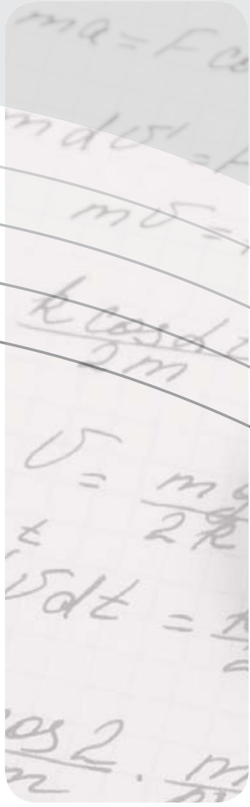
33

La Lettre

de l'Académie des sciences

PRINTEMPS-ÉTÉ 2014

Les mathématiques en mouvement



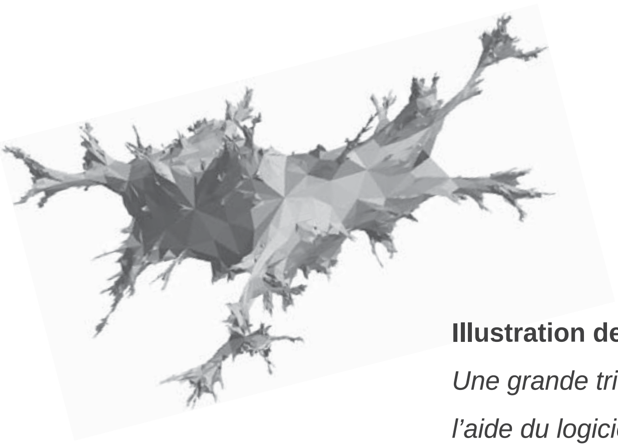


Illustration de couverture

Une grande triangulation aléatoire de la sphère représentée en 3 dimensions à l'aide du logiciel Mathematica © Nicolas Curien - Mathematica

Voir aussi : http://www.math.ens.fr/~curien/

Éditorial

Dossier — Les mathématiques en mouvement

Retour sur l'actualité

La vie de l'Académie

Éditorial


© DR

Catherine Bréchignac
Secrétaire perpétuel de l'Académie des sciences

Ce numéro printemps-été 2014 de *La Lettre* invite ses lecteurs à une promenade mathématique sous la conduite de l'académicien Jean-Pierre Kahane. Celui-ci nous emmène, avec les nombres premiers, sur les traces des Grecs de l'antiquité, pour arriver à nos jours où des mathématiciens s'intéressent à la conjecture des nombres premiers jumeaux, deux nombres premiers qui ne sont séparés que par un unique nombre entier. Puis la promenade emprunte un trajet aléatoire donnant au mouvement brownien, bien connu des physiciens depuis la fin du XVIIIe siècle, une dimension mathématique dont on ne mesure pas encore la portée. On assiste aujourd'hui au renouvellement de la théorie des graphes, qui permet d'extraire une représentation concise de données, mais aussi à l'émergence, grâce à l'apport de l'informatique, d'une théorie de l'aléa algorithmique dont les conséquences sont surprenantes.

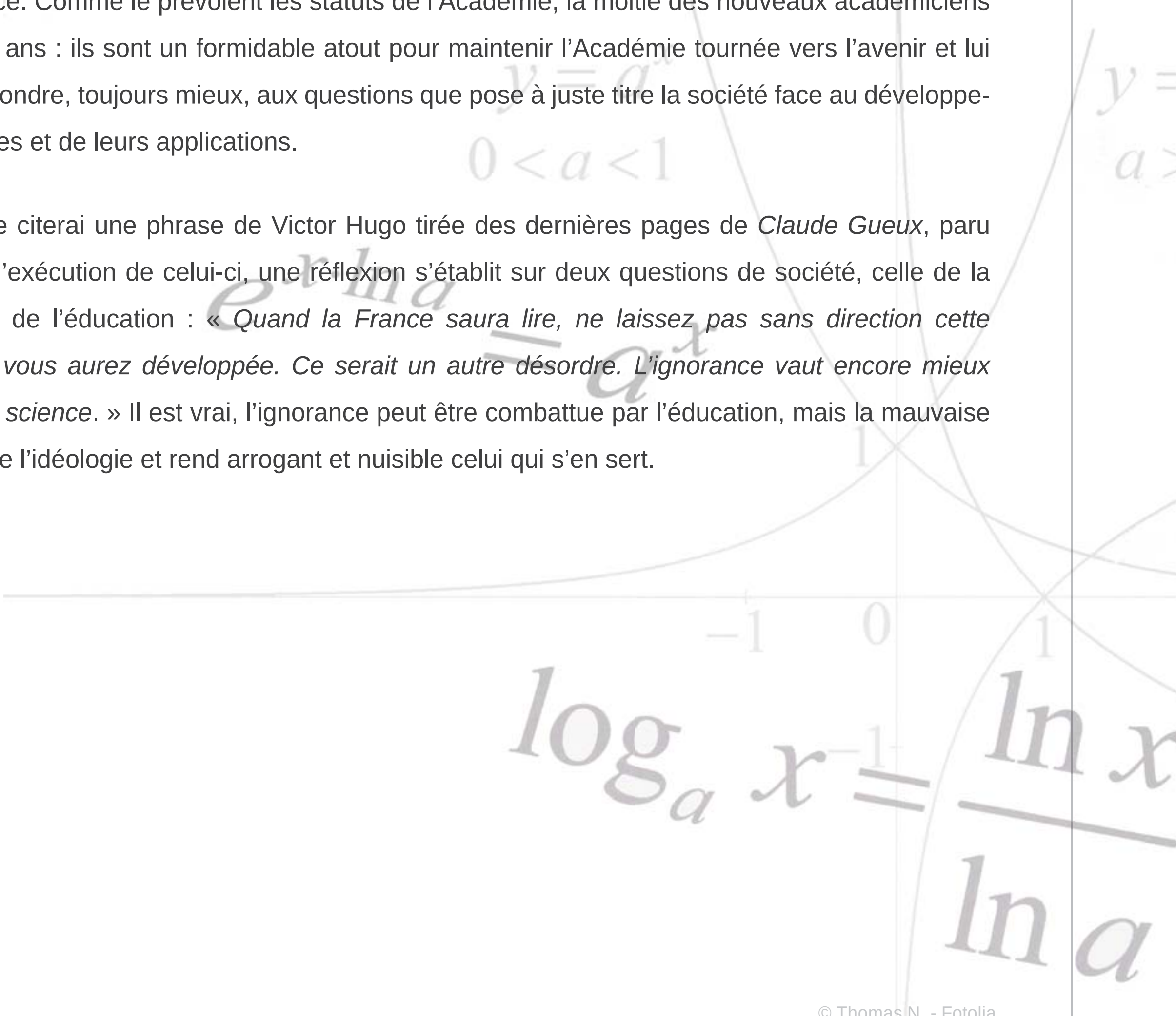
Les mathématiques sont, à juste titre, l'une des grandes fiertés de la recherche française. La France est réputée pour avoir donné naissance à bon nombre des plus grands mathématiciens, et l'aventure continue. Nos compatriotes constituent l'un des plus forts contingents d'orateurs invités au Congrès international des mathématiciens, manifestation organisée tous les quatre ans depuis 1900. Le prochain congrès aura lieu à Séoul du 13 au 21 août prochain. C'est à l'occasion de ce congrès qu'est remise la prestigieuse médaille Fields à des mathématiciens ayant moins de quarante ans, et dont 20 % des lauréats jusqu'à ce jour sont français.

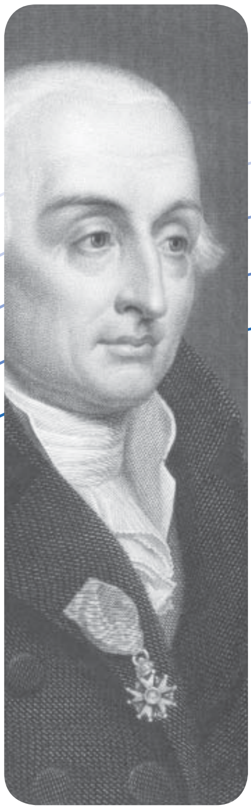
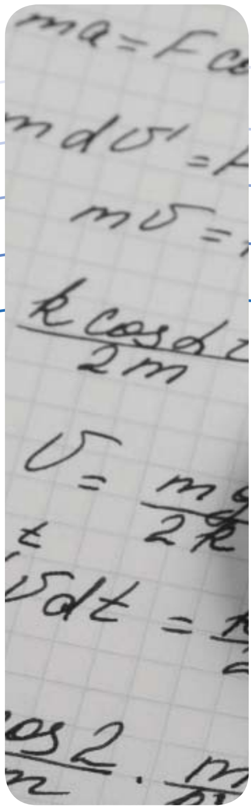
Sans doute peut-on voir, à l'origine de l'excellence des mathématiques en France, l'intervention d'une synergie de facteurs. En premier lieu, l'héritage d'une longue tradition de grands mathématiciens, et parmi eux l'académicien Joseph-Louis Lagrange, dont *La Lettre* retrace le fantastique parcours qui débuta au siècle des Lumières. Cette tradition s'est également accompagnée du développement d'un enseignement de grande qualité, comme en témoigne la naissance de l'École normale de l'An III, qui fit la part belle à la géométrie, aux équations et aux probabilités, et a engendré de fructueux débats entre élèves et professeurs. La pérennité de notre recherche en mathématiques dépend en premier lieu de la place que les programmes voudront bien continuer à accorder aux mathématiques dans l'enseignement scolaire. Ensuite, les politiques scientifiques adoptées par les grands organismes de recherche, en favorisant la recherche à temps plein pour des mathématiciens en début de carrière, ont probablement également concouru à la préservation de la notoriété des mathématiques françaises. Cet équilibre fragile, qui donne à notre pays un rôle mondial important dans le développement du savoir, doit incontestablement être protégé.

Dans *Retour sur l'actualité*, Bernard Meunier, vice-président de l'Académie, revient sur la nécessité de préserver la liberté de recherche en France. Ce plaidoyer est loin d'être vain quand émergent des signaux qui, ici ou là, sur les organismes génétiquement modifiés ou sur la recherche de nouvelles sources d'énergie, suggèrent que cette liberté est réellement menacée. Or cette liberté est essentielle à la production de nouveaux savoirs fondamentaux, qui seront les uns ou les autres, un jour, à l'origine de grandes avancées scientifiques. Par ailleurs, les sciences sont aussi un formidable vecteur de progrès social et de croissance économique : n'ayons pas peur d'elles !

Enfin, la *Vie de l'Académie* présente les nouveaux membres élus en 2013, dix-sept scientifiques - sept femmes et dix hommes - solennellement reçus le 17 juin 2014, par leurs pairs, sous la coupole de l'Institut de France. Comme le prévoient les statuts de l'Académie, la moitié des nouveaux académiciens ont moins de 55 ans : ils sont un formidable atout pour maintenir l'Académie tournée vers l'avenir et lui permettre de répondre, toujours mieux, aux questions que pose à juste titre la société face au développement des sciences et de leurs applications.

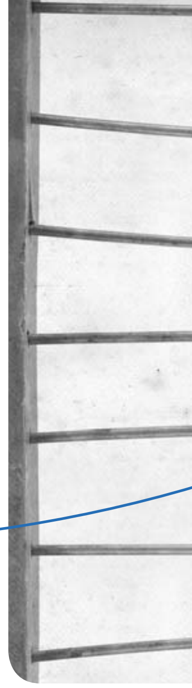
Pour conclure, je citerai une phrase de Victor Hugo tirée des dernières pages de *Claude Gueux*, paru en 1834. Après l'exécution de celui-ci, une réflexion s'établit sur deux questions de société, celle de la pénalité et celle de l'éducation : « *Quand la France saura lire, ne laissez pas sans direction cette intelligence que vous aurez développée. Ce serait un autre désordre. L'ignorance vaut encore mieux que la mauvaise science*. » Il est vrai, l'ignorance peut être combattue par l'éducation, mais la mauvaise science engendre l'idéologie et rend arrogant et nuisible celui qui s'en sert.



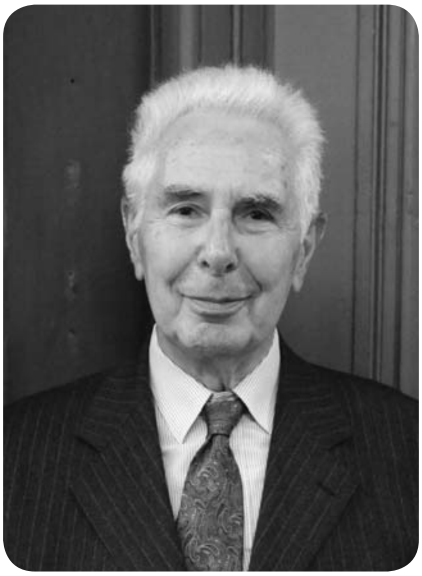



Les mathématiques en mouvement

On sait bien qu'il est difficile d'entrer dans les mathématiques. Le dossier qui suit se veut lisible, mais n'a pas la prétention de donner une image fidèle des mathématiques, ni de leur histoire. Dans le choix des concepts mathématiques, on a opté pour deux sujets seulement : les nombres premiers, qui viennent de l'Antiquité grecque, et le mouvement brownien qui, comme objet mathématique, date du XX^{e} siècle. Il y a par ailleurs d'autres approches : l'aspect historique, par exemple, mais aussi ce qui vient de l'informatique théorique. Le lecteur peut commencer là où il veut, et vérifier ainsi qu'il y a plusieurs portes d'entrée vers les mathématiques. Tous les mathématiciens ont à l'esprit des images mentales : les illustrations qui accompagnent les textes de ce dossier sont, en dehors du plaisir des yeux, une discrète allusion à cet aspect de leur métier.



Invitation à une promenade mathématique

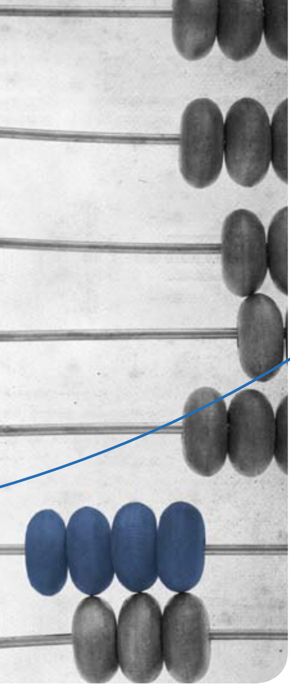


Jean-Pierre Kahane
Membre de l'Académie des sciences

Les mathématiques sont en perpétuel renouvellement. C'est vrai au cours de leur histoire, et c'est spectaculaire aujourd'hui. Si ce dossier peut le faire sentir au lecteur, il aura atteint son objectif.

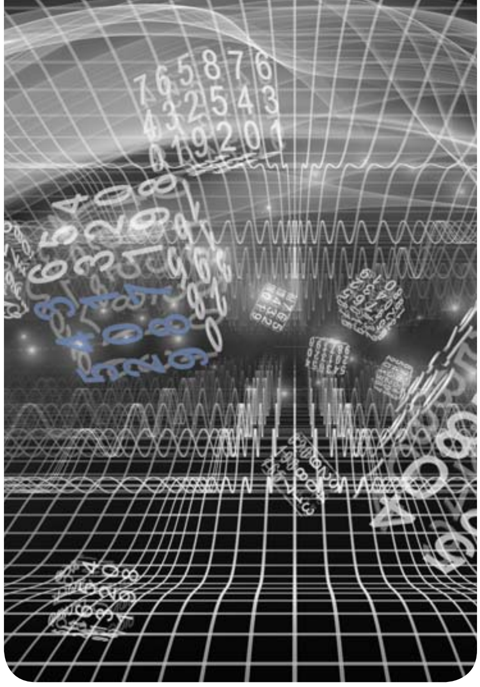
Parlons un peu de l'histoire des mathématiques, qui constitue une part non négligeable de l'histoire de l'humanité. Les hommes ont toujours eu affaire aux nombres et aux figures, et on les voit apparaître sous des formes diverses dans toutes les civilisations que nous avons le moyen d'explorer. La contemplation du ciel, la mesure des terrains, la navigation, la construction des monuments ont suggéré ou nécessité une pratique de la géométrie. La comptabilité et les mesures ont fait éclore les systèmes de numération.

Comment compter ? Les réponses sont diverses, selon les peuples et les besoins. Depuis plusieurs millénaires, les Chinois pratiquent la numération décimale et les nombres font partie de leur culture, mais l'apparition du zéro est tardive et revient à l'Inde. La suite *0, 1, 2, 3,* … s'appelle aujourd'hui la suite des entiers « naturels » ; rien de moins naturel, pourtant, que cette suite infinie ! Les Sumériens, puis les Babyloniens, ont utilisé différents systèmes de numération, selon les besoins. Cependant, la base 60 a émergé à Babylone, de façon très subtile et originale, et nous la conservons pour la mesure des temps et des angles. Les fractions babyloniennes, de la forme *a+1/b*, ont eu une belle postérité : on part d'un nombre positif, on prend sa partie entière, on la soustrait du nombre donné, il reste un nombre compris entre 0 et 1, on en prend l'inverse et on répète.



© Tamara Kulikova - Fotolia

© Semen Barkovskiy - Fotolia

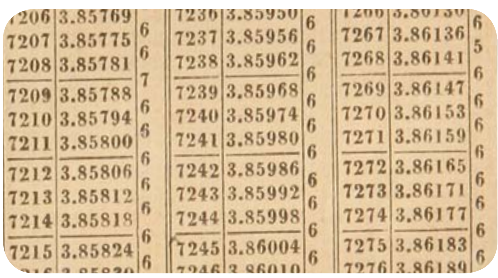


© agsandrew - Fotolia

Cet algorithme des « fractions continues » conserve un rôle majeur dans les mathématiques d'aujourd'hui. Il permet d'explorer les nombres « réels », qui se sont imposés progressivement dans la pratique mathématique, à travers des méandres dont témoigne la terminologie : nombres « rationnels », « irrationnels », comme plus tard « imaginaires » et « complexes ».

Pour nous, la Grèce ancienne occupe une place à part en mathématiques. Les noms de Thalès, Pythagore, Euclide ou Archimède évoquent des souvenirs à chacun. La philosophie de Platon est nourrie de mathématique et, inversement, les mathématiciens sont spontanément platoniciens : ce sont eux, avec les philosophes, qui sont capables de « sortir de la caverne » pour accéder à la véritable réalité des choses, la réalité mathématique. Aujourd'hui, l'académicien Alain Connes est un très éloquent porte-parole de cette vision des mathématiques. On ne peut qu'admirer la pertinence des notions dégagées et articulées par Euclide et ses prédécesseurs ; les triangles, les cercles, les nombres premiers d'Euclide sont toujours nos triangles, nos cercles et nos nombres premiers : ce qui a changé est notre regard sur eux, la révélation de tout ce qu'ils portent.

La Grèce était l'héritière de l'Égypte, Rome est l'héritière de la Grèce. Les monuments, les routes et les ponts romains témoignent d'une solide pratique mathématique. Mais, au contraire de la Grèce, la Rome antique ne nous a légué aucune élaboration théorique. Les mathématiques romaines ont été utilitaires, sans plus. Ironie de l'histoire, ce qui nous en reste est la plus incommode des façons d'écrire les nombres entiers.



© Vlad Ivantcov - Fotolia

L'histoire des mathématiques s'est poursuivie avec les Arabes, dont on découvre sans cesse les apports, l'algèbre ou, encore, les algorithmes. La Renaissance est ensuite intervenue, avec la représentation de l'espace et les tables numériques - les premières tables de logarithmes ont été imprimées immédiatement après leur introduction par

© ...diane-Nachez - Fotolia.


ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES
846
ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUE
PAR
N. BOURBAKI
I
PREMIÈRE PARTIE
LES STRUCTURES FONDAMENTALES DE L'ANALYSE
LIVRE I
THÉORIE
DES ENSEMBLES
(FASCICULE DE RÉSULTATS)
PARIS
HERMANN & Cie, ÉDITEURS
6, Rue de la Sorbonne, 6
1939

Théorie des ensembles.
N. Bourbaki. Hermann Éd., 1939

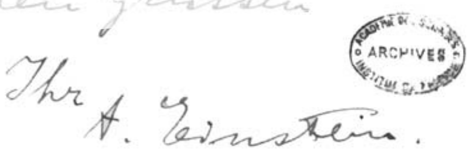
Neper. Suivent Descartes et Newton, et l'essor conjoint de la mécanique et de l'analyse mathématique, puis, au XIXe siècle, la création de nouvelles géométries et de nouvelles algèbres, le rôle des groupes, l'axiomatisation des théories, à commencer par l'arithmétique, et les problèmes de Hilbert, présentés au congrès international des mathématiciens de Paris, en 1900. Le XXe siècle sera, quant à lui, marqué par le magistral *Traité de Bourbaki*, qui domine la scène dans les années 1950 et restera, tels les *Éléments d'Euclide*, un monument de la pensée mathématique et un modèle d'écriture.

La profondeur et la croissance de tout ce qui s'est produit en mathématiques depuis un siècle défient toute description. Si de grands problèmes sont résolus, de nouvelles questions émergent. En voici une petite sélection.

Leonhard Euler

Les nombres premiers, d'abord, à propos desquels Bruno Duchesne fait état de résultats tout récents et frappants. Il sont une source d'inspiration constante pour les mathématiciens, et l'histoire des notions qui leur sont liées occuperait plusieurs volumes. Sans énoncer explicitement l'existence et l'unicité de la décomposition d'un nombre entier en facteurs premiers, Euclide en donnait déjà tous les éléments de démonstration, en même temps qu'il établissait qu'à toute collection finie de nombres premiers correspond un nombre premier qui n'appartient pas à la collection : il suffit de prendre le produit de tous les nombres de la collection, d'ajouter 1, et de considérer un facteur premier du nombre obtenu. La version analytique de l'existence et de l'unicité de la décomposition en facteurs premiers est la double écriture de la fonction introduite par Euler et étudiée par Riemann, la fonction ζ(s) de Riemann. C'est autour de cette fonction et de ses variantes que se mènent les plus importantes recherches en théorie des nombres depuis un siècle et demi. Les ressources de toutes les parties des mathématiques y contribuent. Les perles relevées par Bruno Duchesne ne sont pas des joyaux isolés, elles concourent à une vision d'ensemble de la place de la théorie des nombres en mathématiques.

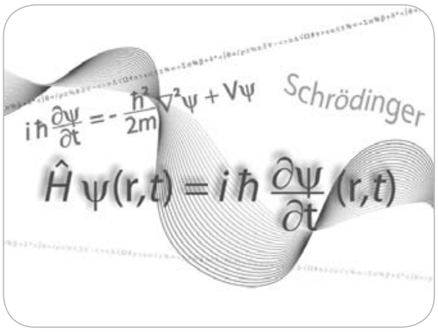
Le mouvement brownien, dont parle Nicolas Curien, est quant à lui une création mathématique du XXe siècle. Il est fascinant, et l'occasion pour moi d'une réflexion sur l'origine et la portée des concepts mathématiques. Il y en a de très anciens, juste renouvelés par le regard qu'on leur porte à présent - les nombres premiers ont été pris en exemple. *A contrario*, il y en a aussi qui se forgent sous nos yeux, et le mouvement brownien est emblématique à cet égard. L'objet naturel appartenait à la botanique avant Robert Brown. Celui-ci l'a fait passer à la physique. Einstein et Smoluchowski, puis Langevin, en ont fait la théorie physique. L'équation d'Einstein a été validée par l'expérience. Elle restait à établir comme objet



mathématique, et ce fut l'œuvre de Norbert Wiener. Aujourd'hui, ce que les biologistes comme les physiciens appellent le mouvement brownien est avant tout le mouvement brownien des mathématiciens, que Wiener appelait *The Fundamental Random Function*. Il est en effet fondamental, et beaucoup plus simple que le mouvement brownien réel. Pour autant, la relative simplicité de sa définition mathématique cache une merveilleuse richesse, ce qui est un fait assez général : les objets mathématiques les plus faciles à définir, par exemple un groupe, sont si riches qu'on ne sait encore rien d'eux quand on se borne à leur définition.

Le mouvement brownien témoigne de l'influence de la physique sur les mathématiques, et du va-et-vient entre elles. Roger Balian, dans un encadré, montre comment les physiciens regardent les mathématiques

À propos de « la déraisonnable efficacité des mathématiques »



Au cours des siècles, les mathématiques se sont affirmées comme le langage même de la physique. Déjà Galilée affirme, tout en insistant sur la primauté de l'expérience, que l'on ne peut comprendre l'univers « sans en apprendre la langue et sans connaître les caractères dans lesquels il est écrit », en l'occurrence la géométrie. Deux siècles plus tard, dans son « *Précis élémentaire de physique expérimentale* » de 1823, Jean-Baptiste Biot regrette de devoir renoncer au recours des méthodes mathématiques et des expressions analytiques qui « font la principale utilité et la certitude » de la physique. Les principes de celle-ci sont symbolisés par des équations, comme celles de Newton pour la dynamique, de Maxwell pour l'électromagnétisme, de Boltzmann pour la théorie cinétique, d'Einstein pour la gravitation, de Schrödinger pour la mécanique ondulatoire. Aujourd'hui, les mathématiques les plus variées fournissent des outils efficaces à la plupart des sciences, tout en imprégnant de plus en plus profondément la physique. Pourtant, une différence fondamentale oppose mathématiques et sciences de la nature[1]. Ces dernières visent à appréhender de mieux en mieux le monde ; elles produisent des vérités approchées et évolutives, validées par leur adéquation au réel et la qualité des prévisions. Au contraire, les vérités élaborées en mathématiques sont définitives, même lorsqu'elles perdent de leur intérêt et qu'on les abandonne ; elles portent sur des objets idéaux, et leur critère de validité est la logique, la cohérence des démonstrations. Alors, pourquoi cette construction abstraite de notre esprit est-elle si efficace pour comprendre le monde extérieur et agir sur lui, comme l'écrit Eugene Wigner[2] ? Les mathématiques seraient-elles le soubassement de l'univers, avec un grand horloger mathématicien ? La logique mathématique créée par notre cerveau serait-elle un produit de son évolution, adaptée au monde extérieur ? Les correspondances étroites que nous constatons entre les mathématiques et la physique résulteraient-elles de leurs progrès synergiques, la physique s'étant mieux développée dans les domaines où étaient apparues des mathématiques adaptées, et ayant stimulé en retour l'invention de mathématiques nouvelles ? Le débat philosophique n'est pas clos.

Roger Balian, membre de l'Académie des sciences

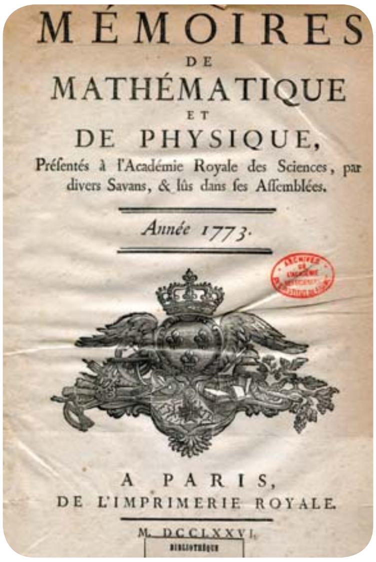
---

1 R. Balian. smf4.emath.fr/Publications/Gazette/1998/76/ p.15

2 E. Wigner, *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences*, 1960. www.dartmouth.edu/~matc/MathDrama/reading/Wigner.html

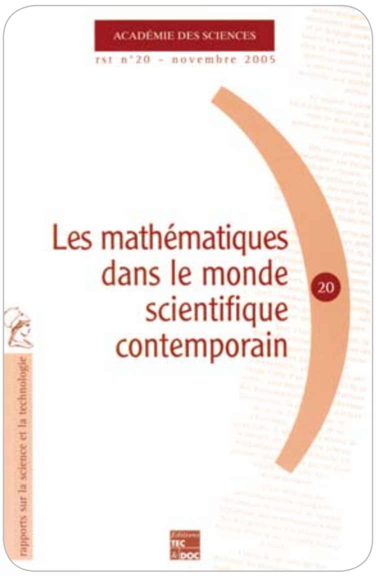
et leur efficacité. Si la solidarité entre mathématiques et physique a été occultée en France au cours du XX^e siècle, elle s'exprime de nouveau avec force aujourd'hui. Cette solidarité s'étend, sous des formes différentes, à l'ensemble des sciences. Elle doit être soulignée entre mathématiques et informatique.

L'informatique théorique est née des mathématiques, et elle leur apporte maintenant une foule de questions de première importance, un nouveau regard, de nouveaux problèmes et de nouveaux concepts, ce dont témoignent les textes de Claire Mathieu et Bernard Chazelle. On retrouve, chez Claire Mathieu, la promenade au hasard sur les graphes, déjà évoquée par Nicolas Curien. Deux questions sont posées : comment simplifier un grand système d'équations ? Comment tirer parti de *Facebook*® ? Bernard Chazelle, quant à lui, nous parle de la complexité algorithmique et de l'aléa, en dégageant un paradoxe : le recours à l'aléatoire est un procédé utilisé pour traiter des problèmes de grande complexité algorithmique, mais si ce procédé a valeur universelle, alors la notion de grande complexité algorithmique disparaît. Le texte de Bernard Chazelle est enthousiaste et enthousiasmant et, s'il est difficile par endroits, il n'est pas mauvais de voir que l'informatique ne se résume pas à presser des boutons.



Cette promenade mathématique se conclut par l'évocation d'un homme et d'une époque : c'est l'article de Frédéric Brechenmacher sur Lagrange et la vie scientifique au XVIII^e siècle, en France et en Europe. Quel fut le rôle des académies ? De quels sujets débattaient les mathématiciens ? Comment expliquer la percée de l'analyse mathématique dans tous les domaines ? Le centenaire de la mort de Lagrange a été l'occasion d'études et de réflexions dont l'article nous donne la saveur.

Suivant la tradition, il y aura des images et des encadrés, mais pas de références. Juste des mentions *Pour en savoir plus*. Pour terminer cette introduction, je me limiterai à deux recommandations. La première est de regarder le rapport RST de l'Académie des sciences, coordonné en 2005 par mon confrère Jean-Christophe Yoccoz, sur les mathématiques dans le monde scientifique contemporain ; il peut être actualisé, il n'est en rien périmé. La seconde est de se distraire et de s'instruire en parcourant le site *Images des Maths* du CNRS (http://images.math.cnrs.fr/), une publication électronique animée par l'académicien Étienne Ghys ; on y trouvera aussi la source de plusieurs articles présentés ici.



Rapport sur la science et la technologie. Académie des sciences, 2005

Du nouveau sur les nombres premiers

© DR

Bruno Duchesne

Institut Élie-Cartan, université de Lorraine

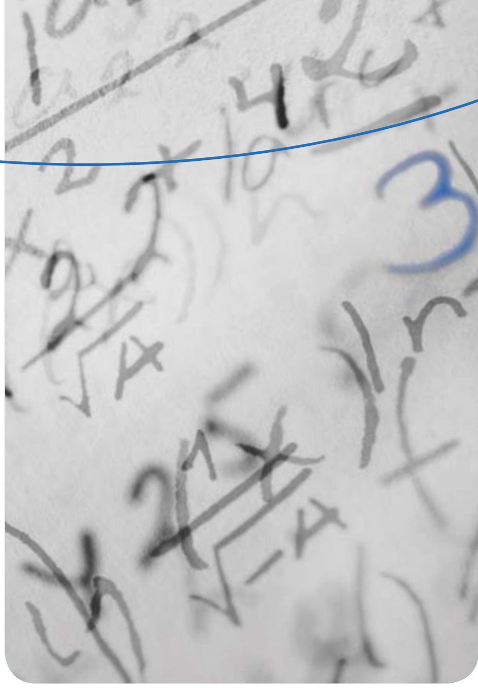
Les nombres premiers sont connus depuis des millénaires, et pourtant ils restent mystérieux par bien des aspects. Deux de ces mystères ont été en partie résolus au cours de l'année dernière : il s'agit de réponses à la « conjecture des nombres premiers jumeaux » et à la « conjecture de Goldbach ».

Les nombres premiers sont ces nombres entiers (supérieurs à 2) divisibles uniquement par 1 et par eux-mêmes. Une liste peut en être dressée, qui commence de la manière suivante : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, etc. Leur principale propriété ? « *Tout nombre entier s'écrit comme un produit de nombres premiers, et cela de manière unique* », si l'on ne tient pas compte de l'ordre dans l'écriture : par exemple, 84 s'écrit 2 x 2 x 3 x 7.

Le crible d'Érathostène

Dès l'Antiquité, ces nombres premiers ont suscité un certain intérêt. Euclide donnait déjà une jolie preuve de l'existence d'une infinité de nombres premiers. Ératosthène nous a légué un algorithme permettant de déterminer la liste des nombres premiers plus petits qu'un entier n : on écrit tous les nombres jusqu'à n, et on raye successivement les multiples des nombres qui n'ont pas déjà été rayés. Ceux qui restent non rayés sont exactement les nombres premiers. Ce *crible d'Érathostène* montre bien que la suite des nombres premiers n'est pas aléatoire, puisqu'elle peut être obtenue à l'aide d'un algorithme. Cependant,

© Mint Foto- Fotolia



© Stocksnapper - Fotolia

pour les grands entiers, cette méthode n'est absolument pas efficace, car elle demande beaucoup trop de calculs pour un ordinateur. C'est sur cette difficulté calculatoire que reposent de nombreux procédés de cryptage.

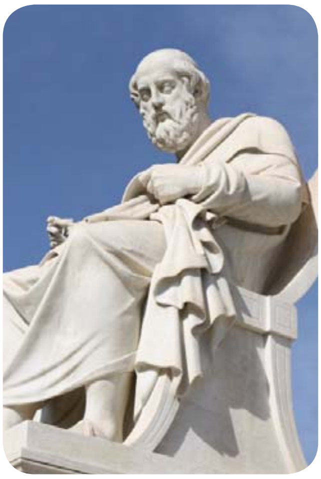
Puisque la suite des nombres premiers est parfaitement déterministe, existe-t-il une formule donnant la valeur du $n^{\text{ième}}$ nombre premier en fonction de n ? Malheureusement - ou heureusement pour le plaisir de certains mathématiciens ! -, une telle formule n'existe pas, et c'est en réalité tout le contraire qui se produit : à la lecture de la suite des nombres premiers, la première chose qui apparaît est que la proportion de nombres premiers parmi les entiers plus petits que x devient de plus en plus petite. En fait, le théorème des nombres premiers dit exactement que cette proportion se comporte comme $1/\log(x)$, qui tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Les nombres premiers semblent n'en faire qu'à leur tête, et ne suivre absolument aucune règle, sauf satisfaire leur définition, bien entendu ! Quant aux nombres premiers successifs, impossible de deviner la réponse à la question suivante : « *Si je connais un nombre premier, quel est le suivant ?* » : ce nombre semble complètement aléatoire, comme s'il était tiré au hasard.

Ce comportement aléatoire apparaît concrètement dans des théorèmes d'équirépartition, comme celui de la progression arithmétique de Dirichlet. Voici un exemple : observons le dernier chiffre dans l'écriture d'un nombre premier p ; dès que $p \geq 7$, alors ce dernier chiffre ne peut être que 1, 3, 7 ou 9, simplement car p n'est pas divisible par 2 ou 5. Un cas particulier du théorème de Dirichlet dit que le dernier chiffre des nombres premiers se répartit de manière uniforme entre 1, 3, 7 et 9, comme les lancers de dés - non pipés ! - se répartissent uniformément entre 1 et 6.

La conjecture des nombres premiers jumeaux

Il est facile de montrer que l'écart entre deux nombres premiers peut être aussi grand que souhaité ; mais il arrive aussi que deux nombres premiers soient séparés par un unique nombre entier, comme c'est le

Les nombres premiers avant Euclide



Statue de Platon à l'Académie d'Athènes

À Athènes, en 400 avant JC, juste avant la mort de Socrate, le très jeune Théétète donnait une méthode générale pour montrer que les racines carrées des nombres entiers sont irrationnelles, sauf si ces nombres sont des carrés parfaits. Plus tard, dans *Les Lois*, Platon donnait comme nombre idéal de foyers dans une cité utopique le nombre de 5040. Quel rapport ? La décomposition de 5040 en facteurs premiers est 2 x 2 x 2 x 2 x 3 x 3 x 5 x 7, ce qui indique tous les diviseurs et permet d'en donner le nombre, 59 selon Platon. Aucun nombre plus petit n'a autant de diviseurs, or les divisions exactes sont utiles, dans la « cité idéale », pour la répartition des moyens et des tâches. Évidemment, 5040 a été choisi à partir de sa décomposition en facteurs premiers, donc même si Euclide n'était pas encore passé par là,les nombres premiers et la décomposition en facteurs premiers étaient connus. C'est une hypothèse plausible qu'ils l'aient aussi été de Théétète, et qu'il ait raisonné ainsi : si $a = (b/c)^2$, alors $a \times c^2 = b^2$, et les décompositions en facteurs premiers montrent que *a* est un carré parfait. **Jean-Pierre Kahane**

« *Ce qu'il faut fixer en premier lieu, c'est le volume numérique de la population, de combien de personnes il est besoin qu'elle se compose. Après quoi, il y a lieu de se mettre d'accord sur la répartition des citoyens et sur le nombre des sections selon lesquelles ils doivent être divisés, ainsi que sur le nombre des individus dans chaque section... En vue de fixer un nombre qui convienne, décidons que le nombre des chefs de famille sera de 5040, qui, cultivant le territoire, en sont aussi les défenseurs. Que la terre ainsi que les résidences soient pareillement distribuées en un même nombre de sections... Commençons donc par distribuer le nombre total en deux portions, puis le même nombre en trois : en fait, il est dans la nature du nombre en question de se laisser diviser en quatre, en cinq, et ainsi de suite, jusqu'à dix. Partant, quiconque institue des lois doit à propos des nombres avoir réfléchi à la question de savoir quel est le nombre, et comment constitué, qui sera le plus commodément utilisable pour toute organisation sociale : disons que c'est celui qui possède intrinsèquement le plus grand nombre de divisions et sutout de divisions qui se suivent...* ».
Platon. *Théétète*, 147 c, d, e ; 148 a, b - *Les Lois*, chapitre V, 736-8. *In* Bibliothèque de la Pléiade, n°64, 1943.

cas pour 11 et 13, mais aussi pour 18 409 199 et 18 409 201 : de tels nombres premiers sont appelés jumeaux. Ce phénomène ne se produit-il que quelques fois, par accident, ou en revanche une infinité de fois ? Cette dernière hypothèse, qui affirme qu'il existe une infinité de nombres premiers jumeaux, constitue la *Conjecture des nombres premiers jumeaux* : conjecture, car si elle est présumée vraie, personne n'en connaît de preuve.

Une manière de reformuler la conjecture est de dire qu'il existe une infinité de paires de nombres premiers dont la différence est exactement 2. La difficulté de cette conjecture - qui semble avoir été formulée pour la première fois en 1849, par Alphonse de Polignac - incite à se poser une autre question *a priori* plus facile : « *Existe-t-il une borne* C *et une infinité de paires de nombres premiers dont la différence est inférieure à* C ? »

Les nombres premiers, une longue histoire

- 250 environ - Diophante
- 1640 - Pierre de Fermat
- 1733 - Leonhard Euler
- 1792 - Carl Gauss
- 1859 - Bernhard Riemann
- 1896 - Jacques Hadamard

C'est à cette deuxième question que Yitang Zhang a répondu, en montrant que c'est vrai pour *C* = 70 000 000. Bien sûr, il reste un long chemin pour aller de 70 000 000 à 2 et obtenir la conjecture des nombres premiers, mais cette première étape est déjà remarquable. À la suite de la publication du résultat de Zhang, de nombreuses personnes ont essayé de réduire la valeur de *C*. Un groupe de chercheurs, rassemblés autour de Terence Tao dans le projet collaboratif Polymath 8, est parvenu à 252 - valeur la plus faible à ce jour, et si c'est bien confirmé. Ils se sont bien sûr inspirés des travaux de Zhang, mais aussi des travaux de James Maynard, un jeune post-doctorant qui a fait sensation en annonçant 600 comme borne.


© DR

Yitang Zhang

Le résultat de Yitang Zhang a surpris la communauté, tant il était admis que les méthodes qu'il employait ne pouvaient aboutir, mais aussi en raison de son quasi-anonymat avant mai 2013, même parmi les mathématiciens s'intéressant aux nombres premiers. Désormais, Zhang passe une partie non négligeable de son temps à répondre à des interviews...

La conjecture de Goldbach

Une autre question devenue fameuse concerne les propriétés additives des nombres premiers. Par définition, les nombres premiers forment tous les nombres entiers par multiplication entre eux. Qu'en est-il pour l'addition ?


© Adenise Lopes - Académie des sciences

Dans une lettre de 1742 - parmi plus de 160 échangées -, Christian Goldbach avançait au célèbre Leonhard Euler l'idée suivante : « *Tous les nombres entiers supérieurs à 2 peuvent s'écrire comme somme d'au plus trois nombres premiers.* » Par exemple, 51 = 3 + 19 + 29. Euler répondit qu'il croyait aussi à cette idée, et remarqua qu'il suffisait de montrer que tout nombre pair supérieur à 4 est somme de deux nombres premiers. En effet, si tout nombre pair est somme de deux nombres premiers, alors si *n* est un entier impair, *n-3* est pair et s'écrit comme la somme de deux entiers *p1* et *p2*. Finalement, $n = 3 + p1 + p2$.

La conjecture avancée par Goldbach continue de résister aux mathématiciens - même si elle a été plusieurs fois démontrée dans la littérature ou au cinéma -, mais plusieurs avancées vers une preuve ont été obtenues au cours du XXe siècle. Le premier résultant frappant fut celui de Šnirel'man en 1930, qui réussit à démontrer qu'il existe un entier *N* tel que tout nombre entier s'écrit comme la somme d'au plus *N* nombres premiers. La preuve donnait bien l'existence de *N*, mais aucune valeur pour celui-ci !

La conjecture de Goldbach affirme exactement que le plus petit *N* - tel que mentionné ci-dessus - est exactement 3. Les premières valeurs numériques connues de *N* furent très grandes, de l'ordre de plusieurs millions, avant d'atteindre 7, grâce à Olivier Ramaré en 1995, puis 6, grâce à Terence Tao en 2012. En fait, ces deux derniers résultats ont été obtenus en se concentrant uniquement sur les nombres pairs, ou sur les nombres impairs, avec des méthodes complètement différentes. On s'approchait donc de la conjecture de Goldbach, sans pour autant l'atteindre...

En 1932, Ivan Vinogradov a montré que tout nombre premier impair « suffisamment grand » est somme de trois nombres premiers. Malheureusement, ce « suffisamment grand », qui signifie « à partir d'un certain entier », restait inconnu. Petit à petit, ce « suffisamment grand » a pu être quantifié, et il a pu être montré que tout nombre premier impair plus grand que e^{3100} est bien somme d'au plus trois nombres premiers. Sachant que le nombre de secondes depuis le début de l'univers est de l'ordre de 10^{17}, et qu'on estime le nombre de protons de l'univers à 10^{80}, même en construisant un ordinateur avec tous les atomes de l'univers et en le faisant tourner depuis le début de l'univers, il est inenvisageable de vérifier la conjecture jusqu'à la valeur e^{3100} !

Harald Helfgott

Au mois de mai 2013, Harald Helfgott, de l'École normale supérieure, a déposé une preuve, non encore publiée à ce jour, qui montre la conjecture de Goldbach pour les nombres entiers impairs : l'essentiel de la preuve consiste à montrer que le « suffisamment grand » du théorème de Vinogradov peut être ramené à 10^{27}, et utiliser ensuite la puissance des ordinateurs pour vérifier la conjecture jusqu'à 10^{27}, ce qui est accessible à un ordinateur personnel actuel. Comme conséquence de ce remarquable résultat de Helfgott, on sait que tout nombre entier est la somme d'au plus quatre nombres premiers. Pour obtenir la conjecture complète, il reste à montrer que tout nombre premier pair (supérieur à 3) s'écrit comme somme de deux nombres premiers exactement. Attention, il ne suffira pas d'améliorer les méthodes utilisées par Helfgott pour obtenir le résultat pour les nombres pairs, il faudra avoir de nouvelles idées ! Encore de beaux jours à venir pour les théoriciens des nombres...

Les aléas du brownien

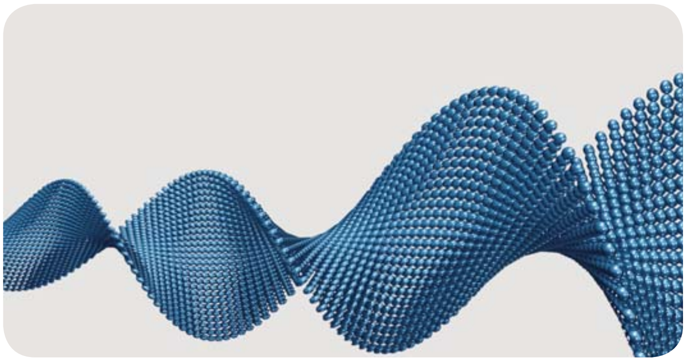
© DR

Nicolas Curien

Laboratoire de probabilités et modèles aléatoires,
CNRS/université Pierre-et-Marie-Curie

Quel objet mathématique intervient dans le calcul du prix des options en finance, a permis de fonder rigoureusement la thermodynamique des fluides et a été à l'origine de deux prix Nobel et d'une médaille Fields ? C'est le mouvement brownien. Avant de décrire cet objet, penchons-nous sur sa genèse, qui mêle de manière épatante biologie, physique, chimie, finance et mathématiques, dans un ordre chronologique surprenant.

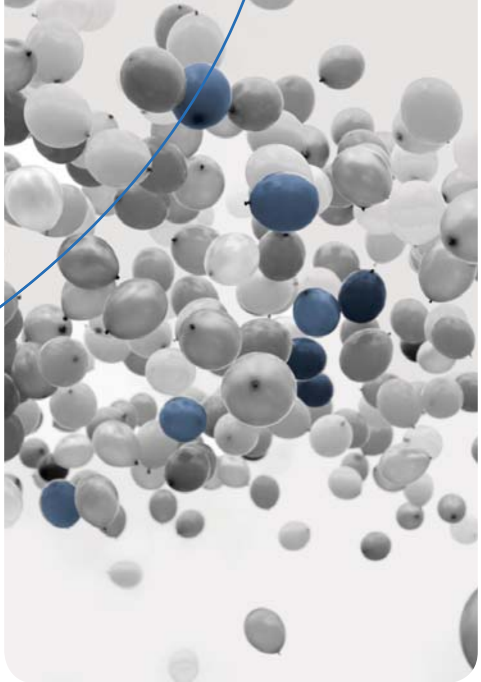
Méfiez-vous de l'eau qui dort



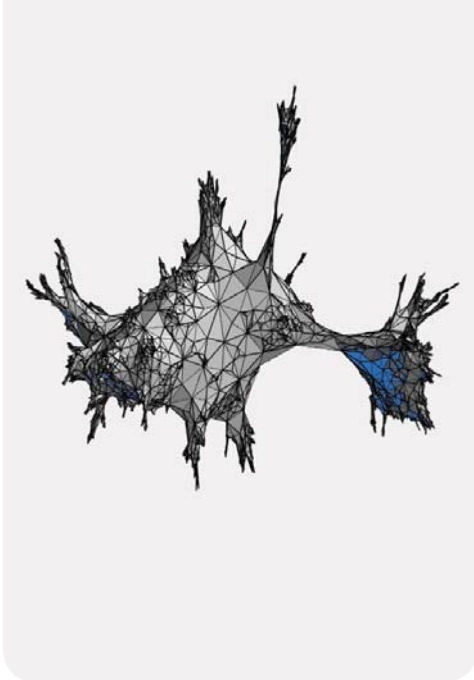
© agsandrew - Fotolia

Tout commence à la fin du XVIIIe siècle, quand de nombreux scientifiques, armés de microscopes, décrivent l'agitation désordonnée et permanente des particules issues de grains de pollen en suspension dans l'eau. Comment expliquer qu'un liquide totalement au repos soit à l'origine d'un mouvement perpétuel ? Une complaisante « force vitale » est alors invoquée pour rendre compte de cette apparente incompatibilité. Cependant, en 1827, le botaniste Robert Brown - dont le mouvement portera le nom - montra que des particules même inorganiques pratiquaient des danses zigzagantes identiques dans le fluide. Exit, donc, l'hypothèse de la force vitale, et le mystère restait entier. Au cours du XIXe siècle, les physiciens - et notamment Louis-Georges Gouy, à la fin du siècle - multiplièrent hypothèses et mesures : ils réalisèrent

© DR



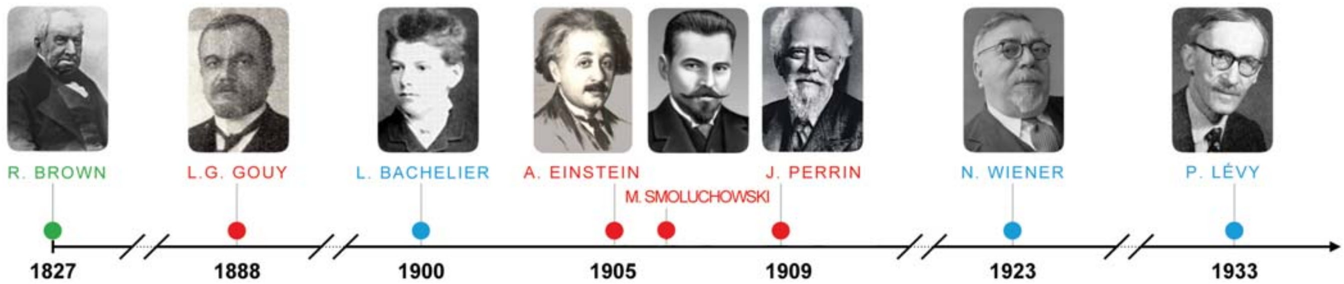
© mulder - Fotolia.com



© Nicolas Curien

alors que le comportement des particules pouvait s'expliquer par les nombreux chocs qu'elles subissaient de la part des molécules du liquide. Mais l'existence des molécules, « l'hypothèse atomique », restait alors très contestée.

Le mouvement brownien des particules permettait alors, tel un formidable microscope, de rendre visible l'invisible agitation thermique des molécules du liquide. Des calculs théoriques d'Albert Einstein et de Marian Smoluchowski, plus tard vérifiés expérimentalement par Jean Perrin, permirent la confirmation définitive de cette hypothèse. Le mouvement brownien, en révélant la structure granulaire de la matière, venait d'asseoir l'existence des atomes. Cette incroyable épopée fut couronnée par le prix Nobel de physique décerné en 1926 à Jean Perrin. Parallèlement, le Français Louis Bachelier publia en 1900 sa thèse « Théorie de la spéculation », dans laquelle il proposa implicitement de modéliser le cours des actions en bourse par un processus aléatoire. Tout comme la myriade de chocs infinitésimaux entre le grain de pollen et les molécules du fluide, le cours d'une action est une somme d'infimes effets aléatoires - ici les ordres non concertés d'achat-vente des boursicoteurs - et indépendants dans le temps. Bien qu'oubliée pendant 70 ans, l'œuvre de Bachelier, redécouverte par Fischer Black et Myron Scholes, est à l'origine du formidable essor des mathématiques dites financières.

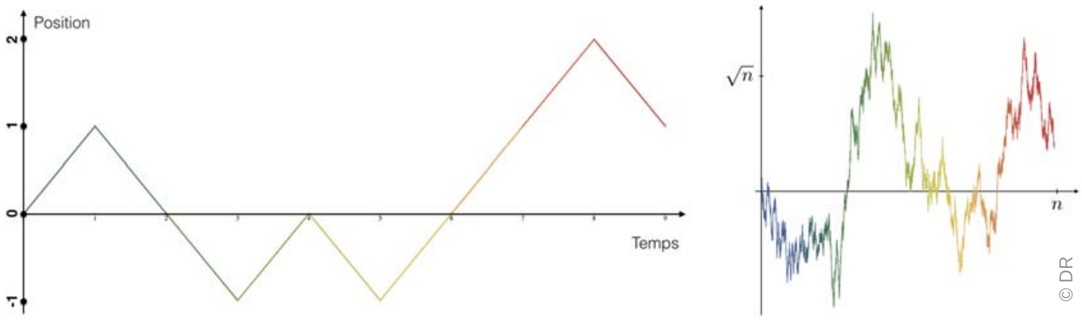


© DR

De la biologie (en vert) aux mathématiques (en bleu) en passant par la physique (en rouge) et la finance : chronologie non exhaustive de la naissance du mouvement brownien.

Et les maths dans tout cela ?

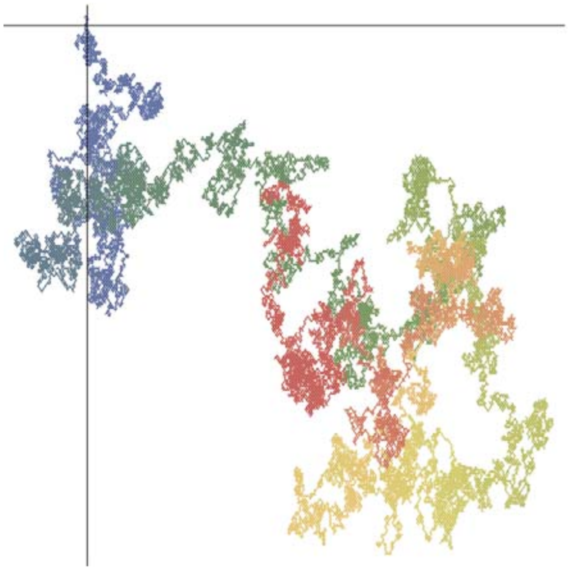
Dans les années 1920, le brownien, comme l'appellent de nos jours les probabilistes, est un pilier de la physique, mais n'a pas encore de définition mathématiquement précise. Il faudra attendre les travaux de Norbert Wiener pour donner un sens à cette fonction continue aléatoire. Un temps baptisé « processus de Wiener », le « mouvement brownien » doit finalement sa terminologie à Paul Lévy, fondateur des probabilités françaises ; il est, depuis, l'un des outils les plus puissants des probabilistes. Si la définition mathématique précise du brownien est assez délicate, on peut en avoir une bonne intuition en décrivant son analogue discret : la marche aléatoire. Le mouvement continu est transformé en une suite de pas indépendants. Dans le cas le plus simple, on considère sur une ligne discrète {…, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...} une particule qui, démarrant initialement de 0, saute à pile ou face vers la droite (+1) ou vers la gauche (-1) avec une probabilité égale. Sa position à l'instant n est notée X_n. Si l'on représente graphiquement X_n en fonction de n, quand n tend vers l'infini, une fonction aléatoire apparaît : c'est le mouvement brownien en dimension 1.

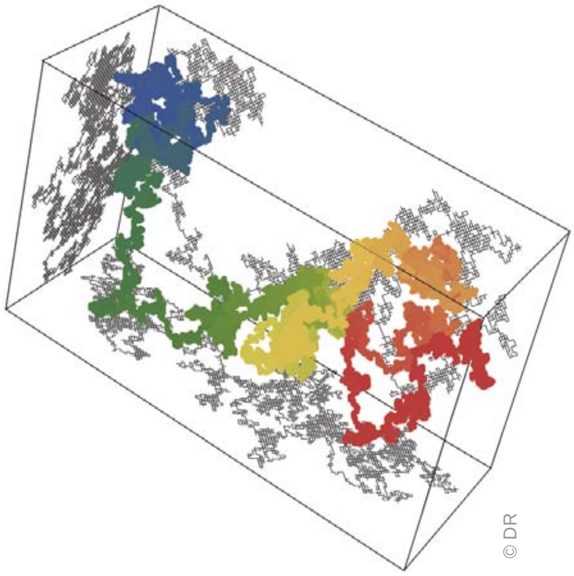


Une marche aléatoire de 9 pas (à gauche) et une marche aléatoire de 20 000 pas (à droite). La couleur de la particule évolue du bleu au rouge au cours du temps. Dans la figure de droite, une courbe aléatoire très irrégulière apparaît : c'est le mouvement brownien en dimension 1.

Il faut noter que les échelles choisies pour le déplacement de la particule et pour le temps ne sont pas les mêmes : ainsi, après n pas (n grand), la particule se trouve à une position aléatoire typiquement d'ordre $\sqrt{n}$. Cette loi d'échelle du mouvement brownien est fondamentale et apparaît dans les calculs d'Einstein et Smoluchowski. C'est cette même loi d'échelle qui se manifeste dans le théorème central limite, qui peut s'énoncer ainsi : la loi de position aléatoire X_n divisée par $\sqrt{n}$ converge vers la loi de Gauss, dont la densité de probabilité est la fameuse courbe en cloche. Le mouvement brownien peut donc être vu comme une version dynamique ou trajectorielle du théorème central limite. Après avoir donné sa définition formelle, Wiener et ses acolytes étudièrent les propriétés fines du mouvement brownien. Ils montrèrent que bien qu'aléatoire, cette fonction obéit à des lois déterministes, c'est-à-dire indépendantes du hasard. Ainsi, pour toutes les réalisations possibles du mouvement brownien en dimension 1, cette fonction, bien que continue, n'admet pas de tangente et oscille frénétiquement « de la même manière » : c'est une courbe fractale de dimension 3/2.

Des marches aléatoires peuvent être définies de manière similaire dans le plan ou dans l'espace. Dans le plan, la particule choisit et avance d'une unité, à chaque pas, dans une direction nord, sud, est ou ouest avec une probabilité 1/4 ; dans l'espace (de dimension 3), il y a 6 directions possibles. La marche aléatoire dans le plan donne alors naissance, à la limite, au mouvement brownien plan dont Paul Lévy s'enticha et qui est encore de nos jours source de nombreux problèmes ouverts.





© DR

Des marches aléatoires de 20 000 pas approximant le mouvement brownien en dimensions 2 et 3. À droite, les projections orthogonales de la trace brownienne sont représentées sur les faces de la boîte.

Et maintenant, qu'allons-nous faire ?

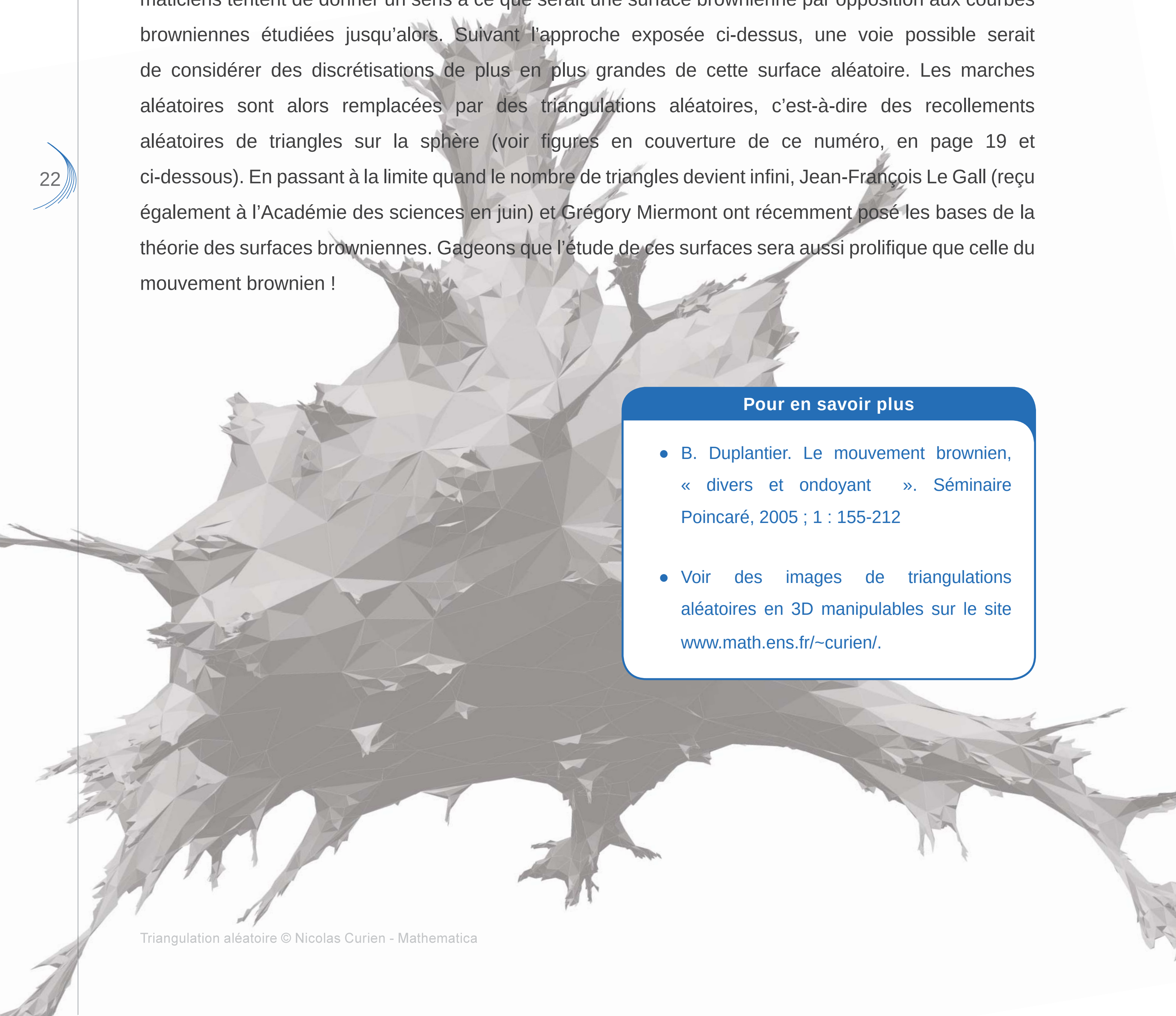
© B.Eymann - Académie des sciences

Wendelin Werner

Clé de voûte de la théorie des probabilités modernes, le mouvement brownien a été étudié de manière intensive durant les cinquante dernières années. C'est d'ailleurs en partie pour récompenser ses résultats sur le mouvement brownien plan que Wendelin Werner, membre de l'Académie des sciences, a reçu la médaille Fields en 2006, pour la première fois décernée à un probabiliste. Outre ses nombreuses applications dans tous les domaines des mathématiques, le brownien vient jeter un regard nouveau sur l'électrostatique, permet la résolution de l'équation de la chaleur et modélise de nombreux phénomènes physiques et biologiques. Son utilisation effrénée au début des années 2000 dans des modèles financiers l'a même fait passer, bien sûr à tort, pour une des causes de la crise économique actuelle !

Le concept de marche aléatoire intervient également de manière beaucoup plus cocasse dans notre vie de tous les jours. En effet, l'algorithme *PageRank* de classement des pages Web de l'omniprésent moteur de recherche Google® utilise une marche aléatoire sur le graphe du Web. Ce graphe est un immense réseau en constante évolution où chaque page Internet représente un sommet et chaque lien hypertexte une arête. L'algorithme exact *PageRank* est bien entendu très compliqué et jalousement protégé par la firme californienne, mais l'idée de base est que les pages le plus souvent visitées par la marche aléatoire sur le graphe du Web sont les pages auxquelles Google® accorde le plus d'importance.

Le mouvement brownien garde encore bien des secrets et son étude future promet d'être fructueuse. En témoignent les travaux mathématiques récents de Thierry Bodineau, Isabelle Gallagher et Laure Saint-Raymond (reçue en juin de cette année à l'Académie des sciences) sur l'apparition rigoureuse du mouvement brownien comme le déplacement d'une particule marquée dans un gaz de particules solides entrant en collisions élastiques. Un autre exemple est le tout nouveau champ de recherche créé au début des années 2000 : en lien avec la théorie de la gravité quantique en dimension 2, les mathématiciens tentent de donner un sens à ce que serait une surface brownienne par opposition aux courbes browniennes étudiées jusqu'alors. Suivant l'approche exposée ci-dessus, une voie possible serait de considérer des discrétisations de plus en plus grandes de cette surface aléatoire. Les marches aléatoires sont alors remplacées par des triangulations aléatoires, c'est-à-dire des recollements aléatoires de triangles sur la sphère (voir figures en couverture de ce numéro, en page 19 et ci-dessous). En passant à la limite quand le nombre de triangles devient infini, Jean-François Le Gall (reçu également à l'Académie des sciences en juin) et Grégory Miermont ont récemment posé les bases de la théorie des surfaces browniennes. Gageons que l'étude de ces surfaces sera aussi prolifique que celle du mouvement brownien !



Pour en savoir plus

- B. Duplantier. Le mouvement brownien, « divers et ondoyant ». Séminaire Poincaré, 2005 ; 1 : 155-212
- Voir des images de triangulations aléatoires en 3D manipulables sur le site www.math.ens.fr/~curien/.

Triangulation aléatoire © Nicolas Curien - Mathematica

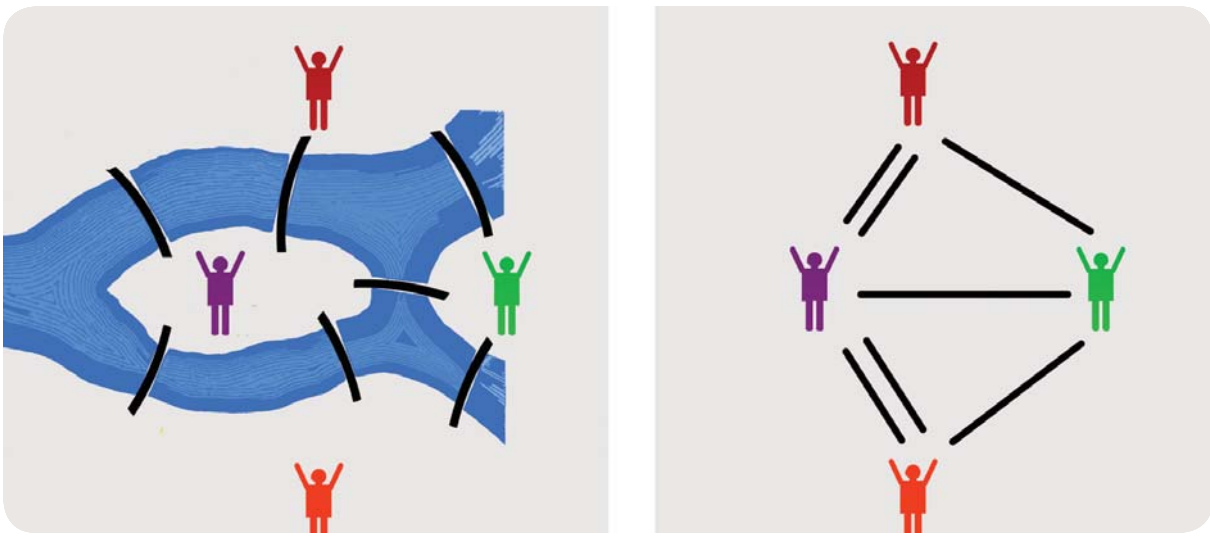
La théorie des graphes, outil mathématique des temps modernes

Claire Mathieu
CNRS, École normale supérieure, Paris


© DR

La théorie des graphes est née avec Euler, et l'étude formelle de la traversée des ponts de Königsberg, puis a vu sa notoriété en partie renforcée au XIXe siècle, avec la conjecture des 4 couleurs. Pour autant, avant le développement de l'informatique, les graphes n'étaient qu'un sous-domaine de la combinatoire, tandis qu'ils sont désormais omniprésents !

Ainsi, la résolution de systèmes laplaciens est en passe d'être transformée par la théorie des graphes. Dans ces systèmes, de forme $Ax = b$, A est symétrique, ses lignes sont de somme nulle et ses éléments non diagonaux négatifs. Apparaissant naturellement dans des problèmes de réseaux, de calcul scientifique ou de vision par ordinateur, ils correspondent à la loi de


© À partir de blobbotronic Juulijs - Fotolia

Le problème des sept ponts de Königsberg, à l'origine de la théorie des graphes : peut-on faire un tour complet de la ville en passant une fois, et une seule, par chacun des ponts ? Euler démontre que c'est impossible.

© peshkova - Fotolia

Kirchhoff et aux marches aléatoires dans le graphe associé aux entrées non nulles de A. Les valeurs propres sont liées au poids des arêtes entre deux parties du graphe, donc aux coupes du graphe, et une approche efficace consiste à remplacer le graphe A par un graphe B dont les coupes seront de valeur similaire, mais la matrice beaucoup plus creuse que A : c'est le problème du préconditionnement, vu sous la perspective des graphes. Par des algorithmes de graphes, on trouve des matrices B qui accélèrent considérablement la résolution des systèmes, du moins en théorie.

À graphes nouveaux, questions nouvelles. Un rôle grandissant est joué par les réseaux construits par l'homme. Dans le graphe du Web, chaque page est un sommet du graphe, et les hyperliens sont les arcs du graphe. Dans le graphe de *Facebook*®, chaque utilisateur est un sommet, et les liens d'amitié sont les arêtes. Plus d'un milliard d'utilisateurs, on change d'échelle ! L'une des questions les plus intéressantes à propos de ce type de graphes est celle de l'acquisition d'information par le seul examen de la structure du graphe, indépendamment de toute information sémantique. Ainsi, les moteurs de recherche, une fois qu'ils ont sélectionné quelques centaines de pages donnant potentiellement des réponses satisfaisantes à une requête, doivent choisir dans quel ordre ils vont proposer ces pages à l'utilisateur. Quelle est la meilleure réponse ? C'est, sans doute, la page la plus populaire. Mais comment définir cette popularité ? Par la probabilité stationnaire d'une marche aléatoire qui traverse les liens au hasard : cette idée simple a révolutionné la conception des moteurs de recherche d'information. Les questions foisonnent. Par exemple, comment détecter des communautés de personnes ayant des intérêts communs ? On y parvient par l'étude des coupes du graphe. Plus généralement, tout un domaine se développe, à la frontière des probabilités, de l'informatique et de la sociologie, sur les informations qui peuvent être extraites de la structure du graphe. Comment gérer l'afflux gigantesque de données complexes peu structurées, de grande dimension ? Là aussi, un graphe de similarité peut permettre d'extraire une représentation plus concise des données.

Nouvelles techniques, nouveaux modèles, nouveaux problèmes : la théorie des graphes se renouvelle. Degrés, coupes, métrique, expansion, etc. : ces paramètres sont liés à la géométrie en grande dimension, aux probabilités, à l'analyse spectrale, au calcul scientifique, et les domaines se répondent en écho, révélant des correspondances qui laissent deviner une ténébreuse et profonde unité.

Les surprises de la complexité algorithmique

Bernard Chazelle

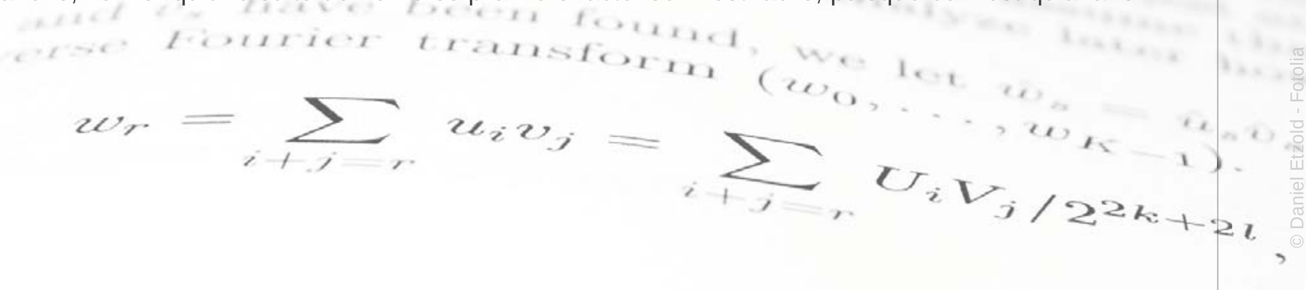
Department of Computer Science, Princeton University

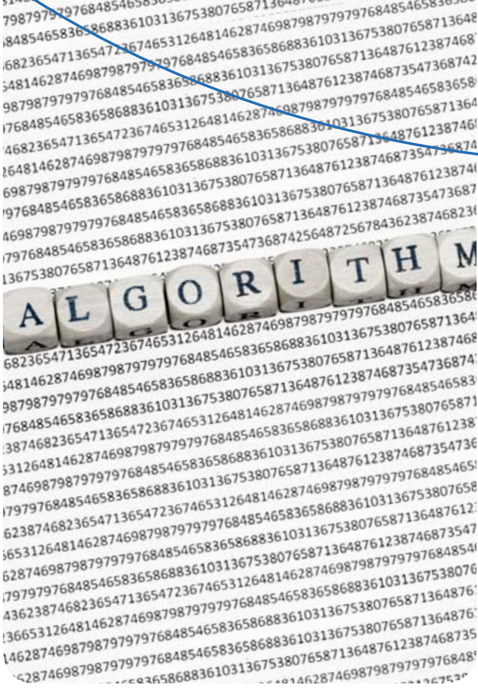
Les deux dernières décennies ont vu l'émergence d'une théorie de l'aléa algorithmique dont les conséquences sur la notion de preuve ont une portée philosophique à même de surprendre. Voici, en quelques mots, ce dont il s'agit.

P, NP et tout cela

En informatique théorique, la complexité d'un problème désigne la quantité de ressources nécessaires à sa solution. Il est d'usage de se limiter à trois types de ressources : le temps, l'espace et l'aléa. L'algorithme scolaire pour la multiplication, par exemple, requiert un temps quadratique : en effet, multiplier deux entiers de n chiffres nécessite un nombre d'opérations élémentaires de l'ordre de n^2. L'espace requis est également quadratique, mais il est facile de le rendre proportionnel à n. Existe-t-il un algorithme plus rapide ? Curieusement, en faisant un détour par la transformée de Fourier, on peut réduire le temps d'exécution à une fonction proche de $n \log n$. Cet algorithme est certes trop compliqué pour détrôner celui enseigné à l'école primaire, mais sa rapidité justifie sa présence au cœur de certains codes cryptographiques.

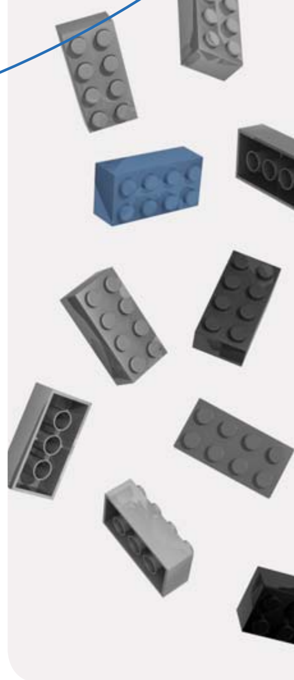
Un problème est dit polynomial s'il peut être *résolu* en un nombre d'étapes proportionnel à n^c, où n dénote la taille du problème et c est une constante. C'est notamment le cas de la multiplication, de la transformée de Fourier, de la programmation linéaire et de bien d'autres tâches d'usage courant. Ces problèmes constituent la classe P, dont la contrepartie, la classe NP, regroupe les problèmes dont la solution peut être *vérifiée* en temps polynomial. Considérons le problème de factoriser un entier N de n chiffres. Il y a lieu de croire (et d'espérer) que c'est un problème difficile, c'est-à-dire non résoluble en temps polynomial ; en revanche, vérifier qu'une suite de nombres premiers factorise N est facile, puisque ce n'est qu'affaire





© Denis Junker - Fotolia

© Dreaming Andy - Fotolia



de multiplications : la factorisation est donc dans NP. Mais pourquoi espérer que ce soit une opération difficile ? Parce que le sort de toute la cryptographie à clé publique, et donc du commerce électronique, en dépend. En rendant la factorisation facile (autrement dit, polynomiale), les ordinateurs quantiques promettent de bouleverser cet ordre. Encore faut-il qu'ils voient le jour...

Le paradoxe de l'aléa

Le choix du concept polynomial dans la définition de P provient de deux observations. D'une part, pour des raisons pratiques, seuls les algorithmes polynomiaux sont viables pour les ordinateurs. D'autre part, la classe P est invariante par l'opération de composition : il est ainsi possible d'assembler des algorithmes pour en créer d'autres - un peu comme on assemble des Lego® - afin de réduire un problème à un autre. À cette propriété se retrouve associé le concept de NP-complétude, qui désigne les problèmes les plus difficiles dans NP - une classe extrêmement riche : automatiser la preuve des théorèmes mathématiques, par exemple, est NP-complet, de même que résoudre un système d'équations quadratiques modulo 2, simuler le repliement des protéines ou, encore, colorier un graphe en assignant des couleurs à ses sommets de façon à rendre toutes les arêtes bichromatiques. La classe des problèmes NP-complets jouit d'une propriété remarquable : savoir résoudre n'importe lequel d'entre eux en temps polynomial permettrait d'en faire de même pour tous les autres. Cette universalité est à même de surprendre. Elle implique qu'une solution rapide pour le coloriage de graphe, autrement dit P = NP, entraînerait automatiquement une méthode rapide pour découvrir une démonstration de l'hypothèse de Riemann. Il n'est donc guère surprenant qu'un consensus se soit formé autour de la conjecture P ≠ NP. Cette inégalité, sans aucun doute l'un des plus grands défis scientifiques de notre époque, formalise l'intuition que trouver est plus dur que vérifier, que la créativité ne peut être automatisée, que composer la *Messe en si mineur* est plus ardu que d'apprécier le génie de cette musique.

© Prosetisen - Fotolia

Hypothèse A : il existe des problèmes naturels que l'on ne sait pas, et ne saura jamais, résoudre en temps polynomial.

Et l'aléa là-dedans ? Il existe un nombre de problèmes importants pour lesquels l'usage de la randomisation semble incontournable. Par exemple, armés de *bits* aléatoires, on peut facilement approximer le volume d'un polyèdre en haute dimension ou trouver un nombre premier de *n bits*. Dans tous ces cas, c'est l'usage de *bits* aléatoires qui accélère le temps de calcul d'exponentiel à polynomial. Retirez l'aléa, et les problèmes redeviennent difficiles. Bien qu'on ne sache l'établir, la conclusion suivante s'impose :

Hypothèse B : il existe des problèmes faciles à résoudre avec des algorithmes probabilistes mais qui, sans recours à la randomisation, redeviennent difficiles.

Le terme « facile » évoque ici la distinction entre un temps polynomial et un temps exponentiel : que l'algorithme soit compliqué ou pas n'est pas pertinent à l'hypothèse, même si, en pratique, cet élément n'est pas négligeable. Par exemple, « *décider si un entier de* n *chiffres est premier* » appartient à la classe P, puisqu'il existe un algorithme déterministe pour répondre à cette question en temps polynomial *n* ; mais l'algorithme n'étant pas particulièrement simple, on se tourne en pratique vers un autre algorithme, probabiliste, qui est, lui, d'une simplicité enfantine. Les *bits* aléatoires sont donc *indispensables* en pratique, mais sont-ils *nécessaires* pour réduire la complexité de certains problèmes d'exponentiel à polynomial, comme le prévoit l'hypothèse B ? Il y a une abondance d'indices suggérant qu'en effet ils le sont.

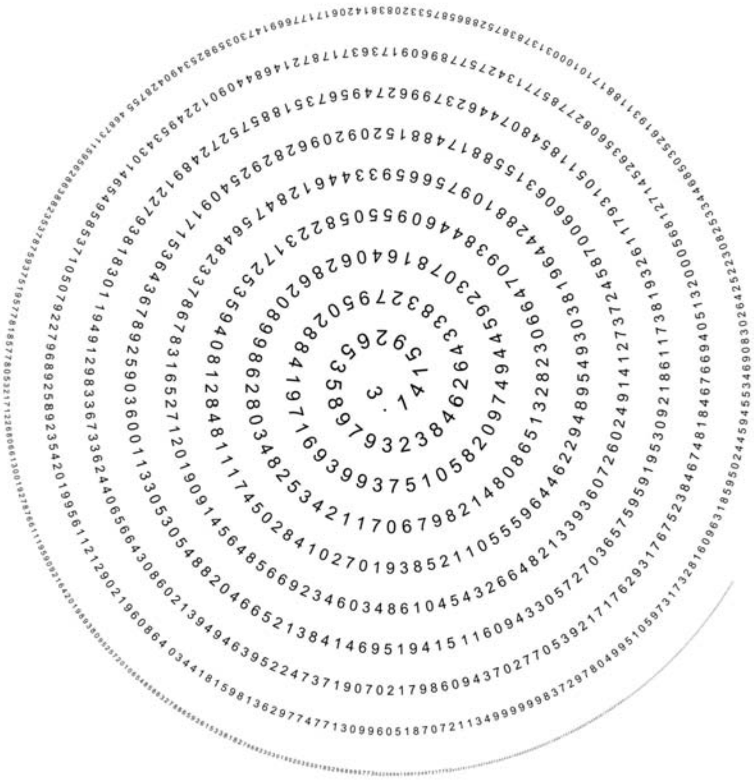
Maintenant convaincu que les deux hypothèses A et B ne peuvent être que vraies, le lecteur se voit confronté à un sérieux dilemme : A et B sont, en fait, incompatibles. Il existe une opinion relativement consensuelle que seule A est valide. Pourquoi ? L'intuition est la suivante : l'existence de problèmes difficiles permet de manufacturer des *bits* de manière déterministe qu'aucun algorithme polynomial ne peut distinguer de *bits* produits de façon parfaitement aléatoire. Autrement dit, on ne peut pas faire la différence entre de l'aléa parfait et du pseudo-aléa, c'est-à-dire de l'information d'apparence aléatoire. En utilisant ces *bits* déterministes, on peut alors « dérandomiser » tout algorithme probabiliste sans perte de temps : l'aléa devient alors un luxe, utile, mais accessoire. Soulignons au passage que la qualité du quasi-aléa nécessaire à ce subterfuge est nettement supérieure à ce que l'on rencontre en statistique : par exemple, les décimales de π forment de bien piètres générateurs de quasi-aléa. De fait, la production déterministe de *bits* d'apparence aléatoire est une affaire complexe, qui repose sur une théorie riche de plusieurs décennies de recherche active.

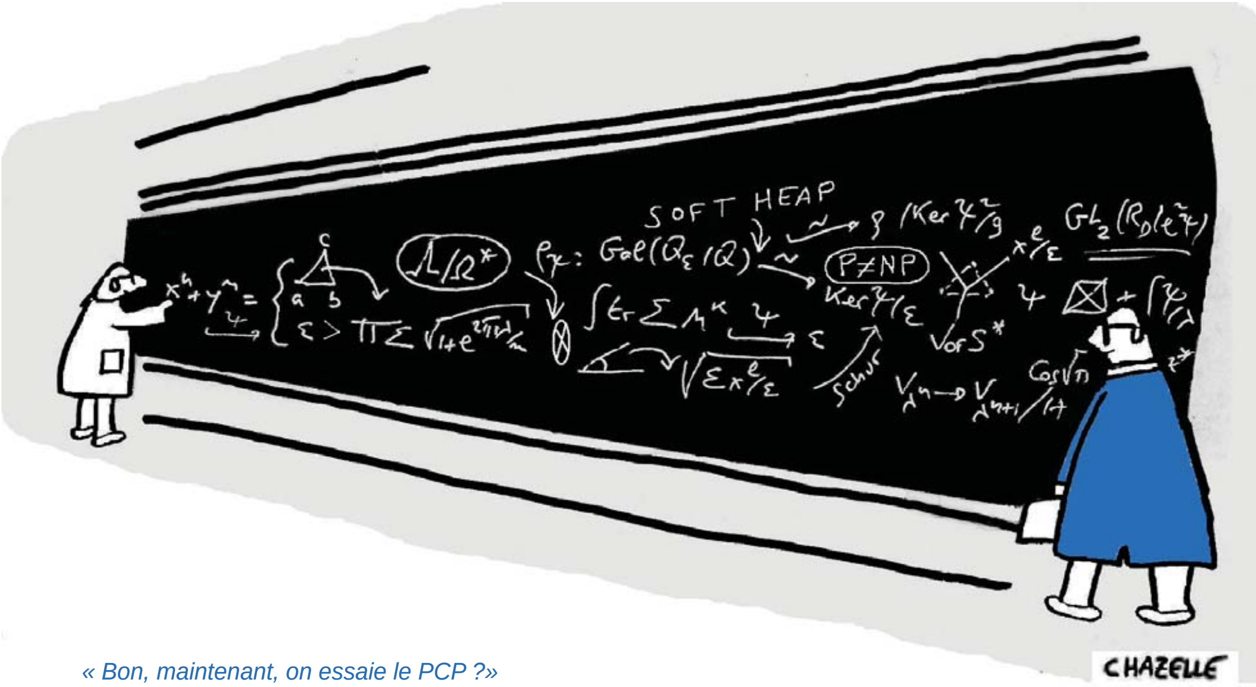
Vérifier une preuve est trivial

S'il est donc probable que la randomisation ne soit pas pertinente à la séparation de P et de NP, il est un autre domaine où l'aléa, en revanche, joue un rôle déterminant : celui des preuves. Tout mathématicien comprend bien ce que constitue une preuve d'un théorème. La même notion s'étend à des questions propres à la cryptographie. Il est facile d'imaginer des situations où l'on désire convaincre un tiers que nous sommes en possession d'un code secret, sans pour autant le révéler explicitement ; une preuve à divulgation nulle se charge de cette tâche. Dans le même esprit, je peux vous convaincre que je sais colorier un graphe avec trois couleurs sans pour autant vous révéler la moindre information sur le coloriage en question. Moyennant l'existence de « fonctions à sens unique » - l'outil fondamental de la cryptographie -, qui veulent que l'antécédent d'une image est difficile à trouver, tout problème dans NP admet une preuve à divulgation nulle.

Une notion encore plus étonnante est celle de « preuve à vérification instantanée » (*Probabilistically Checkable Proof*, PCP). Supposons que j'aie calculé la millionième décimale de π, qui se trouve être 1 : comment vous convaincre en quelques secondes que c'est en effet 1 ? Je peux vous donner accès à un ordinateur qui contient le programme de calcul de π, vous tapez 1 000 000 et, après un temps court de calcul, la réponse s'inscrit sur l'écran : oui, c'est bien 1. C'est rapide, mais cela ne constitue pas une preuve, car vous êtes obligé de me faire confiance sur le bon fonctionnement du programme, de l'ordinateur, du compilateur, etc. À l'inverse, je peux écrire dans un (gros) livre toutes les étapes de calcul du développement en série de π qui m'a amené à cette millionième décimale : elles constituent une preuve de mon affirmation qui ne requiert aucune confiance de votre part, mais il vous sera impossible de vérifier rapidement que je n'ai fait aucune erreur de calcul !

Il n'y aurait donc pas d'alternative : ou vous me faites confiance, et la vérification se passe très vite, ou vous vous méfiez, et votre tâche devient alors longue et rude. En fait, cette dichotomie est illusoire : je peux en effet vous convaincre très rapidement de la véracité de mon calcul sans exiger de vous la moindre confiance, grâce à l'algorithme PCP. Son utilisation me permet de réécrire la longue preuve dans un format spécial dont vous pourrez extraire au hasard une dizaine de caractères : leur examen rapide vous conduira à convenir que j'ai raison, ou à rejeter mon affirmation. Le miracle est que, dans tous les cas de figure, vous n'errerez qu'avec une probabilité infime, par exemple de l'ordre d'une chance sur mille. Bien sûr, plus vous piochez de caractères, plus cette probabilité d'erreur chute, avec une rapidité exponentielle. Ce résultat est général : si je prétends avoir une démonstration de l'hypothèse de Riemann, je peux également vous en convaincre de façon quasi instantanée. Existe-t-il une version non probabiliste de





« Bon, maintenant, on essaie le PCP ?»

l'algorithme PCP ? Non, l'aléa y est indispensable. Sans accès à des *bits* aléatoires, vous êtes condamné à lire ma preuve dans sa totalité.

Ce qui est étonnant dans ce résultat, c'est que ma preuve au format PCP est forcément immune à un nombre considérable d'erreurs : en effet, si vous ne piochez que 10 caractères au hasard, je peux me permettre des milliers d'étapes erronées sans avoir crainte d'être pris en flagrant délit. Encore plus surprenant, si ma preuve est entièrement correcte mais prouve autre chose, par exemple la conjecture de Poincaré, vous vous en apercevrez tout de suite. Formellement, le théorème PCP s'exprime sous la forme NP = PCP (log *n*, 1). Traduction : « *Toute solution d'un problème dans NP (une preuve) peut être écrite en temps polynomial dans sa taille* n *de telle façon qu'elle puisse être vérifiée en consultant un nombre constant de ses* bits*. Le nombre de* bits *aléatoires est au plus logarithmique en* n. »

Mathématiquement, l'algorithme PCP étend le concept de code correcteur d'erreurs aux fonctions : un code traditionnel permet de maintenir l'intégrité syntaxique d'un signal en présence d'erreurs, tandis qu'un code PCP maintient l'intégrité sémantique d'une preuve sujette à erreur. La vérification instantanée, quant à elle, repose sur la notion de codes « localement décodables ». Ce résultat profond a des ramifications épistémologiques évidentes : une tradition philosophique remontant à Platon définit la connaissance comme une croyance vraie justifiée. La justification est nécessaire pour éviter la connaissance par hasard. L'algorithme PCP nous apprend que l'aléa rend la vérification de la justification triviale. Au-delà même des mathématiques et de l'informatique, cela semble être une contribution philosophique majeure !

Lagrange, géomètre sans figure ?

© DR

Frédéric Brechenmacher

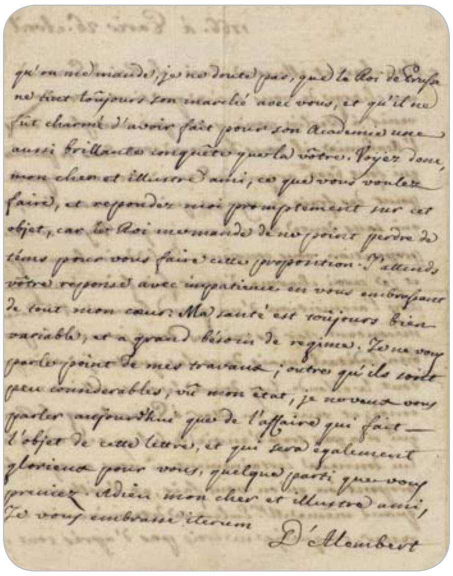
LinX - Département *Humanités et sciences sociales*,
École polytechnique

L'histoire et les travaux de Lagrange incitent à mettre en perspective les relations entre les mathématiques et d'autres branches du savoir et, par là-même, à esquisser quelques traits de la dynamique historique des mathématiques, entre créativité individuelle et pratiques collectives.

Le grand mathématicien Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) est aujourd'hui moins connu que d'autres savants du siècle des Lumières, si ce n'est pour avoir banni de ses écrits toute figure géométrique à une époque qui donnait le nom de *géomètre* à ses mathématiciens. Pourtant, lagrangiens, théorème de Lagrange ou points de Lagrange accompagnent quotidiennement des travaux de mécanique, de géométrie ou d'algèbre.

Un espace européen des sciences

Turin, Berlin, Paris, etc. Ces lieux habités par Lagrange sont comme un écho aux espoirs placés aujourd'hui dans la construction européenne. Mais, pas plus au XVIIIe siècle qu'aujourd'hui, la créativité d'un savant ne se réduit aux lieux géographiques dans lesquels il l'exerce. Où Lagrange apprend-il les mathématiques ? Au collège de Turin, bien entendu, mais aussi dans les ouvrages des maîtres du calcul différentiel comme Newton ou Halley. À qui, ou avec qui, parle-t-il de mécanique ? À ses élèves de l'École d'artillerie, où il enseigne à partir de l'âge de 19 ans, mais surtout avec d'autres savants disséminés à travers l'Europe.

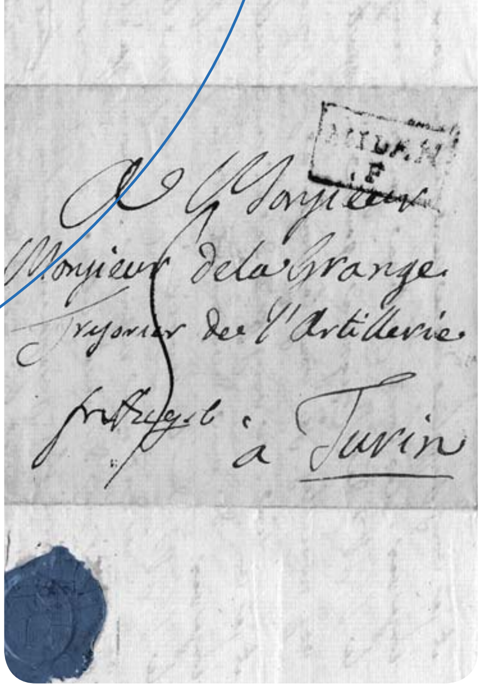

qu'on me demande, je ne doute pas, que le Roi de Prusse ne fasse toujours son marché avec vous, et qu'il ne fût charmé d'avoir fait pour son Academie une aussi brillante conquête que la vôtre. Voyez donc, mon cher et illustre ami, ce que vous voulez faire, et repondez moi promptement sur cet objet, car le Roi me mande de ne point perdre de tems pour vous faire cette proposition. J'attends vôtre reponse avec impatience en vous embrassant de tout mon cœur. Ma santé est toujours bien variable, et a grand besoin de regime. Je ne vous parle point de mes travaux ; outre qu'ils sont peu considerables, vû mon état, je ne veux vous parler aujourd'hui que de l'affaire qui fait l'objet de cette lettre, et qui sera également glorieuse pour vous, quelque parti que vous preniez. Adieu mon cher et illustre ami, je vous embrasse iterum

D'Alembert

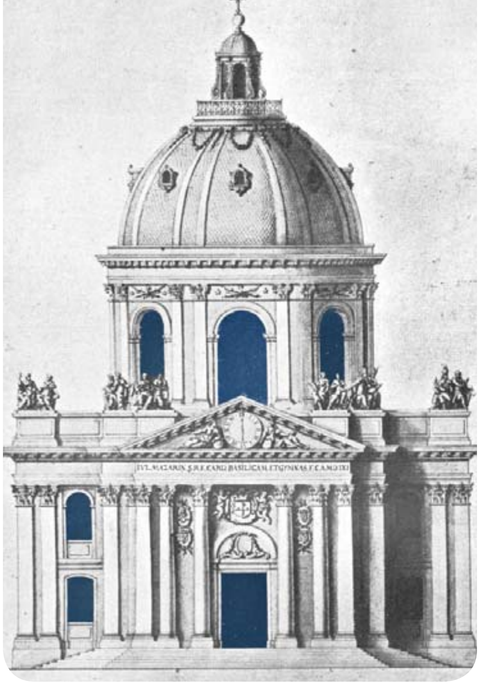
Lettre de d'Alembert à Lagrange (26 avril 1766)

$I + V = H$

© Georgios Kollidas - Fotolia



© Collections École polytechnique - Palaiseau



© Collections École polytechnique - Palaiseau

Au XVIIIe siècle, problèmes, conjectures et démonstrations courent les postes européennes. Ces réseaux épistolaires ont un impact sur l'espace géographique qu'expérimentent les savants. Ainsi, le premier voyage à Paris de Lagrange est surtout marqué par sa rencontre avec Jean le Rond d'Alembert, qui inaugurera vingt ans de correspondance scientifique et d'amitié épistolaire. Tandis que d'Alembert est un représentant de l'universalité des Lumières, Lagrange fait davantage figure de savant spécialisé, dont l'emploi du temps ne laisse que peu de place à la culture des arts ou aux distractions mondaines.

La percée de l'analyse mathématique

La *République des lettres* constitue également un espace dans lequel des pratiques mathématiques spécifiques se développent. Considérons le problème des cordes vibrantes, grand sujet d'échanges épistolaires : la mathématisation de ce problème a été au cœur de nombreuses controverses dans le premier tiers du XVIIIe siècle, notamment avec Euler, d'Alembert et Daniel Bernoulli. Le premier a traité du battement du pendule, que le second a généralisé à un système

M comme mathématicien

La présence d'une écriture symbolique au sein d'un texte est souvent perçue comme la signature d'un raisonnement mathématique. De telles écritures sont pourtant relativement récentes au regard de l'histoire des mathématiques, et leur usage présente des dimensions culturelles qui évoluent au cours du temps. L comme *lagrangien* et H comme *hamiltonien* sont deux opérateurs célèbres ; si on ne peut être surpris de reconnaître le premier dans les travaux de Lagrange, on le sera peut-être davantage d'y trouver aussi le second, alors qu'Hamilton n'est encore qu'un enfant ! Lagrange associait en fait aux travaux de Huygens l'approche que l'on qualifie aujourd'hui d'*hamiltonienne* : H comme *huygensien* ? L'attribution de noms propres à des objets ou résultats scientifiques était peu courante au temps de Lagrange : ainsi, le terme *hamiltonien* n'émergera qu'à la fin du XIXe siècle, à la même époque, d'ailleurs, que la dénomination *théorème de Pythagore*.

de deux corps, problème que le troisième croyait hors de portée de l'analyse mathématique. Lagrange pousse la généralisation à l'étude, en fonction du temps t, des petites oscillations $\zeta(t)$ d'une corde fixée à l'une de ses extrémités, et lestée d'un nombre n quelconque de corps. Par une approximation linéaire, il réduit le problème à la considération de n équations différentielles linéaires à coefficients $A_{i,j}$ constants :

$$
(1)\begin{cases}
\dfrac{d^2\xi_1}{dt} = A_{11}\xi_1 + A_{12}\xi_2 + \dots + A_{1n}\xi_n \\
\dfrac{d^2\xi_2}{dt} = A_{21}\xi_1 + A_{22}\xi_2 + \dots + A_{2n}\xi_n \\
\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\
\dfrac{d^2\xi_n}{dt} = A_{n1}\xi_1 + A_{n2}\xi_1 + \dots + A_{nn}\xi_n
\end{cases}
$$

La créativité mise en œuvre par Lagrange pour intégrer ce système témoigne d'une articulation étroite entre des interprétations algébriques et mécaniques. Lagrange mathématise en effet l'observation physique selon laquelle les oscillations d'une corde lestée de n masses se composent d'oscillations de n pendules indépendants : il décompose ainsi le système (1) en n équations différentielles correspondant chacune à une oscillation propre $\xi'(t) = Ae^{\sqrt{\alpha}\, t} + Be^{-\sqrt{\alpha}\, t}$, paramétrée par la racine α d'une équation algébrique de degré n. La solution du problème mécanique se réduit ainsi à une expression analytique explicite, c'est-à-dire à une formule.

Bien que leurs nombreux échanges épistolaires soient émaillés de désaccords et de controverses, Lagrange partage avec ses correspondants une confiance en la puissance des expressions analytiques pour mathématiser une grande diversité de problèmes, de la mécanique des fluides à la propagation du son - une confiance dans l'analyse mathématique loin d'être universellement partagée au XVIIIe siècle…

L'École normale de l'an III

Laplace

En 1992, Jean Dhombres publie *L'École normale de l'an III - Leçons de mathématiques* (Dunod Éd.). Ces leçons se lisent comme un roman, un roman de science et d'histoire. La Convention avait décidé de mettre les futurs instituteurs en contact avec les plus grands savants. Ainsi, dans le froid de l'hiver 1795, un millier d'élèves se pressaient dans l'amphithéâtre du Muséum où opéraient Lagrange, Laplace et Monge. Numération, système métrique, équations, géométrie, probabilités furent l'objet d'excellentes leçons et de débats entre élèves et professeurs. Les débats ont été sténographiés, on voit vivre l'amphithéâtre. Parmi les élèves qui prirent la parole, se trouvait Joseph Fourier. **Jean-Pierre Kahane**

Les points de Lagrange

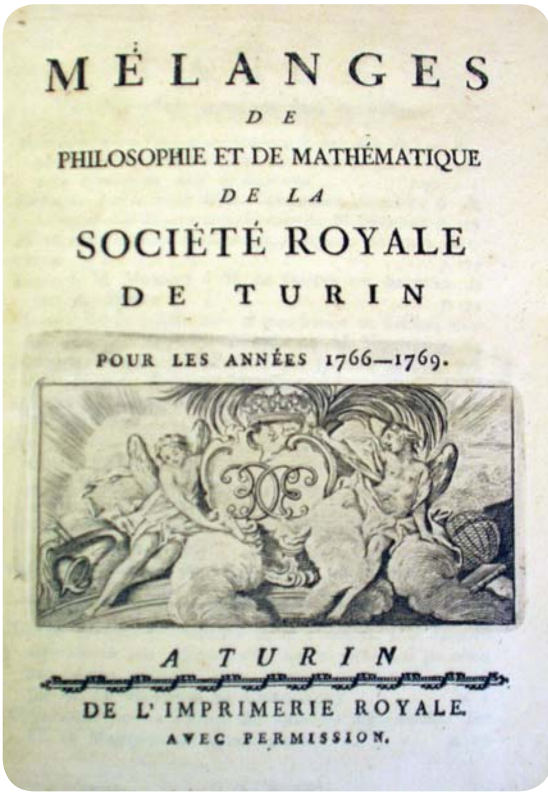
Les travaux de Lagrange sur la dynamique céleste ont donné lieu à l'appellation *points de Lagrange* conférée à des points d'équilibre où les forces gravitationnelles et centrifuges s'annihilent pour un système à trois corps, dans un repère tournant, dans lequel le troisième corps a une masse négligeable (comme un engin spatial par rapport à la Terre et au Soleil). Les propriétés dynamiques de ces points en font des emplacements privilégiés pour les satellites astronomiques. Le satellite d'observation astronométrique Gaia sera ainsi mis en place au point L2 du système Soleil-Terre, un point d'équilibre instable nécessitant une stabilisation à l'aide de la théorie du contrôle.

La contribution des académies

Si les réseaux de la *République des lettres* résonnent avec notre Internet actuel, les correspondants de Lagrange ne sont pas disséminés au hasard des chemins : ils sont attachés à des lieux de sciences très particuliers, les académies. Lagrange lui-même participe à la fondation de ce qui deviendra l'Académie de Turin, avant que le roi de Prusse l'appelle à l'Académie de Berlin, puis le roi de France à celle de Paris.

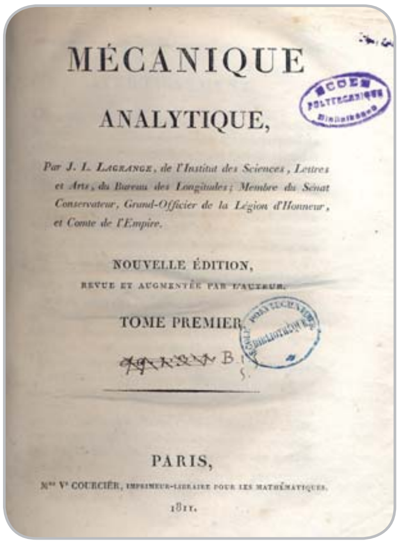
Interfaces entre grandes villes européennes et nœuds de réseaux épistolaires, les académies ont joué un rôle important dans l'émergence de la presse scientifique. La frontière entre lettre et article est en effet poreuse au XVIII^{e} siècle : de nombreuses missives sont imprimées dans des journaux académiques tels que les *Miscellanea Taurinensia*, que Lagrange contribue à fonder et dans lequel il publie sa première étude des petites oscillations en 1766.

Plus généralement, les académies jouent, sous l'Ancien régime, un rôle central dans les interactions entre sciences, techniques et société. Elles accordent des salaires permettant à leurs pensionnaires de se consacrer à temps plein à la science, mais elles sont aussi étroitement liées au pouvoir politique. À Berlin, Frédéric II de Prusse se veut ainsi le « plus grand roi d'Europe » en accueillant le « plus grand mathématicien d'Europe ». L'instauration du système des « concours » stimule l'intérêt des scientifiques pour le bien public en mettant à prix des problèmes aussi bien pratiques que plus théoriques dont certains, notamment en mécanique céleste, sont des enjeux de prestige.


MÉLANGES
DE
PHILOSOPHIE ET DE MATHÉMATIQUE
DE LA
SOCIÉTÉ ROYALE
DE TURIN
POUR LES ANNÉES 1766–1769.
A TURIN
DE L'IMPRIMERIE ROYALE.
AVEC PERMISSION.

Les concours de l'Académie de Paris amènent ainsi Lagrange à étudier les inégalités séculaires, de petites oscillations des planètes qui s'opposent au calcul des éphémérides à longue échéance et peuvent produire des modifications importantes des orbites, menaçant ainsi la stabilité du système solaire. Lagrange transfère alors à la mécanique céleste son analyse des vibrations d'une corde. Mathématiser un ensemble varié de problèmes par une même expression analytique est une pratique partagée par les géomètres des académies, et de nombreux procédés mathématiques circulent ainsi d'une branche du savoir à une autre au gré des concours. Mais la mathématisation des inégalités séculaires témoigne aussi d'une spécificité de Lagrange : la combinaison d'un idéal de simplicité dans l'expression analytique cherchée et d'un idéal de généralité dans l'étude de n corps.

Un nouveau problème en découle : la nature mécanique des oscillations - et par là la stabilité du système solaire - dépend d'une équation algébrique de degré n qui ne peut être résolue explicitement si $n \geq 5$. Longtemps dénommée *équation séculaire* en référence au travaux de Lagrange et à leur poursuite par Laplace, cette équation est aujourd'hui appelée *équation caractéristique*. L'étude de la nature de ses racines a joué un rôle essentiel dans l'émergence de concepts clés de l'algèbre linéaire, discipline qui irrigue aujourd'hui des branches très variées de la recherche scientifique. Le problème des petites oscillations occupe aussi une place de choix dans la *Mécanique analytique* de 1788. Contrairement à Newton, qui était fidèle à la géométrie d'Euclide, Lagrange est connu pour avoir banni de son grand œuvre toute figure au profit d'expressions analytiques qu'Hamilton qualifiera de « *poème scientifique écrit par le Shakespeare des mathématiques* ». Nous avons vu cependant que, pour Lagrange, ces expressions ne se réduisent pas à une abstraction algébrique, des interprétations mécaniques prenant également place au cœur de sa créativité. Le formalisme de l'écriture permettra toutefois aux lecteurs de la *Mécanique analytique* d'associer librement de nouvelles interprétations aux formules contenues dans cet ouvrage.



Tout au long du XIX^e siècle, l'*équation séculaire* a ainsi servi de modèle à des problèmes issus de champs scientifiques variés, des vibrations d'une membrane lors de la propagation du son à la mécanique des fluides, en passant par les axes propres de rotation d'un solide, les théories de l'élasticité ou de la lumière. Mais cette équation a aussi inspiré des résultats proprement mathématiques comme le théorème de Sturm, les axes principaux des coniques, la théorie des résidus en analyse complexe, la loi d'inertie des formes quadratiques ou, encore, la théorie des matrices. L'équation séculaire a ainsi supporté le transfert de procédés opératoires entre différents domaines, une circulation qui a enrichi ces procédés de significations nouvelles avant qu'Henri Poincaré les investisse à nouveau en mécanique céleste, à la fin du XIX^e siècle...

Pour en savoir plus

- Dossier Lagrange sur Image des mathématiques CNRS : images.math.cnrs.fr/+-Joseph-Louis-Lagrange-+.html

Et la liberté de chercher ?

© DR

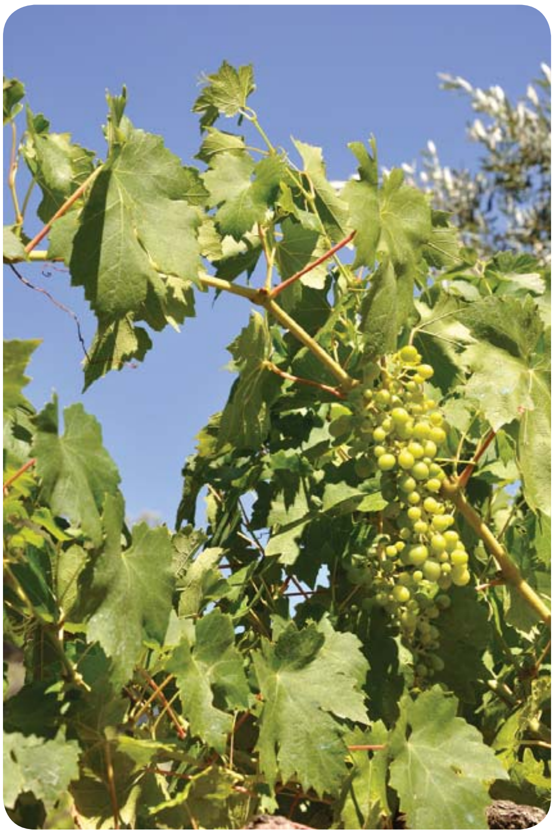
Bernard Meunier

Vice-président de l'Académie des sciences

Mi-mai, la cour d'appel de Colmar prononçait la relaxe des faucheurs d'un essai au champ d'une vigne génétiquement modifiée, au motif de son illégalité. Les organismes de recherche comme les universités, soutenus par le secrétaire d'État en charge de l'enseignement et de la recherche, se sont inquiétés de ce jugement, et le parquet de Colmar s'est pourvu en cassation. Pour *La Lettre*, Bernard Meunier, vice-président de l'Académie des sciences, revient sur la nécessité de préserver la liberté de recherche des scientifiques.

En mars dernier, l'Académie des sciences avait déjà demandé de libérer la recherche sur les OGM…

Effectivement, elle a publié un avis, commun avec les académies d'agriculture et des technologies, qui demandait de restaurer la liberté de la recherche sur les plantes génétiquement modifiées. Cet avis s'appuyait sur un important travail de réflexion commune et sur la tenue d'un colloque sur les PGM en novembre 2013. Il faut rappeler que les modifications génétiques de plantes font appel à l'utilisation d'un arsenal scientifique et technologique qui est à la disposition de la communauté scientifique. Savoir si des sociétés privées utilisent aussi cet arsenal, et à quelle fin, est une autre chose, qui doit être gérée par le législateur ou les représentants du peuple français. Mais pour les chercheurs, la liberté doit être totale : on ne peut pas accepter de restreindre l'utilisation de la génétique à certains champs de recherche, en l'interdisant, par exemple, dans le domaine de l'agronomie. Historiquement, d'ailleurs, tous les pays qui ont bridé la recherche dans certaines thématiques ont essuyé des dégâts collatéraux : les scientifiques ne veulent plus prendre de risque, et partent travailler ailleurs, ou se détournent de la recherche. Interdire l'expérimentation dans certains domaines, c'est vouer la recherche à sa fin. Tout le monde se souvient du contrôle idéologique de la recherche en biologie en ex-URSS, qui a entraîné la destruction



© seb hovaguimian - Fotolia

d'un pan entier de la recherche soviétique, celui de la génétique ! Bien entendu, on ne peut pas faire n'importe quoi : la recherche sur l'homme, par exemple, est parfaitement encadrée par des comités d'éthique qui sont, d'ailleurs, mis en place par la communauté scientifique elle-même.

Mais alors, que vous inspire le jugement de la cour d'appel de Colmar ?

Je le trouve surprenant. On a là un organisme de recherche publique, l'Institut national de la recherche agronomique, qui lance un essai en se conformant à la législation en cours : il ne s'agit tout de même pas d'un travail clandestin ! L'idée est de résoudre un problème scientifique, lutter contre ce fameux court-noué de la vigne qu'on ne sait pas traiter aujourd'hui. Quant à savoir si l'on autoriserait l'utilisation d'une vigne génétiquement modifiée pour résister à cette maladie, cela relève du débat public, et intervient bien après l'essai. Voici donc une étude qui débute dans un cadre législatif précis et soudain, en appel, une interprétation de la loi conclut à son illégalité. Une re-lecture du cadre législatif et réglementaire ne peut s'appliquer à une expérience menée dans le cadre juridique existant lors des demandes d'autorisation initiales. Pour la communauté scientifique, risquer une interprétation rétrospective de la loi entraîne automatiquement son autocensure, ce qui n'est jamais un bon thermomètre pour l'état des libertés dans un pays.

Il y a aussi la question de la recherche sur les gaz de schiste, sur laquelle l'Académie s'est récemment prononcée...

Oui, et nous avons été très clairs : il faut que la France connaisse l'étendue de ses réserves en gaz de schiste. Peu importe qui se chargera de cette étude - organismes d'État ou sociétés mixtes privé/public -, il faut répondre de manière scientifique et sérieuse. On a besoin de cet état des lieux, car notre pays doit disposer de ressources diversifiées pour faire face

© sergbob - Fotolia

à la demande en énergie d'une société qui est gourmande, et au sein de laquelle personne n'est réellement prêt à restreindre sa consommation quotidienne ! Or pour diversifier, il faut inventorier. Cela a été fait pour l'hydraulique, et aujourd'hui plus de 95 % des possibilités identifiées sont exploitées. Une évaluation préalable avait aussi été effectuée à Lacq, il y a un peu plus de soixante ans. Un même inventaire doit donc être réalisé pour l'éolien et l'hydrolien, et naturellement pour les gaz de schiste.

En dehors même de ces cas particuliers, vous êtes très attaché à la liberté des chercheurs...

© kasto - Fotolia

Oui, elle est fondamentale pour faire progresser les connaissances. Et cette liberté passe par l'attribution de crédits à des recherches expérimentales qui s'exercent aussi hors des sentiers battus. Si tous les financements dépendent de comités qui ont tendance à reproduire l'existant, il y a peu de chance qu'une idée originale, voire iconoclaste, bénéficie d'un soutien. Or favoriser la duplication de l'existant n'est pas ce qui peut arriver de mieux à la recherche fondamentale. Bien sûr, les travaux originaux financés doivent être suivis et évalués : la communauté scientifique sait faire le tri, et les bonnes idées ne restent jamais dans un tiroir, elles finissent toujours par émerger. Il faut seulement financer la période d'induction, au cours de laquelle des expériences sont initiées pour tester les idées originales, et les premiers résultats publiés, reproduits par d'autres équipes et, ainsi, validés par la communauté scientifique. À part les mathématiques pures, qui sont peu consommatrices de crédits, et les grands instruments, qui sont financés par des programmes internationaux, c'est toute la recherche expérimentale - biologie, chimie, physique expérimentale, etc. - qui doit bénéficier de ce type de soutien. Nous avons, à l'Académie, un exemple très parlant de l'intérêt de cette démarche, en la personne du chimiste Yves Chauvin. L'Institut français du pétrole lui a offert, durant quarante ans, une grande liberté de recherche. Cela lui a permis à la fois de remplir les objectifs que lui fixait l'Institut - il est notamment à l'origine du procédé de catalyse homogène Dimersol, que l'IFP a largement commercialisé à l'international -, et de mener, en parallèle,

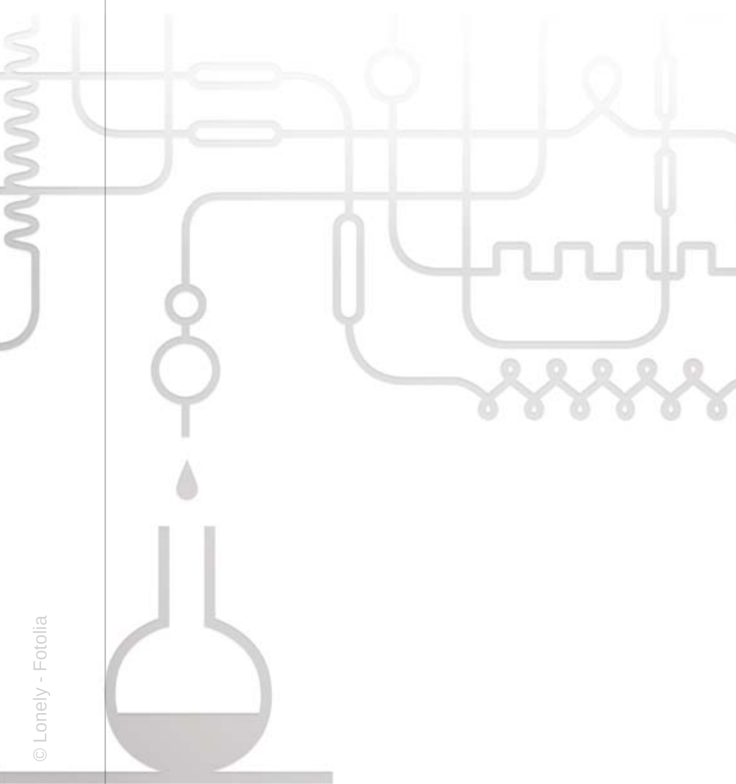
© .shock - Fotolia

des travaux sur la métathèse des oléfines, qui n'intéressaient alors pas grand monde... mais qui lui ont valu le prix Nobel de chimie en 2005 !

Mais quelle part attribuer aux programmes blancs dans le financement de la recherche ?

Je suis pour une répartition équilibrée - 50/50 - entre programmes thématiques et programmes blancs, et ce dans tous les organismes de recherche et les universités. Aujourd'hui, les programmes blancs sont noyés dans des appels à projets plutôt thématiques : il faut donc des programmes « vraiment » blancs. L'ERC (*European Research Council*) le fait très bien au niveau européen : les projets émanant directement de *Principal Investigators*, seniors ou juniors, sont évalués en dehors de tout contexte de programmation de la recherche. L'ERC sait visiblement, y compris sur des thèmes qui ne sont pas « à la mode », réunir des comités dont la capacité d'analyse permet de déceler des projets innovants, et pas seulement de défendre leur communauté scientifique ou leur entourage propre. Il n'y a pas de raison que nous ne le fassions pas - ou plus - en France. D'autant que ces crédits de soutien à l'initiation de projets, sorte de « fonds d'amorçage nouvelle recherche », sont une condition indispensable pour laisser nos chercheurs poussins grandir !

Propos recueillis par Emmanuelle Chollet



Pour en savoir plus

- *Les académies demandent de restaurer la liberté de la recherche sur les plantes génétiquement modifiées.* Avis interacadémique (Agriculture, Sciences et Technologies), mars 2014
- *Éléments pour éclairer le débat sur les gaz de schiste*. Avis de l'Académie des sciences, novembre 2013
- *« Cri d'alarme » de l'Académie des sciences sur le financement de la recherche*. Communication de l'Académie des sciences, décembre 2013

Dix-sept nouveaux membres à l'Académie des sciences

Pour maintenir son effectif de référence à 250 membres, l'Académie procède une année sur deux à l'élection de nouveaux membres. Au cours d'un processus qui dure près d'un an et implique plusieurs étapes strictement encadrées par les statuts de l'Académie, la compagnie tout entière élit les scientifiques qu'elle juge dignes de la rejoindre. Les résultats de cette élection sont ensuite soumis à l'approbation du président de la République, protecteur de l'Académie. Le 17 juin 2014, dix-sept scientifiques élus en décembre 2013, dont un peu plus de la moitié ont, conformément aux récents statuts de l'Académie, moins de 55 ans, sont solennellement reçus sous la coupole de l'Institut de France. En voici une courte présentation.

Section de biologie moléculaire et cellulaire, génomique

© P. Lombardi - Institut Curie

Geneviève Almouzni

Geneviève Almouzni étudie l'organisation du patrimoine génétique dans le noyau de la cellule et sa dynamique au cours du cycle cellulaire et du développement. Elle est l'auteur de découvertes fondamentales en épigénétique, qui ont des applications en médecine, notamment en cancérologie.

Section de chimie

B. Eymann - Académie des sciences

Azzedine Bousseksou

Spécialiste du magnétisme et de la commutation moléculaires, Azzedine Bousseksou est l'auteur de contributions majeures dans le domaine de la bistabilité moléculaire, au niveau fondamental et *via* l'élaboration et l'intégration, dans de nouveaux dispositifs, de matériaux bistables innovants.

Section des sciences mécaniques et informatiques

© DR

Yves Couder

Yves Couder a joué un rôle majeur dans l'essor de la physique non linéaire en France. Par son inventivité de physicien expérimentateur, il a éclairé une grande variété de phénomènes hors d'équilibre. Ses travaux récents concernent les effets de mémoire dans l'auto-organisation.

Section de biologie moléculaire et cellulaire, génomique

© DR

Antoine Danchin

Réputé pour ses travaux en génomique bactérienne, Antoine Danchin est notamment l'initiateur du premier séquençage complet d'une bactérie, qui contribuera à élucider l'organisation et la régulation de l'expression des génomes.

Section de biologie intégrative

© DR

Michel Delseny

Spécialiste de la génomique des plantes, Michel Delseny a contribué à l'étude des gènes exprimés au cours de la formation et de la germination des graines. Il a participé au séquençage du génome d'*Arabidopsis* et révélé son organisation dupliquée, notion étendue ensuite à d'autres génomes.

Section de chimie

© DR

Odile Eisenstein

Odile Eisenstein est spécialiste de l'étude quantique de la réactivité des systèmes moléculaires organométalliques. Sa recherche permet de déterminer les facteurs contrôlant l'efficacité et la sélectivité des réactions, avec à terme une perspective : rendre la chimie plus efficace et plus propre.

Section de physique

© DR

Pierre Fayet

Les travaux de Pierre Fayet concernent, en physique des particules et interactions fondamentales, la recherche de nouvelles symétries des lois physiques, de nouvelles particules et de nouvelles forces ou interactions, et la nature de la matière sombre de l'univers.

Section de physique

© DR

Thierry Giamarchi

Théoricien de la matière condensée, Thierry Giamarchi étudie l'effet du désordre et des interactions sur les systèmes quantiques et classiques, particulièrement à basses dimensions, ce qui a conduit à la découverte de phases peu ordonnées de la matière : le verre de Bose et le verre de Bragg.

Section de biologie moléculaire et cellulaire, génomique

B. Eymann - Académie des sciences

Brigitte Kieffer

Brigitte Kieffer est neurobiologiste. Elle a isolé le premier gène d'un récepteur aux opiacés et développé des approches génétiques pour comprendre le rôle de ces récepteurs dans le cerveau. Son travail a des implications dans les domaines de la douleur, des addictions et des troubles de l'humeur.

© DR

Section des sciences de l'univers

Anne-Marie Lagrange

Anne-Marie Lagrange est chercheur en astrophysique. Spécialiste des systèmes planétaires, elle étudie leur formation, leur structuration et leur évolution au cours du temps. En 2004, son équipe réalise la premiere image d'une planète extrasolaire. En 2008, elle signe une image directe d'une planète autour de l'étoile *Beta Pictoris*.

© DR

Section de biologie intégrative

Sandra Lavorel

Sandra Lavorel est écologue, spécialiste des questions de biodiversité et de changements globaux. Ses travaux ont contribué au développement et à l'application du concept de traits fonctionnels, qui permet de tester, à l'échelle globale, des mécanismes de nature générale entre écosystèmes pourtant très différents.

© CNRS Photothèque

Section de mathématique

Jean-François Le Gall

Jean-François Le Gall est spécialiste de la théorie des probabilités. Ses travaux visent à mieux comprendre les propriétés des processus aléatoires, dont le célèbre mouvement brownien, et celles d'autres objets mathématiques choisis au hasard, notamment les graphes aléatoires.

© DR

Section de biologie humaine et sciences médicales

Patrick Mehlen

Biologiste cellulaire et chercheur en cancérologie, Patrick Mehlen étudie depuis plus de vingt ans la mort cellulaire. Il est internationalement reconnu pour sa découverte des récepteurs « à dépendance », qui ouvrent de nouvelles voies thérapeutiques dans la lutte contre le cancer.

© DR

Section des sciences de l'univers

Barbara Romanowicz

Barbara Romanowicz est géophysicienne. Elle utilise les outils de la sismologie pour comprendre les processus dynamiques internes à notre planète, et notamment l'origine de la tectonique des plaques. Ses travaux ont en particulier contribué aux progrès de l'imagerie globale de la structure du manteau terrestre.

© S. Ruat - CNRS Photothèque

Section des sciences mécaniques et informatiques

Laure Saint-Raymond

Laure Saint-Raymond s'intéresse à l'étude qualitative d'équations modélisant la dynamique de gaz raréfiés, de plasmas ou de fluides incompressibles. Le cœur de sa recherche ? Obtenir les modèles les plus simples possibles pour décrire ces systèmes complexes.

Section de biologie humaine et sciences médicales

© DR

William Vainchenker

Médecin et hématologiste, William Vainchenker est spécialiste des hématies et des plaquettes sanguines, en situation normale ou pathologique. Son principal apport concerne la caractérisation du système de différenciation des plaquettes et l'application de ces connaissances à de graves maladies du sang.

Section de mathématique

© DR

Cédric Villani

Cédric Villani est spécialiste de l'analyse mathématique appliquée à des problèmes de physique, de probabilité et de géométrie. Il a étudié la relaxation des gaz et des plasmas, et développé une théorie de la courbure fondée sur le transport optimal.

Pour en savoir plus : *Les académiciens élus en 2013*

à télécharger sur www.academie-sciences.fr

INSTITUT DE FRANCE
Académie des sciences

Directrice de la publication
Catherine Bréchignac

Directoire
Jean-François Bach
Catherine Bréchignac
Alain-Jacques Valleron

Comité éditorial
Jean-François Bach
Catherine Bréchignac
Vincent Courtillot
Bernard Dujon
Christian Dumas
Marc Fontecave
Uriel Frisch
Étienne Ghys
Denis Jérôme
Michel Le Moal
Bernard Meunier
Daniel Ricquier
Didier Roux
Christophe Soulé
Philippe Taquet
Alain-Jacques Valleron

Rédactrice en chef
Emmanuelle Chollet

Direction artistique
Natacha Oliveira

Impression
Boudard Imprimeur

ISSN 2102-5398

Académie des sciences
23 quai de Conti - 75006 Paris
Tél.: 01 44 41 44 60
www.academie-sciences.fr