INSTITUT DE FRANCE
Académie des sciences

Méthode scientifique / Libres propos d'académiciens - Mai 2013

Le dilemme du prisonnier revisité et la méthode dialectique

par Evariste Sanchez-Palencia, membre de l'Académie des sciences

Le dilemme du prisonnier est un petit problème de logique que l'on pose sous une forme qui contient une ambiguïté cachée, donnant ainsi lieu à une diversité de problèmes mathématiques élémentaires correspondants à ses diverses interprétations. La comparaison des diverses solutions présente un caractère paradoxal tout à fait intéressant, que l'on extrapole parfois pour tirer des conséquences sur l'utilité de comportements apparentés à l'égoïsme, l'altruisme, la loyauté, la trahison et autres.

Par-delà les traitements classiques de ce type de questions (voir par exemple Delahaye [1993] ou Eber [2006]), nous proposons ici une approche originale, prise de Sanchez-Palencia [2012], qui se décline en trois temps facilement identifiables aux thèse-antithèse-synthèse classiques de la démarche dialectique, permettant ainsi une compréhension complète du problème dépassant les paradoxes de l'approche classique.
Sous sa forme primaire, le dilemme du prisonnier s'énonce :

Dilemme du prisonnier simultané et non répété :

Deux suspects porteurs d'armes sont arrêtés devant une banque et accusés, sans preuves, de tentative de cambriolage. Ils sont placés dans des cellules séparées et le juge leur propose le choix suivant: Si aucun n'avoue la tentative de cambriolage, ils seront condamnés pour port d'armes à 2 ans de prison. Si l'un avoue et pas l'autre, celui qui avoue sera libéré, alors que l'autre sera condamné à la peine prévue par la loi, de 10 ans. Si les deux avouent, ils seront condamnés à 8 ans. Les deux prisonniers savent que le choix est proposé de façon indépendante à tous les deux, mais ils ne peuvent pas communiquer entre eux.
La question est: que vont-ils faire, en admettant que chacun cherche à minimiser sa peine, sans se soucier du sort de l'autre?
La « théorie standard » pour résoudre le problème est la suivante.

Raisonnement standard

Désignons par A et B les deux prisonniers. A raisonne de la façon suivante: au cas où B avouerait, je serais condamné à 8 ou 10 ans suivant que j'avoue ou non, donc j'ai intérêt à avouer; au cas où B n'avouerait pas, je serais condamné à 0 ou 2 ans suivant que j'avoue ou non, donc j'ai également

intérêt à avouer. Par conséquent, A avoue. De son côté B raisonne de façon analogue et avoue. Ils sont condamnés à 8 ans, alors que s'ils avaient choisi tous les deux de ne pas avouer, ils auraient été condamnés à 2 ans seulement.
En termes de logique, le résultat laisse un peu perplexe: Comment se fait-il qu'en cherchant froidement son profit on ne le trouve pas? Pourquoi n'y a-t-il pas un raisonnement qui donne le résultat qui est manifestement meilleur (A et B n'avouent pas et écopent de 2 ans)? Peut-être qu'il existe, et le « raisonnement standard » serait erroné, puisqu'il aboutit à un résultat qui n'est manifestement pas le meilleur.
Pour raisonner autrement, on peut, comme on fait souvent en mathématiques, «supposer le problème résolu»; cela donne :

Premier raisonnement non standard

Je suppose qu'il existe un raisonnement que A peut faire lui permettant de conclure ce qui est plus avantageux pour lui (avouer ou ne pas avouer) sans se soucier de l'autre. Naturellement, le problème étant symétrique, il est clair que B peut aussi faire ce raisonnement, ce qui lui permettra de choisir entre avouer ou ne pas avouer. A et B raisonnent, chacun de son coté, pour faire le choix le plus avantageux sans se soucier du sort de l'autre, et le trouvent. Toujours par symétrie, ce choix est donc le même pour les deux. Donc ils choisissent, soit d'avouer, soit de ne pas avouer. Voilà que le problème est très simplifié, car on a le choix non plus entre quatre possibilités mais entre deux; qui plus est, on peut raisonner sur l'un des deux acteurs, puisque l'autre fait la même chose. Alors c'est trivial: s'ils avouent, ils seront condamnés à 8 ans, s'ils n'avouent pas, à 2 seulement, donc ils n'avouent pas et sont condamnés à 2 ans.
Voilà donc comment il y a un raisonnement autre que le raisonnement standard qui aboutit à un autre résultat, manifestement meilleur. Notez que je ne dis pas «qui aboutit au résultat correct»; nous y reviendrons plus tard (Ce point est très épineux, car au point où nous en sommes, il y a deux raisonnements qui donnent, sans ambiguïté, deux résultats différents; en principe, il doit avoir une erreur quelque part).
Il convient de bien réaliser que le premier raisonnement non standard que nous venons de faire est bel et bien égoïste (le choix de A est dicté par son propre profit, sans se soucier du sort de B) et non pas de coopération: si coopération il y a, elle résulte de l'identité des choix égoïstes de A et B. Cela signifie donc que le raisonnement standard serait faux, ce qui n'est nullement évident. Reprenons le raisonnement standard. On y voit que le choix de A est fait entre deux possibilités pour chacun des choix de B; or, d'après l'énoncé du problème, ils choisissent simultanément (ou, indépendamment, ce qui est équivalent). Ce point est très subtil, mais il a des conséquences graves. En effet (ce point sera repris explicitement plus tard dans l'approche géométrique) la peine de A, par exemple, dépend des choix de A et de B ; pour la minimiser, on doit comparer entre elles toutes les possibilités des choix, or, on a «oublié» la comparaison entre eux des deux cas où A et B font le même choix, qui sont justement ceux qui apparaissent par la suite (dans le premier raisonnement non standard) comme fondamentaux. En raisonnant avec cet oubli, le raisonnement standard donne «A avoue», ainsi d'ailleurs que B. Pourquoi cet oubli ne sautait pas aux yeux? Tout simplement parce que c'est subtil, on s'est laissé entraîner par les mots sans bien réaliser ce qu'ils représentent. Au point où on en est, on voit que le raisonnement standard est faux et égoïste (en bon français: bête et méchant) alors que le premier raisonnement non standard est égoïste et lucide (malin).

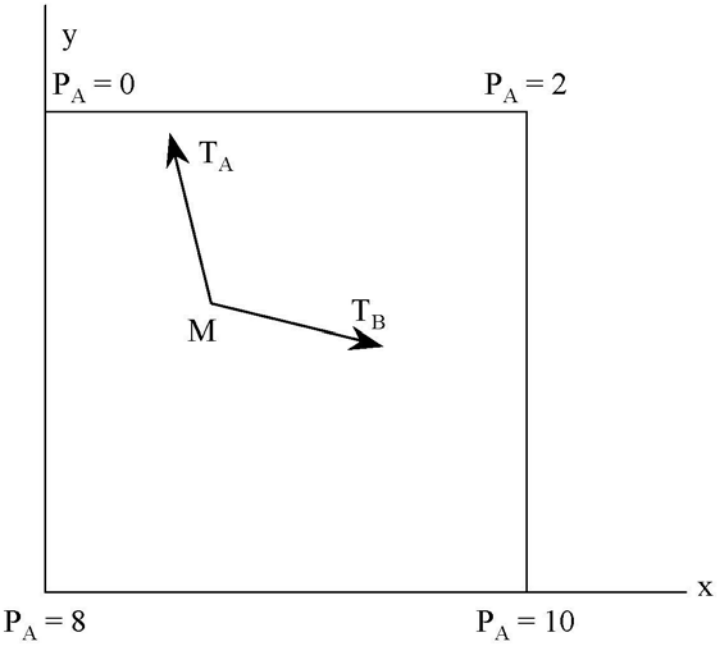
Avant d'aborder une autre façon, très différente, de traiter le problème, continuons de manipuler l'énoncé pour voir ce qu'il cache. Quel est le rôle de ces quatre chiffres 0, 2, 8, 10 ? On voit facilement qu'on peut les modifier sans rien changer au résultat, tant qu'ils sont strictement ordonnés de la même façon («strictement» signifie que les cas d'égalité sont exclus, on ne peut pas prendre 0, 5, 5, 10 ou analogues). Laissons-les donc comme ils sont, tout en sachant qu'il n'y a aucune magie des chiffres, seulement de leur ordre. Si B avoue, la peine de A bascule entre 10 et 8 par le choix de A. Si B n'avoue pas, la peine de A bascule entre 2 et 0 par le choix de A. Autrement dit, la peine de A dépend beaucoup plus (8 ans) du choix de B que de son propre choix (2 ans). Voilà qui est remarquable! Le sort de chacun des deux dépend bien plus de ce que l'autre fait que de son propre choix! Ceci constitue une remarque assez intéressante pour comprendre ce qui s'était passé dans le raisonnement standard: pour minimiser la peine de A, celui-ci s'était occupé très explicitement de son propre choix, ne prêtant pas trop d'attention à celui de B, qui est bien plus important ; en fait, c'est la combinaison des deux qui donne la clé du problème. Ce n'est peut-être pas complètement clair mais cela va le devenir avec l'approche de la section suivante.

Une approche géométrique du dilemme du prisonnier

J'aime bien la théorie des fonctions, chercher les maxima et minima et des choses de ce genre. Et justement le dilemme du prisonnier consiste à minimiser la ou les peines; seulement, il y en a deux, cela se mélange un peu. Pour voir plus clair, j'ai cherché un problème de théorie des fonctions dont la version discrétisée serait le dilemme du prisonnier. C'est très facile, et le dilemme du prisonnier apparaît en fait comme un cas particulier de l'étude qui va suivre.
Je considère deux « prisonniers » A et B. Chacun des deux peut faire un choix non pas binaire (« oui » ou « non » avouer) mais continu, dans un intervalle [0,1]. Prendre la valeur 0 est « avouer » et 1 est «ne pas avouer». Cela signifie que je considère des états intermédiaires entre «avouer» et «ne pas avouer»; le problème donné correspondra à prendre les valeurs extrêmes des variables. Soient x et y les choix de A et B respectivement. La peine encourue par A est une fonction des choix de A et B, c'est-à-dire, de x et y. On la désigne par $P_A(x, y)$. La peine de B est $P_B(x, y)$; les rôles de A et B étant analogues et échangeables, on aura pour tout choix (x, y) :

$$P_B(x, y) = P_A(y, x).$$

Nous devons à présent définir la fonction P_A d'une façon telle que, pour x ou y égaux à 0 ou 1, les valeurs de P_A soient celles du problème proposé. En se référant à la figure ci-dessous dans le plan de coordonnées x, y, le domaine de définition de la fonction P_A est le carré de côté unité dont les sommets sont les points (0,0), (0,1), (1,0), (1,1) qui d'après nos conventions correspondent respectivement à «A et B avouent», «A avoue et pas B», «B avoue et pas A», et «ni A ni B n'avouent». La fonction P_A est définie sur le carré, et doit prendre en ces points les valeurs 8, 0, 10, 2 respectivement ; pour le reste, je peux prendre les valeurs de la fonction P_A arbitrairement (je suis en train de définir le problème, pas de le résoudre; mon seul souci pour l'instant est que le problème des prisonniers en soit un cas discrétisé).



Je prends

$P_A(x, y) = 2x – 8y + 8$

Et bien entendu,

$P_B(x, y) = 2y – 8x + 8.$

Notons que la fonction P_A choisie est la plus simple satisfaisant aux conditions requises; elle est représentée dans l'espace de coordonnées (x, y, P_A) par un plan (pour d'autres valeurs des peines cela n'aurait pas été possible; la suite aurait été un peu plus compliquée, mais essentiellement analogue). Je pose maintenant le problème:

Forme continue du dilemme du prisonnier

On se donne les deux fonctions P_A et P_B qui viennent d'être définies. Comment doit-on choisir x pour que P_A prenne la valeur la plus petite possible (sans tenir compte des valeurs de P_B) et y pour que P_B prenne la valeur la plus petite possible (sans tenir compte des valeurs de P_A)?

On voit que ce n'est pas un problème classique: il ne s'agit pas de trouver *x* et *y* pour qu'une certaine fonction de ces variables prenne son minimum; *x* et *y* doivent être choisies indépendamment pour satisfaire à deux conditions qui sont enchevêtrées (P_A et P_B sont reliées entre elles). Avant d'attaquer la résolution proprement dite du problème, étudions un peu quelles sont les variations de *x* et de *y* qui font augmenter ou diminuer les deux fonctions P_A et P_B.

Construisons le vecteur gradient de la fonction P_A. C'est le vecteur du plan (x, y) dont les composantes sont les dérivées de P_A par rapport à *x* et *y*, ce qui donne $(2, -8)$, le vecteur de composantes -2 et 8. C'est le vecteur qui marque la direction de variation maximale de la fonction, orienté dans le sens des valeurs croissantes. Il est indépendant de la position, grâce à la forme très simple de la fonction choisie. Je désigne T_A (comme «tendance de *A*») le vecteur opposé: $T_A = (-2, 8)$, qui a été représenté sur la figure en un point M, mais il est indépendant du point. C'est la direction de descente maximale de la fonction P_A. Plus précisément, si à partir du point *M* on se déplace d'un certain vecteur, la valeur de la fonction P_A diminuera d'une quantité égale au produit scalaire de ce vecteur par T_A; on voit donc que la fonction P_A diminue si l'on se déplace d'un vecteur formant un angle aigu avec T_A, et augmente si cet angle est obtus. *Puisque A veut (indépendamment de toute autre considération) diminuer sa peine, sa tendance naturelle, sera à déplacer le point (x, y) dans la direction de* T_A*, ou dans une direction formant avec* T_A *un angle aigu*. On construit de la même façon le vecteur T_B «tendance de *B*» égal à moins le gradient de P_B; il est aussi dessiné sur la figure, il s'obtient en échangeant les composantes de T_A.

Deuxième raisonnement non standard

Essayons de résoudre la forme continue du dilemme du prisonnier à la lumière des considérations qui précèdent. *A* tend à minimiser sa peine sans se soucier de celle de *B*. C'est dire que, si à partir d'un certain point M on donne des variations δx et δy à *x* et *y*, A veut que le vecteur $(\delta x, \delta y)$ soit dans la direction de T_A, ou tout au moins qu'il forme avec T_A un angle aigu. Or, *A* ne dispose que du choix de *x*, donc de δx, pas de δy, qui échappe complètement à son contrôle! *Cela implique, très précisément, que la condition est impossible à satisfaire. Quel que soit son choix de δx, le déplacement peut être bénéfique ou préjudiciable pour A suivant la valeur de δy*. La seule chose que *A* peut faire est de s'entendre avec *B* d'une façon ou une autre, par exemple, en faisant le même choix, ou des choix opposés, ou tout autre. Sinon (c'est bien le cas d'après l'incommunication de *A* et *B*), *le problème reste complètement ouvert*.
Une conséquence de ce deuxième raisonnement non standard est que l'on voit à présent bien plus clairement quelle était l'erreur commise dans le raisonnement standard: puisque *A* raisonnait en fixant préalablement le choix de *B*, cela équivaut, dans le nouveau contexte, à prendre $\delta y = 0$; alors, pour minimiser sa peine (dans la figure, pour que le vecteur déplacement forme angle aigu avec T_A) , *A* doit prendre $\delta x < 0$ qui conduit à se déplacer vers $x = 0$, qui est «*A* avoue». *Cela conduit, effectivement, au raisonnement standard, qui découle donc d'un choix délibéré*. Le premier raisonnement non standard conduit au choix $\delta x = \delta y$; le vecteur déplacement est parallèle à la diagonale principale et pour avoir un angle aigu avec T_A, on doit avoir $\delta x > 0$. *En considérant le cas discret, on obtient le résultat du premier raisonnement non standard. On voit bien qu'il n'est pas automatique, il résulte aussi d'un choix* (sous la forme du premier raisonnement standard, c'était l'hypothèse que A et B allaient raisonner de la même façon). En tout cas, ce choix est meilleur que le précédent.
La conséquence principale du deuxième raisonnement non standard est que nous voyons bien mieux la structure générale du problème et la causalité des conséquences. *Elle découle du couple δx, δy et non pas de chacun de ses éléments; c'est comme cela, et tout raisonnement conduisant à une conclusion unique contiendra, d'une façon déguisée, un choix*. En particulier, la clause «sans se soucier du sort de l'autre» est équivoque, puisqu'elle peut conduire, comme nous avons vu, à des choix divers.

Commentaires

Au point où nous en sommes, le raisonnement standard donne un résultat manifestement insatisfaisant (paradoxal), le premier raisonnement non standard donne un résultat meilleur et le deuxième raisonnement non standard, qui relève manifestement d'un point de vue et de méthodes entièrement différentes, donne une sorte de «théorie générale» dont les deux précédents apparaissent comme exemples ou cas particuliers. Si vous avez bien suivi les raisonnements (vrais et faux, tout est intéressant), vous avez probablement une vague impression que le dernier est un peu «extravagant» ou «parachuté», un peu inadapté au problème, et que finalement, il ne le résout pas: Tout compte fait, il ne dit pas ce qu'il faut faire, il explique (et d'une façon que certains qualifieront d'artificieuse et disproportionnée) pourquoi il y a plusieurs solutions possibles, comment les deux raisonnements précédents étaient, et pour des raisons différentes, sinon faux, tout au moins incomplets.

En un certain sens, le troisième raisonnement nous ramène au point de départ en nous disant que tous les choix sont possibles et que c'est une question de… choix! … et cela, on le savait avant de commencer! Est-ce que tout cela a été inutile? Non pas, nous avons appris que, dans le cas qui nous occupe, «chacun tend à minimiser sa peine sans se soucier de l'autre» n'a pas de sens, c'est comme demander de trouver le plus petit nombre entier dont le carré est bleu, ce qui n'était pas du tout évident au début! *L'issue du dilemme du prisonnier dépend essentiellement des choix de A et de B, et la logique ou les mathématiques ne sont pas faites pour choisir à leur place: c'est A et B qui doivent choisir et en assumer les conséquences. Prétendre qu'un raisonnement mathématique peut modifier cet état de choses équivaut à croire à la magie.*

Le dilemme du prisonnier s'inscrit dans le cadre de la théorie des jeux. Il y a lieu de signaler que le raisonnement standard conduit à ce qu'on appelle un équilibre de Nash (né en 1928), alors que ce n'est pas le cas du premier raisonnement non standard. De quoi s'agit-il? Etant données les règles du jeu, on dit que les choix des deux joueurs constituent un équilibre de Nash lorsque, au vu du choix de l'autre, chaque joueur n'aurait pas pu faire mieux. Cela implique que, après la partie, chaque joueur, en constatant le jeu fait par l'autre, n'aura pas de regret du choix qu'il a fait. On voit bien que cela tourne toujours autour de la même chose: on suppose que les autres ont fixé leur choix pour évaluer le sien (alors que les deux choisissent au même temps). Leurré par cette vision réductrice, lors d'un équilibre de Nash, chaque joueur n'aura pas de regret personnel («ah, si j'avais fait…»), mais l'ensemble des joueurs peut très bien avoir un regret collectif («ah, si nous avions fait…»), qui n'est pas concerné par l'équilibre de Nash. C'est justement ce qui se passe dans le dilemme du prisonnier, où le raisonnement standard donne «les deux avouent», qui est un équilibre de Nash (comme vous pouvez vérifier aisément). Chacun des deux, au vu de ce que l'autre a fait, n'a pas de regret, mais l'ensemble des deux regrette de ne pas avoir choisi de ne pas avouer! Vous pouvez vérifier également que le choix «aucun n'avoue» (qui est donné par le premier raisonnement non standard) n'est pas un équilibre de Nash, et par conséquent, chaque joueur, au vu du choix de l'autre, aura des regrets; mais clairement, en tant que couple, ils n'auront pas de regrets.

La méthode dialectique

Il serait réducteur de penser que les raisonnements qui précèdent portent uniquement sur des questions du ressort de la théorie des jeux. Le propre des théories mathématiques est de faire abstraction du contexte pour se focaliser sur des structures abstraites et dépouillées. J'avais présenté le «dilemme» sous sa forme traditionnelle, à propos d'un conte (assez peu vraisemblable) de policiers et voleurs. Or, il est très facile de donner des exemples issus de l'économie qui relèvent du même schéma (on pourra se référer à [Guerrien 2006] pour les relations entre l'économie et la théorie des jeux).

Prenons par exemple deux villes (considérées comme équivalentes, pour simplifier) séparées par un fleuve; elles entretiennent un commerce important, mais les transports doivent faire un coûteux détour. La question se pose de construire ou non un pont, dont le coût est α. Le coût des transports pendant la durée de vie estimée du pont est β pour chacune des deux villes. Il est entendu que, si les deux villes décident de construire le pont, la facture α sera partagée, mais si l'une des villes décide de construire le pont et pas l'autre, ce sera la première qui payera l'intégralité.

Il est facile de vérifier que, si β est compris entre α/2 et α, et que les instances de décision de chacune des villes cherchent à minimiser leur propre budget sans se soucier de celui de l'autre, on se trouve exactement dans la situation du dilemme du prisonnier. Les conséquences en sont exactement les mêmes, en particulier l'absurdité logique de l'énoncé («sans se soucier du budget de l'autre» n'a pas de sens, puisque le prix à payer en dépend).

Voilà donc que ce type de problèmes se retrouve dans mainte situation pratique. Or, l'étude qui en vient d'être fait, comme nous venons de le voir, ne donne pas une solution (qui n'existe pas tel que le problème a été posé) mais nous renseigne sur la vraie nature du problème, évitant des malentendus cachés dans l'énoncé et nous mettant devant nos responsabilités.

Un grand nombre de démarches scientifiques répondent au schéma qui précède. Il y a un raisonnement primaire, ou une théorie simple, qui donne des résultats insatisfaisants. Une autre, partant de bases différentes, donne un autre type de résultats. Finalement, une troisième, prenant de la hauteur, donne à Dieu ce qui est à Dieu et à César ce qui est à César. *Très souvent, la science ne résout pas des problèmes, elle nous rend plus lucides, sans nous priver de notre liberté de choix… parfois on le regrette!*

Ce qui précède constitue un bel exemple de *processus d'évolution dialectique, avec ses trois stades classiques: thèse (le raisonnement standard), antithèse (le premier raisonnement non standard) et synthèse (le deuxième raisonnement non standard)*. Vous pouvez trivialement vérifier qu'il y a contradiction entre les deux premiers, alors que la synthèse les englobe en une connaissance d'ordre supérieur.

La pensée dialectique est une pensée de la globalité, de l'interaction et de l'évolution. Elle s'oppose souvent à la pensée analytique, souvent incapable de saisir le pourquoi des choses et aboutissant à des paradoxes rédhibitoires et frustrants. La dialectique est une façon de penser, d'aborder les problèmes, de les regarder face-à-face dans leur nature et leur profondeur, et non pas une machinerie permettant de les résoudre.

Bibliographie

Delahaye, J. P. [1993] «Logique, informatique et paradoxes» Bélin-Pour la Science, Paris.

Eber, N. [2006] « Le dilemme du prisonnier » La découverte, Paris.

Guerrien, B. [2002] «Dictionnaire d'analyse économique. Microéconomie, macroéconomie, théorie des jeux» La Découverte, Paris.

Sanchez-Palencia, E. [2012] «Promenade dialectique dans les sciences» Hermann, Paris