Méthode scientifique / Pratiques scientifiques et épistémologie — Mars 2017

Utopie et mathématiques

par Jean-Pierre Kahane, membre de l'Académie des sciences,
professeur émérite à l'université Paris-Sud Orsay

Exposé dans la cadre du colloque « Penser l'utopie », rencontre organisée par l'Académie des inscriptions et belles-lettres et la Fondation internationale Balzan, le 20 janvier 2017.

Il est clair quand on y réfléchit qu'il y a un lien entre mathématiques et utopie. Mais je n'y avais jamais réfléchi avant que Michel Zink me suggère ce thème pour intervenir ici. Voici donc quelques éléments de réflexion, encore mal dégrossis.

Je commencerai par Alan Turing et je finirai par Platon.

Alan Turing est le créateur de la machine de Turing, et la machine de Turing est partout dans le monde actuel, parce que c'est le modèle des ordinateurs. Il est donc surprenant de la considérer comme une utopie. Cependant, au moment de sa création, c'en est une : elle n'existe nulle part, c'est une théorie mathématique très belle, qui rend compte de la pratique proprement humaine du calcul. Nous savons tous ajouter, soustraire, multiplier, diviser, et faire une multitude d'opérations
de calcul ; il semble impossible a priori de réduire cette multitude à quelques opérations très simples. Mais c'est ce que fait Turing, avec une machine idéale, comportant un ruban qui peut avancer d'un cran, et sur lequel, à chaque étape, on peut écrire 0 ou 1 ; tous les calculs peuvent s'exprimer par des règles d'écriture. Il existe même une machine de Turing universelle, qui rend compte de toutes les opérations de toutes les machines de Turing possibles. Elle est parfaitement définie mathématiquement, et c'est, en 1936, un objet mathématique tout à fait nouveau. Il n'existe nulle part, c'est littéralement, une utopie.

Comme toutes les bonnes utopies, elle repose sur une exploration du monde réel, en l'occurrence la pratique ancestrale et sans cesse élargie du calcul par les êtres humains. Elle s'évade du monde réel par un pur travail de la pensée. Mais, comme les meilleures des utopies, ce n'est pas vraiment une évasion, c'est plutôt une sublimation. Et si la sublimation, c'est-à -dire, l'abstraction, est réussie, elle est capable d'alimenter le monde réel de réalisations nouvelles et imprévues.

Ce que je viens de dire de Turing et des mathématiques se transcrit aisément à d'autres grands créateurs dans d'autres sciences. Mais, pour les mathématiques, il s'agit d'un aspect général de cette science : elle élabore et étudie des objets qui ne se trouvent nulle part dans le monde réel. Sur la nature et l'origine de ces objets les platoniciens ont une réponse : ils forment une réalité extérieure à ce que nous appelons le monde réel. Je me réfèrerai maintenant aux mathématiques les plus élémentaires et les plus classiques, et à Platon lui-même, pour tenter de vous montrer que le monde des objets mathématiques, qui est au sens propre utopique, est puissamment relié, en amont et en aval, au monde réel de tous les jours. Mais, comme dans le cas de la machine de Turing, il aura exigé un travail créateur, une abstraction, qui me semble être la source des mathématiques à travers les âges.

Nous savons tous ce qu'est une sphère. Les mathématiciens la définissent comme l'ensemble des points de l'espace qui se trouvent à une distance donnée d'un point donné. Ce point s'appelle le centre de la sphère. Ainsi, la sphère est une surface ; on peut penser à un ballon ou à une bulle de savon. Il y a une multitude d'objets sphériques, et nous savons bien les reconnaître et les utiliser. Mais qui a jamais vu le centre d'un objet sphérique ? La définition de la sphère est bonne parce qu'elle est simple et qu'elle permet, par un enchaînement d'observations et de preuves, de voir et de démontrer toutes les propriétés, de courbure en particulier, qui nous font reconnaître qu'un objet est sphérique. Mais la sphère mathématique est une utopie.

*   *
*

J'en viens à Platon.

Au temps de Platon, les artisans du cuir fabriquaient des ballons en cousant douze pièces pentagonales. Encore récemment, les ballons de football étaient construits à l'aide de douze pentagones. Dans la chimie fantastique du Timée, les polyèdres réguliers sont associés aux éléments, le tétraèdre au feu, le cube à la terre, l'octaèdre à l'air et l'icosaèdre à l'eau. Et qu'en est-il du dodécaèdre, qui est formé de douze pentagones ? La réponse du Timée est intéressante : c'est sur son modèle que le créateur a construit l'univers. Ainsi le créateur a la même pratique en face du dodécaèdre que les artisans du cuir.

On peut sourire, mais l'idée de Platon est profonde. Les polyèdres réguliers ont des symétries. Avec l'icosaèdre mais de façon plus visible, le dodécaèdre a le plus de symétries, le groupe des déplacements qui le laissent invariant est le plus grand. Et pour la sphère, le groupe des déplacements qui la laissent invariante est le plus grand possible. La formule de Platon, omoïotaton, est bien choisie : c'est la figure la plus semblable à elle-même. Ainsi c'est naturel d'associer le dodécaèdre à la sphère.

J'ai qualifié la chimie de Timée, c'est-à-dire la chimie de Platon, de « fantastique ». Elle est utopique, clairement. Est-elle si étrangère qu'on le pense à la réalité ? Je crois, au contraire, que c'est le premier modèle atomique qui se rattache dans sa conception et son fonctionnement à la réalité atomique que nous connaissons aujourd'hui.
Cela mérite, si vous le voulez bien, quelques mots d'explication.

Les polyèdres qui représentent les éléments ne sont pas des solides, mais des surfaces. Les noms de tétraèdre, octaèdre, icosaèdre dodécaèdre expriment le nombre des faces : 4 , 8 , 20, 12. Le cube a 6 faces, qui sont des carrés ; les faces des tétraèdres, octaèdres et icosaèdres sont des triangles équilatéraux. Mais ici apparaît une idée curieuse et profonde :chaque face est une réunion de triangles rectangles, et ces triangles peuvent se ré-agencer ou au contraire se fractionner pour former d'autres polyèdres, plus grands ou plus petits, mais de même forme. Ainsi les faces du cube sont des carrés striés par leurs diagonales, et le regroupement des triangles rectangles qui forment les faces permet de construire un grand cube à partir de deux petits cubes. Les faces des triangles équilatéraux sont striées par les hauteurs, qui divisent le triangle équilatéral en 6 petits triangles rectangles, et le regroupement des ces triangles permet d'obtenir un grand polyèdre à partir de 3 petits polyèdres de même forme (tétraèdre, octaèdre ou icosaèdre). Ainsi chaque élément, feu, terre, air ou eau, est représenté par une classe de polyèdres de même allure mais de dimensions différentes, et dans chaque classe les surfaces sont proportionnelles à des puissances de deux pour le cube et à des puissances de trois pour les autres polyèdres. Pourquoi dis-je que c'est une idée profonde ? Parce qu'aujourd'hui nous pouvons, avec de la bonne volonté, y voir l'apparition de la notion de groupe de symétries qui est fondamentale en physique.

Le réaménagement des polyèdres est la base de la chimie du Timée. Dans toutes les opérations de la chimie, le cube ne se mélange pas aux autres, la terre reste la terre. Mais les autres se prêtent à des transformations. Mon illustration favorite est bien dans l'esprit du Timée, même si elle n'y est pas explicitée. C'est le mélange du feu et de l'eau ; ce mélange fait bouillir l'eau, donc produire de la vapeur d'eau, c'est-à-dire de l'air.
Il est bien vrai qu'avec un tétraèdre et un icosaèdre on peut produire des octaèdres, selon la formule

$$4 + 20 = 3 \times 8,$$

et d'ailleurs avec les trois octaèdres on peut en former un plus grand. Cette chimie est une construction intellectuelle purement utopique, et on peut se dire que c'est une mauvaise utopie puisqu'elle ne mène nulle part. Je voudrais vous convaincre que les polyèdres de Platon sont en prise avec la réalité telle que nous la connaissons aujourd'hui.

J'ai déjà parlé du dodécaèdre et des ballons de football. Disons qu'on peut paver la sphère avec douze pentagones. On peut aussi la paver avec douze pentagones et vingt hexagones ; c'est ce qu'a fait l'architecte Fuller pour la construction de l'immense coupole qu'ont connue les visiteurs de l'exposition universelle de Montréal en 1966 . Ainsi pavée, la sphère porte 60 sommets, et elle est réalisée dans la nature sous la forme du carbone 60, une grosse molécule creuse qui est constituée de 60 atomes de carbone. Les chimistes l'ont appelée la fullerène en hommage à Fuller. Ils savent comment la construire, mais on l'a d 'abord découverte dans le cosmos. Ainsi va la science.

Je résume. Les mathématiciens, dans leur travail, sont amenés à travailler sur les objets mathématiques comme s'ils étaient réels, dans un monde qui s'apparente à l'extérieur de la caverne de Platon. Ils sont donc spontanément platoniciens. C'est vrai de la plupart des mathématiciens, et ils ont donc un lieu pour ce que j'ai appelé l'utopie mathématique, c'est leur monde et le monde de Platon. J'ai tenté de vous montrer l'origine de l'utopie dans notre monde de tous les jours, aussi bien chez Turing que chez Platon lui-même, et la puissance de l'utopie mathématique dans son retour au monde des êtres humains. Comment l'évasion est un facteur de la découverte, les mathématiciens le ressentent au même titre et peut-être plus encore que les astronautes. Le thème de l'utopie est donc une façon de traduire une grande partie de ce qui fait le charme du métier de mathématicien. Merci à tous de m'avoir écouté et merci à Michel Zink de m'avoir proposé ce sujet.