetsov dans le cas $1 < p < 2$ et par Marcus et Véron dans le cas $p > 2$ (assez curieusement, les méthodes analytiques de Marcus et Véron ne s'appliquaient pas au cas $p < 2$, alors que l'approche plus probabiliste de Dynkin et Kuznetsov était au contraire limitée à ce cas).

L'article [56] contient aussi la preuve d'une autre conjecture de Dynkin concernant les solutions de $\Delta u = u^2$ qui sont majorées par une fonction harmonique. Une telle solution est caractérisée par son majorant harmonique minimal, qui est lui-même associé via la représentation de Poisson à une mesure finie sur la frontière. Dans [56], je montre que, via cette correspondance, les solutions de $\Delta u = u^2$ majorées par une fonction harmonique sont en bijection avec les mesures finies sur ∂D qui ne chargent pas les polaires (Dynkin et Kuznetsov ont ensuite obtenu des généralisations de ce résultat). La preuve utilise les propriétés du serpent brownien, et particulièrement la propriété de Markov spéciale, que j'établis dans [56] et qui a beaucoup d'autres applications importantes.

La classification des solutions. Des discussions avec Laurent Véron au début des années quatre-vingt-dix m'ont amené à m'intéresser au problème de la classification des solutions de $\Delta u = u^2$ dans un domaine lisse. Schématiquement le problème, qui est analogue à la représentation de Poisson des fonctions harmoniques, est d'établir une bijection entre les solutions et leurs traces sur la frontière (définies de manière convenable), et ensuite de classifier toutes les traces possibles.

Dans le cas d'un domaine à frontière lisse du plan, ce problème est complètement résolu dans mon article [63] : il existe une correspondance bijective entre les solutions (positives) de $\Delta u = u^2$ dans un domaine (lisse, borné) D du plan et les couples (K,ν) où K est un sous-ensemble compact de ∂D et ν une mesure de Radon sur $\partial D\backslash K$. Le couple (K,ν) associé à la solution u est appelé la trace de u et il peut être caractérisé facilement à partir du comportement de u à la frontière. De manière informelle, K est l'ensemble des points de la frontière où u explose "fortement", et ν apparaît comme une valeur frontière généralisée de u sur $\partial D\backslash K$. Jusqu'à ce point l'énoncé est analytique, mais la preuve donnée dans [63] est probabiliste, et repose fortement sur la représentation en termes du serpent brownien de la solution u de trace (K,ν) :

$$u(x) = \mathbf{N}_x\Big(1 - 1_{\{\mathcal{R}^D\cap K=\emptyset\}}\exp(-\langle \nu, z_D\rangle)\Big),$$

où $\mathbf{N}_x$ est la "mesure d'excursion" du serpent brownien avec point initial $x \in D$ (intuitivement, cette mesure d'excursion produit un "arbre" de trajectoires issues de x), $\mathcal{R}^D$ est l'ensemble des points visités par les trajectoires jusqu'à leur temps de sortie de D, et z^D est la densité (continue) de la mesure de sortie de D (le fait que cette densité existe pour un domaine plan de frontière lisse est établi dans l'article [52], qui donne aussi de nombreuses autres propriétés des mesures de sortie). Il est à noter que la représentation probabiliste permet facilement d'établir diverses propriétés analytiques des solutions.

L'article [63] a motivé toute une série d'articles ultérieurs utilisant aussi bien des outils analytiques que des méthodes probabilistes. Marcus et Véron ont d'abord étendu la correspondance bijective entre les solutions et leurs traces (K,ν) à l'équation $\Delta u = u^p$ dans un domaine lisse de $\mathbf{R}^d$, dans le cas *sous-critique* $d < \frac{p+1}{p-1}$ (c'est le cas où les singletons ne sont pas polaires, $d = 1$ et $d = 2$ sont les seules possibilités lorsque $p = 2$). Toutes les paires (K,ν) du type considéré ci-dessus sont encore des traces possibles.

Le cas sur-critique $d \geq \frac{p+1}{p-1}$ est plus délicat. Dans ce cas, Dynkin et Kuznetsov ont introduit une notion de trace plus fine, classifié les traces fines possibles, et conjecturé que les solutions sont caractérisées par leur trace fine. Cette conjecture majeure du sujet a été démontrée par mon étudiant B. Mselati dans le cas particulier de l'équation $\Delta u = u^2$ dans son travail de thèse, publié dans les Memoirs AMS en 2004. La preuve utilise à la fois des outils analytiques et des ingrédients probabilistes reposant sur le serpent brownien. Le résultat de Mselati a été étendu au cas de l'équation $\Delta u = u^p$ pour $1 < p \leq 2$, dans une série d'articles de Dynkin et Kuznetsov.

Solutions avec explosion à la frontière. Dans les années cinquante, Keller et Osserman ont observé que sous certaines conditions sur la fonction ψ (réalisées pour $\psi(u) = u^p$, $p > 1$) il existe des solutions de l'équation $\Delta u = \psi(u)$ dans un domaine lisse qui explosent partout à la frontière. Cela conduit aux deux questions suivantes.

(1) Pour un domaine général D, existe-t-il une solution qui explose partout à la frontière ?

(2) Si la réponse à la question (1) est oui, cette solution est-elle unique ?

Dans le cas particulier de l'équation $\Delta u = u^2$, j'ai donné dans [65] (en collaboration avec mon étudiant Jean-Stéphane Dhersin) une réponse complète au problème (1). Plus précisément, cet article donne une condition nécessaire et suffisante, prenant la forme d'un test de Wiener, pour que la solution maximale dans D explose en un point donné z de la frontière. Du point de vue probabiliste, cette condition signifie que le serpent brownien avec point initial z sortira immédiatement de D (au sens où il existera des valeurs de s arbitrairement petites telles que l'ensemble $\{W_s(t), 0 < t \leq \zeta_s\}$ rencontre D^c). Il est intéressant de noter que la forme analytique du résultat principal de [65] a été étendue à l'équation $\Delta u = u^p$ par Labutin.

L'article suivant [68] fournit un analogue parabolique des résultats de [65]. Du point de vue analytique, le problème est de caractériser les fonctions $g(t)$ telles qu'il existe une solution de l'équation parabolique $\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u = u^2$ dans le domaine $\{(t,x) \in (0,\infty) \times \mathbf{R}^d : |x| < g(t)\}$, qui explose à l'origine. En termes probabilistes, cela est équivalent à déterminer les fonctions $g(t)$ telles que, pour tout $t > 0$ assez petit, le support à l'instant t du super-mouvement brownien avec valeur initiale δ_0 soit contenu dans la boule de rayon $g(t)$ centrée à l'origine. La réponse donnée dans [68] prend la forme d'un test intégral analogue au test de Kolmogorov classique pour le mouvement brownien. D'autres analogues paraboliques du test de Wiener ont été obtenus par mes anciens étudiants Delmas et Dhersin.

Pour le problème (2) ci-dessus, il n'existe pour l'instant pas de réponse sous la forme d'une condition nécessaire et suffisante. Cependant mon article [50] donne déjà une condition suffisante (en termes de la capacité newtonienne de l'intersection de la frontière avec des petites boules) pour l'unicité de la solution de $\Delta u = u^2$ avec explosion à la frontière, qui est moins contraignante que les conditions connues par des méthodes analytiques.

La monographie [72], issue d'un cours que j'ai donné à l'ETH Zürich, donne une présentation de mes résultats reliant serpent brownien et équations aux dérivées partielles.

1.4 Processus de branchement et processus de Lévy

La construction des superprocessus via le serpent brownien repose sur le fait que la généalogie de la diffusion de Feller peut être codée par le mouvement brownien linéaire, fait qui a d'autres applications importantes, par exemple à la construction de l'arbre continu d'Aldous. Il était tentant de chercher une description analogue de la généalogie de processus de branchement à espace d'états continu (critiques ou sous-critiques) plus généraux. Un premier pas dans cette direction est accompli dans l'article [64] en collaboration avec Jean Bertoin et Yves Le Jan, où nous utilisons une méthode de subordination pour construire des superprocessus avec un mécanisme de branchement d'un type particulier incluant le cas stable $\psi(u) = u^p$, $1 < p < 2$, à partir du cas quadratique. La méthode de subordination de [64] a trouvé des applications aux propriétés trajectorielles des superprocessus dans le travail de mon étudiant Delmas. Cependant, une construction plus intrinsèque et plus générale est développée dans mon travail avec Y. Le Jan décrit ci-dessous.

Le processus des hauteurs. Les articles [67,69] publiés en 1998 en collaboration avec Yves Le Jan fournissent l'analogue pour un mécanisme de branchement général du codage de la généalogie du mécanisme de branchement quadratique par les excursions browniennes. Ces articles considèrent un mécanisme de branchement ψ de la forme

$$\psi(u) = \alpha u + \beta u^2 + \int_{(0,\infty)} \pi(dr)\,(e^{-ru} - 1 + ru)$$

où $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ et π est une mesure σ-finie sur $(0, \infty)$ telle que $\int \pi(dr)(r \wedge r^2) < \infty$. Afin d'éviter des cas particuliers plus simples, on suppose que l'une au moins des deux conditions $\beta > 0$ et $\int r\,\pi(dr) = \infty$ est vérifiée.

Alors un codage de la généalogie du ψ-processus de branchement à espaces d'états continu (ou de manière équivalente du superprocessus de mécanisme de branchement ψ) est donné par le *processus des hauteurs* H, qui est lui-même défini comme une fonctionnelle du processus de Lévy X sans sauts négatifs d'exposant de Laplace ψ. Plus précisément, pour chaque $s \geq 0$, H_s mesure la "taille" de l'ensemble $\{r \in [0, s] : X_r = \inf_{r \leq t \leq s} X_t\}$, et peut être défini via l'approximation suivante

$$H_s = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^s 1_{\{X_r \leq \inf_{r \leq t \leq s} X_t + \varepsilon\}}\, dr.$$

Si $\psi(u) = u^2$, H est simplement un mouvement brownien réfléchi, et on retrouve le codage, mentionné ci-dessus, sous-jacent au serpent brownien. En général cependant, H n'est pas un processus de Markov. Néanmoins, H possède de nombreuses propriétés remarquables, dont certaines sont détaillées dans [67] et dans le premier chapitre de la monographie [80] publiée dans Astérisque en 2002 avec Thomas Duquesne. Un résultat-clé de [67] est le fait que H a une modification continue si et seulement si $\int^\infty \psi(u)^{-1} du < \infty$, propriété équivalente à l'extinction presque sûre du processus de branchement sous-jacent.

Le processus des hauteurs permet d'étendre facilement la construction des superprocessus quadratiques via le serpent brownien à des mécanismes de branchement généraux. Il suffit de considérer un processus de Markov (W_s) (appelé le serpent de Lévy) à valeurs dans les trajectoires finies, tel que le temps de vie de W_s soit H_s pour tout s et que le mécanisme d'évolution conditionnellement aux temps de vie soit exactement le même que pour le serpent brownien (la trajectoire W_s est raccourcie quand H_s décroît et allongée quand H_s augmente). Cette construction est développée dans [69] et plusieurs applications (y compris une discussion des liens avec les équations aux dérivées partielles) sont présentées dans le chapitre IV de la monographie [80]. En particulier, le serpent de Lévy permet de calculer diverses distributions explicites, telles que la loi de l'arbre réduit dans un domaine, défini comme la collection de toutes les trajectoires historiques qui atteignent la frontière et sont arrêtées à cet instant.

Arbres discrets et continus. Une de mes motivations importantes pour introduire et étudier le processus des hauteurs était de comprendre les limites continues des arbres associés aux processus de Galton-Watson : rappelons qu'un processus de Galton-Watson compte génération après génération le nombre d'individus dans une population où chaque individu donne naissance, indépendamment des autres, à un nombre aléatoire d'enfants de loi fixée appelée la loi de reproduction. On savait depuis le travail de Lamperti que les processus de branchement à espace d'états continu (*continuous-state branching processes*) sont les seules limites possibles pour des processus de branchement de Galton-Watson changés d'échelle. De manière évidente, on peut représenter la généalogie des processus de Galton-Watson par des arbres discrets (ou des forêts), qui eux-mêmes sont codés par les fonctions discrètes appelées fonctions de contour (parce qu'elles dessinent le contour des arbres). Si une suite de processus de Galton-Watson (changés d'échelle) converge en distribution vers un processus de branchement à espace d'états continu, on s'attend à ce que leurs généalogies convergent aussi vers la structure généalogique associée au processus limite. Le processus des hauteurs permet d'énoncer cette convergence sous une forme précise : sous certaines hypothèses de régularité, les fonctions de contour (renormalisées) codant la généalogie des processus de Galton-Watson convergent en loi, dans un sens fonctionnel, vers le processus des hauteurs associé au branchement limite. Une formulation faible de ce résultat figure déjà dans [67] mais des résultats beaucoup plus précis sont donnés dans le chapitre II de [80]. Comme c'est le cas fréquemment, ce principe d'invariance permet de retrouver beaucoup de résultats classiques concernant le comportement asymptotique d'arbres ou de processus de Galton-Watson.

Dans le cas particulier où le branchement limite est la diffusion de Feller, une version de la convergence précédente avait déjà été obtenue par Aldous, qui considérait un seul arbre de Galton-Watson conditionné à avoir une population totale égale à n, dans la limite $n \to \infty$. La limite des fonctions de contour (changées d'échelle) est alors l'excursion brownienne normalisée, qui code l'arbre continu brownien appelé CRT. Ce résultat d'Aldous pour les arbres conditionnés a été généralisé dans la thèse de mon étudiant Thomas Duquesne au cas où la loi de branchement (critique) est dans le domaine d'attraction d'une loi stable d'indice $\alpha \in]1,2]$. Dans ce cas la limite des fonctions de contour des arbres conditionnés est l'excursion normalisée du processus des hauteurs associé à $\psi(u) = u^\alpha$, qu'on peut voir comme codant l'arbre continu stable, étudié dans [80].

Plus généralement, on peut définir le ψ-arbre continu comme étant codé par l'excursion du processus des hauteurs associé au mécanisme de branchement ψ. Les propriétés du processus des hauteurs permettent le calcul de plusieurs distributions explicites relatives à ces arbres continus (voir le chapitre III de [80]). En particulier, pour un mécanisme de branchement général ψ on peut calculer la distribution de l'arbre réduit associé à des marques poissonniennes le long du ψ-arbre continu. Dans le cas stable, un argument d'invariance par changement d'échelle permet de déduire la forme explicite des marginales de dimension finie de l'arbre continu stable (généralisant ainsi un résultat important d'Aldous pour le CRT). Ces calculs ont trouvé des applications dans le travail de Miermont sur les fragmentations auto-similaires de l'arbre stable.

Mon travail [83] avec T. Duquesne peut être vu comme un prolongement de la monographie [80]. Une originalité importante de [83] consiste en l'utilisation d'un nouveau formalisme pour les arbres continus : précisément, les arbres continus aléatoires qui décrivent la généalogie des processus de branchement à espace d'états continu sont vus dans [83] comme des variables aléatoires à valeurs dans l'ensemble des arbres réels (enracinés) compacts, qui est muni de la topologie de Gromov-Hausdorff (cette topologie, introduite par Gromov, est utilisée en géométrie pour donner un sens à la convergence d'une suite d'espaces métriques). Beaucoup des propriétés des arbres aléatoires obtenus (appelés arbres de Lévy dans [83]), qui étaient quelque peu cachées dans le codage par le processus des hauteurs, prennent une forme plus simple et plus agréable dans ce nouveau formalisme. C'est en particulier le cas pour la propriété de branchement qui affirme que conditionnellement à la partie de l'arbre au-dessous du niveau a, les sous-arbres au-dessus de ce niveau sont les atomes d'une mesure de Poisson dont l'intensité fait intervenir une mesure ou "temps local" portée par le niveau a de l'arbre. (Inversement une forme simple de la propriété de branchement suffit à caractériser les arbres de Lévy, comme cela a été montré dans la thèse de mon étudiante Mathilde Weill.) Le formalisme des arbres réels permet aussi d'énoncer et de démontrer plusieurs propriétés nouvelles des arbres de Lévy, qui ont de nombreuses applications potentielles. A titre d'application, l'article [83] donne divers calculs explicites de dimensions fractales pour les arbres de Lévy, dont leurs dimensions de Hausdorff et de packing, ainsi que celles des ensembles de niveau. Des résultats plus fins sont obtenus dans l'article suivant [91]. Ce travail donne en particulier la fonction de mesure de Hausdorff exacte pour le CRT et ses ensembles de niveau. Il est intéressant de noter que la fonction de mesure exacte pour le CRT, $h(r) = r^2 \log\log(1/r)$ est la même que celle qui convient pour la courbe brownienne en dimension $d \geq 3$. Des résultats un peu moins précis sont obtenus pour les arbres stables.

1.5 La carte brownienne

Dans cette dernière partie, je présente mon activité de recherche récente, autour des limites continues de grandes cartes planaires. Rappelons qu'une carte planaire est simplement un graphe fini dessiné dans le plan, ou plutôt sur la sphère de dimension deux $\mathbf{S}^2$. De façon plus précise, on appelle carte planaire un plongement d'un graphe fini connexe dans la sphère $\mathbf{S}^2$, vu à déformation continue près (on s'intéresse à la forme du graphe et non aux détails du plongement). Les faces de la carte sont les composantes connexes du complémentaire de la réunion des arêtes (les "régions" délimitées par le graphe). Pour des raisons techniques, il est commode de considérer des cartes enracinées, ce qui veut dire qu'on a distingué une arête orientée, appelée l'arête racine, et dont l'origine est le sommet racine. L'ensemble des sommets est équipé de la distance de graphe : si a et a' sont deux sommets, $d_{\mathrm{gr}}(a, a')$ est le nombre minimal d'arêtes sur un chemin allant de a à a'.

Les cartes planaires sont un objet important en combinatoire mais aussi en géométrie (voir le livre *Graphs on Surfaces and Their Applications* de Lando et Zvonkin) et en physique. En physique théorique, et particulièrement dans le cadre de la théorie de la gravité quantique 2D, une grande carte planaire choisie au hasard est un modèle discret de géométrie aléatoire en dimension deux. La définition et l'étude de la limite continue des grandes cartes planaires aléatoires devraient ainsi permettre une approche rigoureuse des résultats obtenus par des méthodes différentes (non rigoureuses) dans la théorie de Liouville de la gravité quantique. Les mots "limite continue" signifient ici que l'on fait tendre la taille du graphe vers l'infini tout en multipliant la distance de graphe par une quantité tendant vers 0 (intuitivement la longueur de chaque arête est de plus en plus petite).

Mes travaux sur la limite continue des grandes cartes planaires m'ont conduit à construire et à étudier un nouvel objet mathématique appelé la *carte brownienne*, qui est un modèle universel de géométrie aléatoire en dimension deux. L'universalité signifie ici que la carte brownienne est la limite continue d'un grand nombre de cartes aléatoires discrètes différentes (de la même manière que le mouvement brownien est limite de beaucoup de marches aléatoires discrètes différentes). La carte brownienne est un espace métrique aléatoire dont la topologie est celle d'une sphère de dimension deux, mais qui est muni d'une distance très "sauvage" : intuitivement, il faudrait penser à une sphère hérissée de beaucoup de "pointes" ayant une structure fractale compliquée (sur ce point, les simulations proposées sur la page Web de Nicolas Curien sont très évocatrices), de sorte qu'un point typique se trouve au sommet d'une "pointe" et que toutes les géodésiques partant d'un tel point doivent coïncider localement (penser au sommet d'une montagne dont un seul chemin permet, au moins au départ, de redescendre).

Quadrangulations et arbre brownien conditionné. Mon intérêt pour les cartes planaires et leurs limites continues est né d'un article pionnier de Chassaing et Schaeffer, qui donne certaines distributions asymptotiques pour les quadrangulations enracinées aléatoires (une carte planaire est une quadrangulation si chaque face est incidente à 4 cotés d'arêtes - il importe ici de dire "coté d'arête" plutôt qu'arête, car les deux cotés d'une même arête peuvent être incidents à la même face, en particulier dans le cas d'une arête "pendante"). Ces distributions limites s'expriment en termes du serpent brownien dirigé par une excursion brownienne normalisée, et les liens entre serpent brownien et EDP (voir ci-dessus) permettent certains calculs explicites, comme l'a montré un travail de Delmas. La raison de l'apparition du serpent brownien s'explique par l'existence d'une bijection entre les quadrangulations enracinées et les arbres bien étiquetés (cette bijection, appelée la bijection de Schaeffer, a été découverte par Cori et Vauquelin en 1981, et a ensuite été généralisée à beaucoup d'autres classes de cartes planaires, notamment par les physiciens théoriciens Bouttier, Di Francesco et Guitter). Un arbre bien étiqueté est un arbre (discret) planaire, c'est-à-dire enraciné et ordonné, dont les sommets sont munis d'étiquettes entières strictement positives, de façon que l'étiquette de la racine est 1 et les étiquettes de deux sommets voisins diffèrent en valeur absolue d'au plus 1. Si l'on s'éloigne de la racine le long d'un rayon de l'arbre, les étiquettes évoluent comme une marche aléatoire sur les entiers (avec sauts possibles $-1, 0$ ou 1) avec la contrainte que la marche aléatoire doit rester positive.

Le travail de Chassaing et Schaeffer, et le fait que les étiquettes peuvent s'interpréter comme des déplacements spatiaux (en dimension un) m'ont rapidement conduit à penser que mes résultats sur le serpent brownien et sur les arbres continus limites d'arbres discrets pouvaient permettre de mieux comprendre les asymptotiques des cartes planaires. Mes premiers travaux dans cette direction ont visé à définir l'analogue continu d'un arbre bien étiqueté : il s'agit de donner un sens à l'arbre des chemins générés par un serpent brownien (en dimension un) d'origine 0, dirigé par une excursion brownienne normalisée (voir le paragraphe 3.2 ci-dessus) et *conditionné* à rester dans la demi-droite positive. C'est ce dernier conditionnement qui pose problème car il est très dégénéré : il l'est déjà lorsque l'on considère une seule trajectoire brownienne, et on s'intéresse ici à un arbre continu de trajectoires browniennes issues de l'origine. La difficulté vient en particulier du fait qu'on ne peut pas traiter séparément la structure généalogique de l'arbre (qui est ici le CRT) et les déplacements spatiaux, puisque le conditionnement influencera les deux simultanément.

La définition de l'arbre brownien conditionné est rendue précise dans mon article [86] de 2006 avec mon étudiante M. Weill, via différentes approches qui toutes conduisent au même objet. De façon informelle, l'arbre brownien conditionné est obtenu en réenracinant l'arbre généalogique continu sous-jacent (c'est-à-dire le CRT) au sommet qui correspond au minimum des positions spatiales, et en translatant ensuite toutes les positions spatiales de façon que la racine se trouve encore à l'origine. En termes de la mesure aléatoire ISE (voir le paragraphe 3.2 ci-dessus), si on veut définir ISE (en dimension un) conditionnée à ne pas charger la demi-droite négative, la manière la plus simple est d'abord de conditionner le support de ISE à être contenu dans $]-\varepsilon,\infty[$, puis de faire tendre ε vers 0. Les résultats de [86] montrent que cela est équivalent à translater ISE (non-conditionnée) vers la droite, de telle manière que le point le plus à gauche de son support devienne l'origine. L'article [86] contient aussi de nombreux calculs et estimations explicites : par exemple, la probabilité que le support de ISE soit contenu dans $]-\varepsilon,\infty[$ se comporte comme $2\varepsilon^4/21$ quand $\varepsilon \to 0$.

Dans un article suivant [87], j'établis un principe d'invariance pour les arbres browniens conditionnés, qui démontre, dans une plus grande généralité, une conjecture de Marckert et Mokkadem qui concernait la limite d'échelle des arbres bien étiquetés. Les asymptotiques obtenues par Chassaing et Schaeffer pour les quadrangulations planaires aléatoires découlent ensuite directement d'une application de ce principe d'invariance aux arbres bien étiquetés. Cette méthode peut être étendue à des classes plus générales de cartes planaires (notamment les $2p$-angulations, où chaque face est incidente à exactement $2p$ cotés d'arêtes), comme cela a été exploité par mon étudiante M. Weill dans son travail de thèse.

Convergence vers la carte brownienne. Mes trois articles [93,100,109], publiés entre 2007 et 2013, donnent une solution complète au problème de la convergence en loi, au sens de la distance de Gromov-Hausdorff, des grandes cartes planaires aléatoires vues comme espaces métriques pour la distance de graphe (convenablement changée d'échelle) vers l'espace métrique compact aléatoire appelé la carte brownienne. Cela résoud, dans un cadre plus général, un problème posé par Oded Schramm dans l'article issu de sa conférence plénière au Congrès International de Madrid en 2006.

Commençons par une description de la carte brownienne (le nom carte brownienne a été introduit par Marckert et Mokkadem, qui en 2006 avaient discuté une forme faible de la convergence des quadrangulations changées d'échelle). L'objet fondamental est le CRT muni d'étiquettes browniennes (ces étiquettes correspondent aux points terminaux des valeurs du serpent brownien dirigé par l'excursion brownienne normalisée qui code le CRT). On conditionne les étiquettes à rester positives, ce qui, comme expliqué ci-dessus, s'interprète aussi en termes de réenracinement au sommet d'étiquette minimale. La carte brownienne, notée $\mathbf{m}_\infty$, est l'espace-quotient du CRT pour la relation d'équivalence définie de la manière suivante : deux sommets du CRT sont équivalents si et seulement s'ils ont même étiquette et si on peut aller d'un sommet à l'autre en suivant le contour de l'arbre, en ne rencontrant que des étiquettes de valeur plus grande. On munit cet espace quotient $\mathbf{m}_\infty$ d'une distance appelée D^*, qui est la plus grande distance majorée par la fonction $D^\circ(x,y)$, où, si x est la classe d'équivalence d'un sommet a du CRT, et y la classe d'équivalence de b, $D^\circ(x,y)$ désigne la somme des étiquettes de a et de b, à laquelle on retranche deux fois le minimum des étiquettes rencontrées en allant de a à b en suivant le contour de l'arbre (il y a deux manières de suivre le contour de l'arbre, dans le sens des aiguilles d'une montre ou dans le sens inverse, et on prend le plus grand des deux minima).

Considérons maintenant une carte planaire M_n choisie uniformément parmi les triangulations enracinées à n faces ou parmi les $2p$-angulations enracinées à n faces. Notons $V(M_n)$ l'ensemble des sommets de M_n, qui est muni de la distance de graphe d_{gr}. Le résultat majeur obtenu dans [109], qui est l'aboutissement de mes travaux autour des cartes planaires aléatoires, énonce que l'espace métrique compact aléatoire $(M_n, n^{-1/4}d_{\mathrm{gr}})$ converge en loi quand $n \to \infty$, au sens de la métrique de Gromov-Hausdorff, vers $(\mathbf{m}_\infty, c\,D^*)$, où la constante $c > 0$ dépend du modèle discret considéré et peut être calculée de manière explicite. Signalons ici qu'une autre approche de ce résultat dans le cas des quadrangulations a été donnée indépendamment par G. Miermont, dans un article paru dans Acta Mathematica en 2013. Il est important de noter que l'espace limite obtenu ne dépend pas de la classe de modèles discrets. C'est l'universalité de la carte brownienne, qui a depuis été confirmée par d'autres travaux : mon article [111] avec J. Beltran sur les quadrangulations sans arêtes pendantes, et un travail tout récent d'Addario-Berry et Albenque sur les triangulations simples, i.e. sans boucles ni arêtes multiples. Tous ces travaux utilisent une observation-clé de l'article [109] (qui permet de traiter les triangulations dans cet article) selon laquelle, pour obtenir la convergence des espaces métriques associés à un modèle de cartes discrètes, il suffit, compte-tenu des résultats déjà acquis, de montrer la convergence des fonctions de contour associées aux arbres qui codent les cartes discrètes.

Les articles [93] et [100] ont été des étapes importantes de la preuve du résultat de convergence vers la carte brownienne. L'article [93] donne déjà un résultat de compacité des lois de $(M_n, n^{-1/4}d_{\mathrm{gr}})$ (dans le cas des $2p$-angulations) et surtout identifie toute limite séquentielle $\mathbf{m}_\infty$ comme l'espace quotient du CRT pour la relation d'équivalence définie ci-dessus, muni d'une distance D majorée par D^*. Il restait alors à montrer que nécessairement $D = D^*$ (c'est la contribution principale de [109]), et pour cela, l'étude des géodésiques dans l'espace $(\mathbf{m}_\infty, D)$ développée dans [100] a joué un rôle crucial – noter que dans [100] on appelle carte brownienne toute limite séquentielle des $2p$-angulations, puisque l'unicité n'avait pas encore été établie.

Le résultat principal de [100] identifie toutes les géodésiques issues du point privilégié appelé le sommet racine, qui correspond au minimum des étiquettes (il existe une propriété d'invariance par réenracinement de la carte brownienne, qui montre que le sommet racine peut être remplacé par un point "typique"). Dans le quotient qui définit la carte brownienne $\mathbf{m}_\infty$, seules les feuilles du CRT peuvent être identifiées à d'autres points. Le "squelette" du CRT, c'est-à-dire l'ensemble des points qui ne sont pas des feuilles, s'identifie donc à un sous-ensemble de $\mathbf{m}_\infty$, homéomorphe à un arbre réel non compact dense dans la carte brownienne. L'article [100] montre que ce squelette est précisément le cut-locus de la carte brownienne relatif au sommet racine, c'est-à-dire l'ensemble des points qui peuvent être joints à la racine par au moins deux géodésiques distinctes. De plus, pour un tel point, le nombre de géodésiques distinctes vers la racine est la multiplicité du point dans le squelette. Ces résultats sont des analogues frappants de résultats classiques de géométrie riemannienne remontant à Poincaré. Ils montrent aussi que la construction de la carte brownienne comme quotient du CRT, qui pouvait apparaître comme très dépendante de l'approche spécifique utilisant le codage des cartes discrètes par des arbres, a en fait une signification géométrique intrinsèque, puisque le squelette du CRT est caractérisé par des propriétés géométriques.

Les résultats de [100] ont des applications directes aux propriétés des géodésiques dans les grandes cartes planaires. Il n'y a dans ce cas pas d'unicité des géodésiques au sens strict, mais on peut parler d'unicité macroscopique en identifiant deux géodésiques qui sont à une distance petite en comparaison du diamètre de la carte. On obtient alors l'unicité macroscopique de la géodésique joignant deux points typiques de la carte, et on peut aussi décrire le nombre maximal de géodésiques "macroscopiquement différentes" joignant un point arbitraire de la carte à un point typique.

Propriétés de la carte brownienne. Si la carte brownienne reste encore un objet mystérieux, on en connaît maintenant certaines propriétés importantes. La structure des géodésiques partant d'un point typique est bien comprise grâce aux résultats de [100] décrits ci-dessus. On sait [93] que la dimension de Hausdorff de la carte brownienne est égale à 4 : pour obtenir ce résultat, déjà connu par les physiciens théoriciens, il suffit essentiellement d'observer que la dimension du CRT est deux, puis que la distance définissant la carte brownienne vérifie une propriété de continuité Höldérienne d'exposant 1/2 par rapport à la métrique sur le CRT.

Mon article [96] avec Frédéric Paulin montre que la carte brownienne est p.s. homéomorphe à la sphère de dimension deux (en l'absence d'unicité, le résultat de [96] s'appliquait à toute limite séquentielle des $2p$-angulations). Ce résultat, qui avait été conjecturé auparavant (O. Schramm, communication personnelle) a des conséquences intéressantes : soit M_n une carte aléatoire de loi uniforme sur l'ensemble des $2p$-angulations à n faces, et rappelons que le diamètre de M_n est de l'ordre de $n^{1/4}$. Alors, avec une probabilité proche de 1 quand n tend vers l'infini, il n'existe pas de "goulot d'étranglement" de M_n de taille $o(n^{1/4})$, tel que les deux cotés du goulot aient un diamètre de l'ordre de $n^{1/4}$. La preuve du résultat principal de [96] est basée une analyse des propriétés de certaines laminations géodésiques aléatoires du disque unité, qui est intéressante en elle-même.

Mes articles [108] (en collaboration avec Nicolas Curien et Grégory Miermont) et [117] étudient le "cactus" associé à la carte brownienne, c'est-à-dire la structure quand h varie des composantes connexes du complémentaire de la boule de rayon h centrée au sommet racine dans la carte brownienne. En particulier, l'article [117] montre que le nombre de ces composantes connexes qui atteignent la distance $h + \varepsilon$ du sommet racine est de l'ordre de ε^{-3} quand ε est petit, une nouvelle confirmation de la complexité de la carte brownienne.

D'autres modèles de cartes continues. Comme cela a été expliqué ci-dessus, la carte brownienne apparaît comme la limite d'échelle universelle des grandes cartes planaires aléatoires dont le degré des faces n'est "pas trop grand" (un peu comme le mouvement brownien est la limite d'échelle de toutes les marches aléatoires satisfaisant des conditions de moments appropriées). Mon article [104] avec G. Miermont traite, pour des cartes aléatoires distribuées selon des poids de Boltzmann, un cas où le degré d'une face typique est dans le domaine d'attraction d'une loi stable d'indice $\alpha \in]1, 2[$. On obtient alors dans la limite d'échelle un objet continu différent de la carte brownienne, dans lequel subsistent des "trous" macroscopiques, et qui topologiquement ressemblerait davantage au tapis de Sierpinski qu'à la sphère de dimension deux. La description (encore partielle) de cet objet continu fait intervenir l'arbre stable d'indice α étudié dans [80], et un nouveau processus aléatoire appelé le processus des distances qui joue un peu le même rôle que les étiquettes browniennes sur le CRT dans le cas de la carte brownienne.

Ces quantités aléatoires permettent ensuite de décrire les limites d'échelle du rayon et du profil des distances pour les cartes aléatoires discrètes considérés dans [104], ainsi que de montrer que la dimension de Hausdorff de l'espace métrique continu limite (dont l'unicité reste à établir) est égale à 2α. Il est intéressant de noter que l'article [104] a été prolongé par plusieurs travaux des physiciens théoriciens Borot, Bouttier et Guitter autour du modèle de boucles $O(N)$ sur des réseaux aléatoires.

2 Encadrement de thèses

A la date d'aujourd'hui, j'ai encadré une quinzaine de thèses déjà soutenues, et je dirige actuellement le travail de thèse de deux étudiants. J'ai eu la chance d'avoir des étudiants très brillants, dont le plus connu est certainement Wendelin Werner. Je donne ci-dessous la liste de mes étudiants, ainsi que leur parcours professionnel après la thèse.

Wendelin Werner a soutenu sa thèse *Quelques propriétés du mouvement brownien plan* en 1993. Son travail de thèse portait déjà sur des propriétés du mouvement brownien plan (notamment la forme des composantes connexes du complémentaire de la courbe, ou encore les points autour desquels le processus tourne "beaucoup"), domaine dans lequel il a ensuite obtenu les magnifiques résultats que l'on connaît. Après avoir été chargé de recherche au CNRS, Wendelin Werner est devenu Professeur à l'Université Paris-Sud puis à l'ETH Zürich. Ses travaux ont été récompensés par la Médaille Fields en 2006 et de nombreux autres prix.

Thierry Meyre a soutenu sa thèse *Propriétés géométriques du mouvement brownien* en 1993. Cette thèse portait sur diverses propriétés du mouvement brownien, avec en particulier la résolution d'un problème ouvert sur le cas critique des points cônes en dimension deux. Thierry Meyre est Maître de Conférences à l'Université Paris Diderot (Paris VII).

Romain Abraham a soutenu sa thèse *Arbres aléatoires et super-mouvement brownien* en 1993. Son travail de thèse concernait les arbres plongés dans l'excursion brownienne, et des applications du serpent brownien à l'étude de la mesure de sortie du super-mouvement brownien. Après avoir été Maître de Conférences à l'Université Paris Descartes (Paris V), Romain Abraham est maintenant Professeur à l'Université d'Orléans.

Laurent Serlet a soutenu sa thèse *Quelques propriétés du super-mouvement brownien* en 1993. Cette thèse comporte plusieurs études trajectorielles du super-mouvement brownien, avec notamment des résultats précis sur la mesure de Hausdorff des points multiples et des points de collision, ainsi sur les instants où le support du processus rencontre un borélien fixé. Après avoir été Maître de Conférences à l'Université Paris Descartes (Paris V), Laurent Serlet est maintenant Professeur à l'Université Blaise Pascal (Clermont II).

Sanjar Aspandiiarov a soutenu sa thèse *Quelques propriétés des chaînes de Markov et du mouvement brownien* en 1994. Sanjar Aspandiiarov a travaillé à la fois sur un sujet que je lui ai proposé (l'étude d'une nouvelle classe de points exceptionnels du mouvement brownien linéaire) et sur des thèmes de recherche issus de ses contacts avec M. Menshikov et R. Iasnogorodski (concernant certaines chaînes de Markov dans un quadrant). Après avoir été Maître de Conférences à l'Université Paris Descartes (Paris V), Sanjar Aspandiiarov a choisi une carrière dans la banque.

Jean-François Delmas a soutenu sa thèse *Quelques propriétés des superprocessus* en 1997. Cette thèse comporte notamment un travail conséquent sur les superprocessus avec catalyse (une généralisation des superprocessus où le phénomène de branchement ne se produit que sur une partie de l'espace appelé le catalyseur), et une étude des propriétés du "range" du super-mouvement brownien. Jean-François Delmas, qui est ingénieur du Corps des Ponts, est devenu après sa thèse chercheur au CERMICS (Laboratoire de recherche dépendant de l'Ecole des Ponts ParisTech). Il est actuellement directeur du CERMICS.

Jean-Stéphane Dhersin a soutenu sa thèse *Super-mouvement brownien, serpent brownien et équations aux dérivées partielles* en 1997. Cette thèse porte principalement sur les liens entre le serpent brownien et l'équation aux dérivées partielles $\Delta u = u^2$ (particulièrement l'étude de conditions qui assurent l'existence ou l'unicité de solutions explosant à la frontière). Après avoir été Maître de Conférences à l'Université Paris Descartes (Paris V), Jean-Stéphane Dhersin est maintenant Professeur à l'Université Paris-Nord.

Thomas Duquesne a soutenu sa thèse *Arbres aléatoires, processus de Lévy et superprocessus* en 2001. Son travail de thèse portait sur l'étude de la généalogie des processus de branchement continu via les processus de Lévy, et la convergence d'arbres de Galton-Watson discrets vers des arbres continus. Après avoir été Maître de Conférences à l'Université Paris-Sud, Thomas Duquesne est maintenant Professeur à l'Université Pierre et Marie Curie (Paris VI). Pour ses premiers travaux, il a reçu le Prix Meyer 2003.

Benoît Mselati a soutenu sa thèse *Classification et représentation probabiliste des solutions positives de $\Delta u = u^2$ dans un domaine* en 2002. Cette thèse comportait la solution d'une conjecture importante de Dynkin permettant de classifier toutes les solutions positives de $\Delta u = u^2$ dans un domaine à frontière lisse de $\mathbf{R}^d$. Après sa thèse, Benoît Mselati a choisi de travailler dans une banque.

Nathanaël Berestycki a soutenu sa thèse *Transition de phase pour la distance d'une marche aléatoire et applications à des problèmes de réarrangements génétiques* en 2005. Il s'agit d'une thèse en co-tutelle, et l'essentiel de la direction a été assuré par Rick Durrett à Cornell University. Après avoir été postdoc à UBC Vancouver, Nathanaël Berestycki est maintenant Lecturer à l'Université de Cambridge.

Mathieu Merle a soutenu sa thèse *Théorèmes limites pour le modèle du votant et le super-mouvement brownien* en 2006. Le résultat le plus marquant de cette thèse, publié dans un gros article des Annals of Probability, est l'estimation fine de la probabilité que, dans le modèle du votant classique partant avec un seul 1 en l'origine de $\mathbf{Z}^d$, l'opinion 1 atteigne un point éloigné. Après avoir été postdoc à UBC Vancouver, Mathieu Merle est actuellement Maître de Conférences à l'Université Paris Diderot (Paris VII).

Mathilde Weill a soutenu sa thèse *Arbres aléatoires, conditionnement et cartes planaires* en 2006. Cette thèse comprend notamment une étude détaillée des arbres browniens conditionnés à rester positifs (motivée par les asymptotiques pour les cartes planaires) et une caractérisation des arbres aléatoires continus appelés les arbres de Lévy via une propriété de branchement. Après avoir été agrégée préparatrice ("caïmane") à l'Ecole normale supérieure de Paris, Mathilde Weill a choisi l'enseignement en classes préparatoires.

Laurent Ménard a soutenu sa thèse *Etude de la quadrangulation infinie uniforme* en 2009. Cette thèse porte sur la quadrangulation infinie uniforme du plan. Laurent Ménard a notamment montré l'équivalence des deux définitions de ce réseau aléatoire proposées par Krikun d'une part et par Chassaing et Durhuus d'autre part. Laurent Ménard est devenu Maître de Conférences à l'Université Paris Nanterre (Paris X).

Amandine Véber a soutenu sa thèse *Théorèmes limites pour des processus de branchement et de coalescence spatiaux* en 2009. Il s'agit d'une co-direction avec Alison Etheridge (Oxford). La partie de la thèse que j'ai encadrée traite des processus de branchement spatiaux, et notamment du super-mouvement brownien, évoluant parmi des obstacles aléatoires. Amandine Véber est devenue Chargée de Recherches au CNRS, affecté à l'Ecole Polytechnique. Elle a reçu pour sa thèse le Prix Jacques Neveu 2009.

Nicolas Curien a soutenu sa thèse *Etude asymptotique de grands objets combinatoires aléatoires* en 2011. Cette thèse comprend des résultats très variés à la frontière des probabilités et de la combinatoire, notamment sur les graphes aléatoires stationnaires, sur les triangulations récursives du disque, sur les propriétés asymptotiques des "quadtrees" et sur une nouvelle approche de la quadrangulation infinie uniforme. Après avoir été agrégé-préparateur à l'Ecole normale supérieure de Paris, Nicolas Curien est devenu Chargé de Recherches au CNRS, affecté à l'Université Pierre et Maris Curie. Il a reçu pour sa thèse le Prix Jacques Neveu 2011, ainsi que le Prix de Thèse de la Fondation EADS.

Igor Kortchemski a soutenu sa thèse *Conditionnement de grands arbres aléatoires et configurations planes non-croisées* en 2012. Cette thèse comporte notamment une étude des configurations aléatoires non croisées (dissections) du polygone choisies selon des poids de Boltzmann, pour laquelle Igor Korchemski a développé des résultats asymptotiques originaux pour les arbres discrets conditionnés à avoir un nombre fixé de feuilles, et aussi un travail avec N. Curien montrant que la triangulation brownienne du disque est la limite universelle de beaucoup de configurations non-croisées aléatoires. Igor Kortchemski est actuellement agrégé-préparateur à l'Ecole normale supérieure de Paris. Il a reçu pour sa thèse le Prix Perrissin-Pirasset/Schneider 2013 de la Chancellerie des universités parisiennes.

Shen Lin a commencé sa thèse sous ma direction en 2011. Ses premiers résultats, en réponse à une question d'Itai Benjamini, concernent l'étude du nombre de points distincts visités par une marche aléatoire indexée par un arbre.

Céline Abraham a commencé sa thèse en 2012. Elle étudie les cartes planaires biparties de loi uniforme, en vue d'obtenir dans ce cadre un résultat de convergence vers la carte brownienne.

3 Liste de publications

1. Temps locaux et équations différentielles stochastiques. *Thèse de troisième cycle*, Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), Paris, 1982.
2. Applications du temps local aux équations différentielles stochastiques unidimensionnelles. *Séminaire de Probabilités XVII. Lecture Notes Math.* **986**, 15-31. Springer, Berlin, 1983.
3. Sur l'équation stochastique de Tsirelson. *Séminaire de Probabilités XVII. Lecture Notes Math.* **986**, 81-88. Springer, Berlin, 1983. (avec **M. Yor**)
4. Sur la mesure de Hausdorff des points multiples du mouvement brownien. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I* **299**, 627-630 (1984)

5. One-dimensional stochastic differential equations involving the local times of the unknown process. *Stochastic Analysis. Lecture Notes Math.* **1095**, 51-82. Springer, Berlin 1985.
6. Sur le temps local d'intersection du mouvement brownien plan et la méthode de renormalisation de Varadhan. *Séminaire de Probabilités XIX. Lecture Notes Math.* **1123**, 314-331. Springer, Berlin 1985.
7. Sur la mesure de Hausdorff de la courbe brownienne. *Séminaire de Probabilités XIX. Lecture Notes Math.* **1123**, 297-313. Springer, Berlin 1985.
8. Un théorème central limite pour le nombre de points visités par une marche aléatoire plane récurrente. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I* **300**, 505-508 (1985)
9. Propriétés d'intersection des marches aléatoires. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I* **301**, 387-390 (1985)
10. Etude asymptotique de certains mouvements browniens complexes avec drift. *Probab. Th. Rel. Fields* **71**, 183-229 (1986) (avec **M. Yor**)
11. Sur la saucisse de Wiener et les points multiples du mouvement brownien. *Ann. Probab.* **14**, 1219-1244 (1986)
12. Propriétés d'intersection des marches aléatoires I. Convergence vers le temps local d'intersection. *Comm. Math. Phys.* **104**, 471-507 (1986)
13. Propriétés d'intersection des marches aléatoires II. Etude des cas critiques. *Comm. Math. Phys.* **104**, 509-528 (1986)
14. Une approche élémentaire des théorèmes de décomposition de Williams.*Séminaire de Probabilités XX. Lecture Notes Math.* **1204**, 447-464. Springer, Berlin 1986.
15. Mouvement brownien, cônes et processus stables. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I* **302**, 641-643 (1986)
16. Excursions browniennes et carrés de processus de Bessel. *C. R. Acad. Sci. Paris Série I* **303**, 73-76 (1986) (avec **M. Yor**)
17. Le comportement du mouvement brownien entre les deux instants où il passe par un point double. *J. Funct. Anal.* **71**, 246-262 (1987)
18. Etude asymptotique des enlacements du mouvement brownien autour des droites de l'espace. *Probab. Th. Rel. Fields* **74**, 617-635 (1987) (avec **M. Yor**)
19. Mouvement brownien, cônes et processus stables. *Probab. Th. Rel. Fields* **76**, 587-627 (1987)
20. The packing measure of planar Brownian motion. *Seminar on Stochastic Processes 1986*, 139-147. Birkhäuser, Boston 1987. (avec **S. J. Taylor**)
21. The exact Hausdorff measure of Brownian multiple points. *Seminar on Stochastic Processes 1986*, 107-137. Birkhäuser, Boston 1987.
22. Temps locaux d'intersection et points multiples des processus de Lévy. *Séminaire de Probabilités XXI. Lecture Notes Math.* **1247**, 341-374. Springer, Berlin 1987.
23. Un processus qui ressemble au pont brownien. *Séminaire de Probabilités XXI. Lecture Notes Math.* **1247**, 270-275. Springer, Berlin 1987. (avec **P. Biane** et **M. Yor**)
24. Temps locaux d'intersection renormalisés et développement asymptotique du volume de la saucisse de Wiener plane. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I* **304**, 339-342 (1987)

25. Some intersection properties of Brownian motion and random walks. *Proceedings of the First World Congress of the Bernoulli Society (Taschkent 1986), Vol. 1,* pp. 547-556. V.N.U. Science Press, Utrecht 1987.
26. Fluctuation results for the Wiener sausage. *Ann. Probab.* **16**, 991-1018 (1988)
27. Sur une conjecture de M. Kac. *Probab. Th. Rel. Fields* **78**, 389-402 (1988)
28. Sur les fonctions polaires pour le mouvement brownien. *Séminaire de Probabilités XXII. Lecture Notes Math.* **1321**, 186-189. Springer, Berlin 1988.
29. Propriétés trajectorielles d'une classe de processus de diffusion hypoelliptiques. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I* **307**, 1005-1010 (1988) (avec **M. Chaleyat-Maurel**)
30. Multiple points for Lévy processes. *Ann. Probab.* **17**, 503-515 (1989) (avec **J. Rosen** et **N.R. Shieh**)
31. The exact Hausdorff measure of Brownian multiple points II. *Seminar on Stochastic Processes 1988*, 193-197. Birkhäuser, Boston 1989.
32. Introduction au mouvement brownien. *Gazette des Mathématiciens* **40**, 43-64 (1989)
33. Marches aléatoires, mouvement brownien et processus de branchement. *Séminaire de Probabilités XXIII. Lecture Notes Math.* **1372**, 258-274. Springer, Berlin 1989.
34. Green function, capacity and sample path properties for a class of hypoelliptic diffusion processes. *Probab. Th. Rel. Fields* **83**, 219-264 (1989) (avec **M. Chaleyat-Maurel**)
35. Une construction trajectorielle de certains processus de Markov à valeurs mesures. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I* **308**, 533-538 (1989)
36. Wiener sausage and self-intersection local times. *J. Funct. Anal.* **88**, 299-341 (1990)
37. Enlacements du mouvement brownien autour des courbes de l'espace. *Trans. Amer. Math. Soc.* **317**, 687-721 (1990) (avec **M. Yor**)
38. On polar sets for hypoelliptic diffusion processes. *Stochastic Analysis and Related Topics. Lecture Notes Math.* **1444**, 204-212. Springer, Berlin 1990. (avec **M. Chaleyat-Maurel**)
39. The range of stable random walks. *Ann. Probab.* **19**, 650-705 (1991) (avec **J. Rosen**)
40. Brownian excursions, trees and measure-valued branching processes. *Ann. Probab.* **19**, 1399-1439 (1991)
41. On the connected components of the complement of a two-dimensional Brownian path. *Random Walks, Brownian Motion and Interacting Particle Systems*, pp.323-338. Birkhäuser, Boston 1991.
42. Points cônes du mouvement brownien plan, le cas critique. *Probab. Th. Rel. Fields* **93**, 231-247 (1992) (avec **T. Meyre**)
43. Some properties of planar Brownian motion. In : *Ecole d'été de probabilités de Saint Flour XX - 1990. Lecture Notes Math.* **1527**, 111-235. Springer, Berlin 1992.
44. The geometry of the Brownian curve. *Bull. Sci. Math.* **117**, 91-106 (1993) (avec **B. Duplantier**, **G.F. Lawler** et **T.J. Lyons**)
45. A class of path-valued Markov processes and its connections with superprocesses. *Probab. Th. Rel. Fields* **95**, 25-46 (1993)

46. The uniform random tree in a Brownian excursion. *Probab. Th. Rel. Fields* **96**, 369-383 (1993)
47. Les solutions positives de $\Delta u = u^2$ dans le disque unité. *C.R. Acad. Sci. Paris* **317**, Série I, 873-878 (1993)
48. Mean curvature and the heat equation. *Math. Z.* **215**, 437-464 (1994) (avec **M. van den Berg**)
49. Hitting probabilities and potential theory for the Brownian path-valued process. *Ann. Inst. Fourier* **44**, 277-306 (1994)
50. A path-valued Markov processes and its connections with partial differential equations. In : *Proceedings First European Congress of Mathematics, Vol.II*, pp.185-212. Birkhäuser, Boston 1994.
51. A lemma on super-Brownian motion with some applications. In : *The Dynkin Festschrift*, M.I. Freidlin ed., pp.237-251. Birkhäuser, Boston 1994.
52. Sur la mesure de sortie du super mouvement brownien. *Probab. Th. Rel. Fields* **99**, 251-275 (1994) (avec **R. Abraham**)
53. Exponential moments for the renormalized self-intersection local time of planar Brownian motion. *Séminaire de Probabilités XXVIII. Lecture Notes Math.* **1583**, 172-180. Springer, Berlin 1994.
54. The Brownian path-valued process and its connections with partial differential equations. Stochastic Analysis (Cranston, Pinsky eds). Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. 57, pp.427-437. AMS, Providence 1995.
55. A new approach to the single-point catalytic super-Brownian motion. *Probab. Th. Rel. Fields* **102**, 63-82 (1995) (avec **K. Fleischmann**)
56. The Brownian snake and solutions of $\Delta u = u^2$ in a domain. *Probab. Th. Rel. Fields* **102**, 393-432 (1995)
57. Some new classes of exceptional times of linear Brownian motion. *Ann. Probab.* **23**, 1605-1626 (1995) (avec **S. Aspandiiarov**)
58. The Hausdorff measure of the support of two-dimensional super Brownian motion. *Ann. Probab.* **23**, 1719-1747 (1995) (avec **E. Perkins**)
59. The packing measure of the support of super-Brownian motion. *Stoch. Process. Appl.* **59**, 1-20 (1995) (avec **E. Perkins** et **S.J. Taylor**)
60. Super-Brownian motions in catalytic media. In : *Branching Processes*, C.C. Heyde ed. *Lecture Notes in Statistics* **99**, pp. 122-134. Springer, Berlin 1995. (avec **D. Dawson** et **K. Fleischmann**)
61. Arbres aléatoires et processus de Lévy. *C.R. Acad. Sci. Paris, Série I* **321**, 1241-1244 (1995) (avec **Y. Le Jan**)
62. A probabilistic approach to the trace at the boundary for solutions of a semilinear parabolic partial differential equation. *J. Appl. Math. Stoch. Anal.* **9**, 399-414 (1996)
63. A probabilistic Poisson representation for solutions of $\Delta u = u^2$ in a planar domain. *Comm. Pure Appl. Math.* **50**, 69-103 (1997)

64. Spatial branching processes and subordination. *Canadian Math. J.* **49**, 24-54 (1997) (avec **J. Bertoin** et **Y. Le Jan**)
65. Wiener's test for super-Brownian motion and the Brownian snake. *Probab. Th. Rel. Fields* **108**, 103-129 (1997) (avec **J.S. Dhersin**)
66. Marches aléatoires auto-évitantes et mesures de polymère. *Séminaire de Probabilités XXXI. Lecture Notes Math.*, **1655**, 103-112. Springer, Berlin 1997.
67. Branching processes in Lévy processes : The exploration process. *Ann. Probab.* **26**, 213-252 (1998). (avec **Y. Le Jan**)
68. Kolmogorov's test for super-Brownian motion. *Ann. Probab.* **26**, 1041-1056 (1998) (avec **J.S. Dhersin**)
69. Branching processes in Lévy processes : Laplace functionals of snakes and superprocesses. *Ann. Probab.* **26**, 1407-1432 (1998) (avec **Y. Le Jan**)
70. Branching processes, random trees and superprocesses. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Berlin 1998. Documenta Mathematica.
71. The Hausdorff measure of the range of super-Brownian motion. In : *Perplexing Problems in Probability. Festschrift in Honor of Harry Kesten*, M. Bramson, R. Durrett eds, pp. 285-314. Birkhäuser, 1999.
72. *Spatial Branching Processes, Random Snakes and Partial Differential Equations.* Lectures in Mathematics ETH Zürich. Birkhäuser, 1999.
73. Dynkin's contributions to superprocesses and partial differential equations. In : *Selected papers of E.B. Dynkin with commentary*, pp. 781-791. American Mathematical Society, Providence 2000
74. The Bolthausen-Sznitman coalescent and the genealogy of continuous-state branching processes. *Probab. Th. Rel. Fields* **117**, 249-266 (2000) (avec **J. Bertoin**)
75. Processus de branchement, arbres et superprocessus. In : *Développement des mathématiques 1950-2000*, pp. 763-793. Birkhaüser 2000.
76. *Random trees and spatial branching processes.* Maphysto Lecture Notes Series (University of Aarhus), vol. 9 (80 pp.), 2000.
    Available at http ://www.maphysto.dk/publications/MPS-LN/2000/9.pdf
77. Super-Brownian limits of voter model clusters. *Ann. Probab.* **29**, 1001-1032 (2001) (avec **M. Bramson** et **T. Cox**)
78. Super-Brownian motion with reflecting historical paths. *Probab. Th. Rel. Fields* **121**, 447-491 (2001) (avec **K. Burdzy**)
79. Exposants critiques pour le mouvement brownien et les marches aléatoires. Séminaire Bourbaki, Novembre 1999. *Astérisque* **276**, 29-51 (2002)
80. *Random Trees, Lévy Processes and Spatial Branching Processes. Astérisque* **281** (2002) (avec **T. Duquesne**)
81. Stochastic flows associated to coalescent processes. *Probab. Th. Rel. Fields* **126**, 261-288 (2003) (avec **J. Bertoin**)
82. Stochastic integral representation and regularity of the density for the exit measure of super-Brownian motion. *Ann. Probab.* **33**, 194-222 (2005) (avec **L. Mytnik**)

83. Probabilistic and fractal aspects of Lévy trees. *Probab. Th. Rel. Fields* **131**, 553-603 (2005) (avec **T. Duquesne**)
84. Stochastic flows associated to coalescent processes II : Stochastic differential equations. *Annales Inst. H. Poincaré Probab. Stat.* **41**, 307-333 (2005) (avec **J. Bertoin**)
85. Random trees and applications. *Probability Surveys* **2**, 245-311 (2005)
86. Conditioned Brownian trees. *Annales Inst. H. Poincaré Probab. Stat.* **42**, 455-489 (2006) (avec **M. Weill**)
87. A conditional limit theorem for tree-indexed random walk. *Stochastic Process. Appl.* **116**, 539-567 (2006)
88. Random real trees. *Annales Fac. Sci. Toulouse*, vol. XV, 35-62 (2006)
89. On the occupation measure of super-Brownian motion. *Electronic Comm. Probab.* **11**, 252-265 (2006) (avec **M. Merle**)
90. Stochastic flows associated to coalescent processes III : Infinite population limits. *Illinois J. Math.* **50**, 147-181 (2006) (avec **J. Bertoin**)
91. The Hausdorff measure of stable trees. *Alea* **1**, 393-415 (2006) (avec **T. Duquesne**)
92. Probabilistic approach to a class of semilinear partial differential equations. In : "Perspectives in Nonlinear Partial Differential Equations : In honor of Haim Brezis", pp. 255-272. *Contemporary Mathematics*, AMS 2007.
93. The topological structure of scaling limits of large planar maps. *Inventiones Math.* **169**, 621-670 (2007)
94. Les travaux de Wendelin Werner. *Gazette des Mathématiciens* **112**, 7-17 (2007)
95. Brownian motion and stochastic processes. In the volume *Princeton Companion to Mathematics*, T. Gowers ed., Princeton University Press 2008.
96. Scaling limits of bipartite planar maps are homeomorphic to the 2-sphere. *Geomet. Funct. Anal.* **18**, 893-918 (2008) (avec **F. Paulin**)
97. The continuous limit of large random planar maps. Fifth Colloquium on Mathematics and Computer Science. *DMTCS proceedings* **AI**, 1-18 (2008) (electronic)
98. On the re-rooting invariance property of Lévy trees. *Electronic Comm. Probab.* **14**, 317-326 (2009) (avec **T. Duquesne**)
99. Large random planar maps and their scaling limits. Proceedings 5th European Congress of Mathematics (Amsterdam 2008) pp. 253-276. European Math. Society, Zürich, 2010.
100. Geodesics in large planar maps and in the Brownian map. *Acta Math.* **205**, 287-360 (2010)
101. On the scaling limit of random planar maps with large faces. *XVIth International Congress on Mathematical Physics*, 470-474. World Sci. Publ., Hackensack, 2010. (avec **G. Miermont**)
102. Itô's excursion theory and random trees. *Stoch. Process. Appl.* **120** (2010), 721-749.
103. Scaling limits for the uniform infinite quadrangulation. *Illinois J. Math.* **54**, 1163-1203 (2010) (avec **L. Ménard**)
104. Scaling limits of random planar maps with large faces. *Ann. Probab.* **39**, 1-69 (2011) (avec **G. Miermont**)

105. Random recursive triangulations of the disk via fragmentation theory. *Ann. Probab.* **39**, 2224-2270 (2011) (avec **N. Curien**)
106. Escape probabilities for branching Brownian motion among mild obstacles. *J. Theoret. Probab.* **25**, 505-535 (2012) (avec **A. Véber**)
107. Scaling limits of random trees and planar maps. Lecture notes from the 2010 Clay Mathematical Institute Summer School (Buzios). Clay Mathematics Proceedings, vol. **15**, pp. 155-211 (2012) (avec **G. Miermont**)
108. The Brownian cactus I. Scaling limits of discrete cactuses. *Annales Inst. H. Poincaré Probab. Stat.* **49**, 340-373 (2013) (avec **N. Curien** et **G. Miermont**)
109. Uniqueness and universality of the Brownian map. *Ann. Probab.* **41**, 2880-2960 (2013)
110. *Mouvement Brownien, Martingales et Calcul Stochastique.* Mathématiques et Applications, vol.71. Springer 2013
111. Quadrangulations with no pendant vertices. *Bernoulli* **19**, 1150-1175 (2013) (avec **J. Beltran**)
112. The Brownian plane. *J. Theoret. Probab.*, à paraître (avec **N. Curien**)
113. Paul Lévy et le mouvement brownien. *ESAIM Probab. Stat.*, à paraître.
114. The Brownian map : A universal limit for random planar maps. Soumis aux proceedings du *XVIIth International Congress on Mathematical Physics.*
115. The harmonic measure of balls in random trees. Preprint (avec **N. Curien**)
116. The range of tree-indexed random walk. Preprint (avec **S. Lin**)
117. The Brownian cactus II. Upcrossings and local times of super-Brownian motion. Preprint.
118. The range of tree-indexed random walk in low dimensions. Preprint (avec **S. Lin**)