Histoire des sciences / Evolution des disciplines et histoire des découvertes – Juillet 2015

POINCARE ET LE CHAOS DETERMINISTE[1]

par Evariste Sanchez-Palencia, membre de l'Académie des sciences

Observer un feu de bois, par exemple dans une cheminée, est souvent fascinant. On n'est pas obligé de le trouver beau, mais si on le regarde, plutôt si on l'observe, on est souvent pris dans une sorte de piège, parfois même dans une sorte d'envoûtement. Les flammes se ressemblent et pourtant elles changent, évoluent, se renouvelant presque à l'identique mais revenant à chaque fois sous une forme nouvelle, parfois inattendue.

Fig.1 - Un feu de bois est globalement prévisible, tout en exhibant localement une causalité insaisissable.

[1] Exposé le 10/2/2015 au Lycée Berthelot de Saint Maur dans le cadre du GICS (Groupement d'Initiative pour la Culture scientifique)

Mettons une nouvelle bûche dans un feu qui est près de s'éteindre. Elle sera d'abord attaquée par une des petites flammes, on dirait une sorte de langue qui lècherait la nouvelle bûche ; elle se retire après avoir léché et recommence, une, deux, peut-être six ou dix fois. Ces tentatives (appelons-les comme ça) se ressemblent les unes aux autres, c'est pratiquement une image qui revient périodiquement avec à chaque fois une petite modification. Ensuite cela bascule : la flamme (la langue) change de position, elle attaque d'un autre côté, une, deux, cinq ou huit fois, et bascule à nouveau. La troisième série de tentatives peut être différente des deux précédentes, mais elle peut aussi ressembler à la première, le plus souvent avec un nombre différent de tentatives, puis basculera à nouveau dans une nouvelle série. De temps en temps il y aura un changement plus profond. Cela peut prendre des formes variées. Par exemple, deux petites flammes qui suivaient le schéma décrit peuvent se rejoindre et donner naissance à une grande flamme qui jaillira en nous surprenant ; ou bien la bûche elle-même, consumée par une partie, s'effondrera bousculant les flammes et les autres bûches (ou ce qu'il en reste …), ou bien le feu s'éteindra de lui-même, faute de matière combustible…

L'évolution d'une flamme est pratiquement imprédictible. Elle entre pourtant dans le schéma que je viens de brosser. Si d'aventure on voyait une flamme se transformer soudain en un bloc de glace on serait certainement très surpris. Le feu lui-même dans une cheminée est prédictible. Si vous l'allumez aujourd'hui comme hier, avec des bûches analogues, dans des conditions (température, présence ou absence de courant d'air et autres…) analogues, vous aurez un feu qui ressemblera à celui d'hier. Cela arrive qu'on ait des surprises, un feu qui ne prend pas, ce qu'on imputera à du bois humide ou tout autre, mais cela est normal, cela n'a rien à voir avec l'imprédictibilité de l'évolution de chaque flamme dans les instants qui vont suivre. C'est probablement pour cela qu'un feu de bois fascine sans faire peur : vous pouvez regarder son renouvellement imprédictible et original, parfois surprenant, sans danger pour vous, pourvu que l'on suive les consignes habituelles de sécurité.

Un feu de bois est le meilleur exemple que je connaisse d'un processus sujet au chaos déterministe, ou sci (= sensibilité aux conditions initiales), le fameux «effet papillon». C'est un exemple de mouvement turbulent de l'air, accompagné bien entendu, d'une réaction chimique de combustion. Cet exemple permet de se faire une idée de la causalité et du vrai sens de l'imprédictibilité, tout en gardant des éléments prédictibles.

De quoi dépendent les« éléments imprédictibles» d'un feu de bois, la petite différence entre une flamme et celle qui la suit dans une série, ou le fait de basculer ou non dans un nouvelle série de flammes qui se ressembleront entre elles ? Manifestement, cela fait intervenir des tout petits détails pratiquement incontrôlables. Modifiez une toute petite fibre du bois d'une bûche, la position d'une brindille ou le moindre élément atmosphérique et ces «éléments imprédictibles» se dérouleront autrement, sans pour autant modifier de façon significative les éléments globaux qui font que le feu d'aujourd'hui est analogue à celui d'hier. On peut penser (et c'est vrai) que, en reproduisant exactement tous les éléments du feu d'hier vous pourrez le reproduire exactement aujourd'hui. Mais dans la pratique cela est parfaitement utopique, et au cas où vous auriez exactement les mêmes conditions qu'hier, vous ne pourriez pas vérifier par l'observation que le feu est le même. En effet, votre observation, votre respiration, sont largement suffisantes pour faire basculer ces éléments pratiquement imprédictibles. Pour reproduire le feu d'hier il faudrait que tout ce qui entoure le feu soit exactement pareil, ce qui est impossible, car aujourd'hui n'est pas hier…

Vous savez parfaitement qu'un feu est un phénomène physico-chimique. Vous avez peut-être remarqué que j'ai utilisé pour le décrire quelques termes un peu équivoques à ce point de vue (flammes qui attaquent, langues qui lèchent…) mais c'était pour me faire comprendre, il est clair que je ne voulais nullement insinuer que les flammes aient, ou obéissent à, une quelconque forme de volonté.

Je vous propose maintenant un petit jeu : en regardant un feu de bois, vous pouvez imaginer mentalement un point dans l'espace entre les flammes, que vous fixez du regard pendant dix secondes, par exemple. Il s'agit de voir si, pendant ces dix secondes, le point sera ou non touché par les flammes. Vous pouvez faire des paris ; cela ressemble au jet d'une pièce qui peut donner pile ou face, mais c'est un peu différent, car manifestement, la probabilité d'être touché par les flammes dépend de la position où vous mettiez le point. Imaginez maintenant que le point est un tout petit animal incapable de faire des déplacements rapides mais doté de pensée et de sensibilité aux brûlures (cela ne comporte aucune cruauté puisqu'il s'agit d'un jeu mental). Il est clair que pour un tel animal le feu de bois serait tout autre chose que pour vous : il percevrait les flammes comme extrêmement dangereuses et à l'évolution totalement imprévisible, au lieu de comme fascinantes et à imprévisibilité locale et limitée. Il se peut même (cela dépend du type des capacités mentales que vous accorderiez à votre hypothétique animal) qu'il imagine les flammes comme étant effectivement dotées de pouvoir volitif, ou mises en mouvement par une sorte de grand chien qui lèche…ou plutôt un affreux dragon.

Les phénomènes météorologiques relèvent, (bien entendu), du même type de causalité qu'un feu de bois ; ce sont tous les deux des phénomènes turbulents. Vous savez parfaitement qu'il est impossible en pratique de prévoir le temps qu'il fera au-delà de quatre ou cinq jours, comme l'hypothétique animal de votre jeu voyait comme totalement imprévisibles les mouvements des terrifiantes flammes qui l'entouraient. Quel sont, dans la météorologie, les éléments à causalité globale parfaitement prédictible, du type du «je vais allumer ce soir un feu comme celui d'hier» ? Ce sont les saisons, le climat chaud et humide de l'Amazonie, ou froid de l'Antarctique. Nous le savons, nous n'y prêtons pas attention, alors que nous sommes très préoccupés par le temps qu'il fera aux prochaines vacances à l'endroit précis où nous comptons les passer, qui est un phénomène pratiquement imprévisible, pouvant basculer en autre chose par un petit rien … comme un battement l'ailes de papillon à un endroit éloigné. Notez que, si le phénomène climatique en question peut avoir des conséquences très importantes pour une personne ou un groupe (pensez à une inondation ou è une tornade), il se peut bien que l'on allume des cierges ou que l'on organise des prières pour qu'il prenne une tournure favorable, comme notre hypothétique animal croyait que son sort dépendait de la volonté de l'affreux dragon.

Fig. 2 - Henri Poincaré (1854 – 1912).

Le vrai caractère du type de causalité qui intervient pour le feu de bois ou la météorologie a été extrêmement difficile à comprendre, et de nos jours beaucoup de gens en parlent sans l'avoir compris, alors qu'ils ne sont nullement étonnés (mais peut-être fascinés) par un feu de bois. Henri Poincaré (1854- 1912), l'un des plus grands mathématiciens de tous les temps, a commis en 1888 une mémorable erreur en traitant un problème qui relevait du chaos déterministe. A cette époque, ni Poincaré ni personne ne connaissaient le chaos déterministe (du moins sous sa forme actuelle ; peut-être il y avait eu quelques vagues intuitions, comme celle de Maxwell) ; on connaissait les feux de bois, mais on n'en avait pas tiré les conséquences.

La découverte des phénomènes de chaos déterministe (le célèbre «effet papillon» et les «attracteurs étranges») qui jouent un rôle extrêmement important dans notre vision actuelle des phénomènes naturels, a suivi un cheminement des plus étranges et inattendus. Il y a lieu de penser que la difficulté à les comprendre, les maîtriser et les manipuler a conduit tout simplement à un « oubli », une « ignorance de facto », pendant plus de 50 ans de propriétés parfaitement démontrées et dont la portée et les conséquences étaient comprises, du moins par certains, mais pas assimilées par la communauté. Tout simplement, on est passé à côté, comme si elles n'existaient pas. Mais les circonstances de la découverte sont aussi insolites et pittoresques.

Henri Poincaré a laissé des résultats fondamentaux dans tous les domaines des sciences mathématiques de son temps, ce qui comprenait la mécanique et des larges domaines de la physique (Il a été également un grand maître de l'épistémologie et de la psychologie de la recherche). Dans les années 1880 son prestige dans le monde universitaire est énorme. Il produit des articles du plus haut niveau, souvent extrêmement novateurs, de façon continue. Il les envoie à des journaux scientifiques qui les reçoivent souvent comme un honneur. Il est pourtant réputé pour ne pas relire les épreuves d'imprimerie en temps voulu et, bien plus important, parce que ses écrits contiennent souvent des «trous», des points obscurs passés sous silence, et des inexactitudes. Les rédacteurs des journaux lui demandent souvent d'apporter des précisions et des explications complémentaires sur certains passages; le ton est plutôt celui de «on n'a pas été capable de comprendre…» que celui du reproche. Et, effectivement, le plus souvent, les notes complémentaires qu'il apporte confirment la justesse de sa pensée et le bien fondé de ses raisonnements. Il arrive aussi qu'on s'aperçoive par la suite de véritables lacunes dans ses travaux: cela donne du travail de confirmation, vérification, souvent source d'activité originale et féconde sous fond de controverse. Poincaré est un véritable moteur de la recherche en mathématiques et reconnu comme tel.

Le roi Oscar II de Suède (1829-1907) est un grand protecteur des sciences. Avec son appui moral et économique, une nouvelle revue de mathématiques voit le jour, la prestigieuse «Acta Mathematica», dont le rédacteur en chef est Gösta Mittag Leffler (1846-1927). Dans le but d'afficher le haut niveau du nouveau journal, Mittag Leffler sollicite des articles à Poincaré et au fil des années, une amitié se noue entre les deux hommes, alors que «Acta Mathematica», devient le principal débouché de la production de Poincaré.

En 1884, le roi Oscar décide d'accorder un prix (une médaille d'or et une somme de 2500 couronnes) «à une découverte importante dans le domaine de l'analyse mathématique supérieure» à l'occasion de son 60ième anniversaire, le 21 janvier 1889. Mittag Leffler préside le jury (formé aussi par C. Hermite (1822 – 1901) et K. Weierstrass (1815 – 1897)) et fixe les règles: les postulants, sous couvert d'anonymat, doivent envoyer des mémoires, de préférence sur plusieurs sujets assez généraux définis par le jury, dont le grand problème de la stabilité du système solaire.

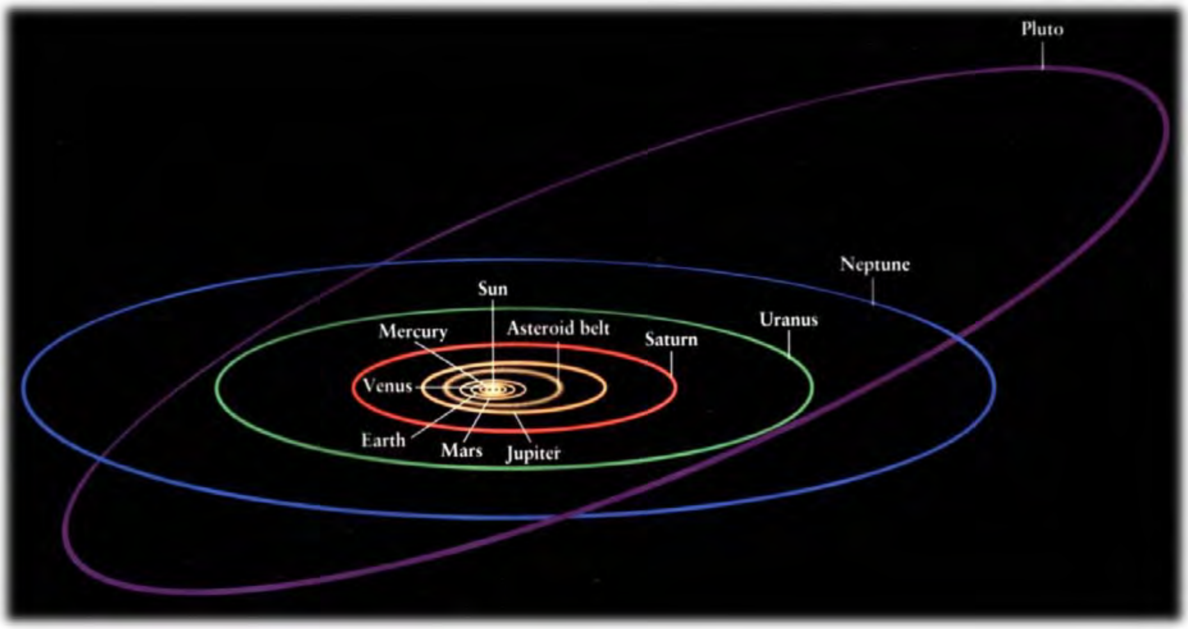

Fig. 3 - Orbites du système solaire.

De quoi s'agit-il? Le mouvement de chaque planète autour du soleil peut être calculé facilement (depuis Newton, 1643 - 1727) à l'aide de la loi de la gravitation universelle, ce qui donne des orbites elliptiques, parcourues de façon périodique. Or, lorsqu'il y a plus d'une planète, celles-ci s'attirent, modifiant le schéma précédent. Le problème mathématique est très compliqué, mais, étant donné que les planètes sont petites, le mouvement de chacune est très proche de celui qu'elle aurait si elle était seulement soumise à l'attraction du soleil[2]. On peut se demander si, avec le temps, ces petites perturbations peuvent avoir un effet cumulatif de sorte que, dans un futur très éloigné la configuration du système solaire devienne très différente de l'actuelle, et si la terre peut devenir un astre lointain, ou, au contraire, approcher du soleil et griller… Pour étudier ce type de mouvements, on fait des approximations, en le simplifiant, ce qui conduit à la théorie des perturbations, mais ces solutions approchées sont entachées de petites erreurs, qui à la longue pourraient à leur tour avoir un effet cumulatif, faussant les résultats. La théorie des perturbations est tout à fait fiable pour des années, voire des siècles, pas pour l'éternité… Par ailleurs, il y a bien d'autres questions liées, plus concrètes: le passage près de nous d'un astre provenant de l'extérieur du système solaire peut-il disloquer celui-ci complètement, ou bien tout rentrera-t-il dans l'ordre peu après son passage?

Poincaré décide de concourir au prix et choisit le problème de la stabilité, ou plutôt un problème restreint dans ce cadre, le «problème réduit des trois corps», où seul est inconnu le mouvement d'une planète, les deux autres ayant des mouvements connus. Les méthodes de perturbation classiques étaient, comme nous venons de le mentionner, de peu d'utilité. Il aborde donc la question d'une façon totalement nouvelle. Au lieu d'étudier une trajectoire du point en tant que telle, il considère l'ensemble des trajectoires que la planète pourrait suivre pour ses diverses positions possibles à l'instant initial[3]. Cela lui permet de mettre à profit une propriété qualitative fondamentale: deux quelconques de ces trajectoires ne peuvent pas se couper, ce qui introduit des contraintes extrêmement utiles: les trajectoires ne peuvent pas faire n'importe quoi, elles sont comme canalisées, encadrées dans une certaine mesure. De la connaissance de certaines d'entre elles, périodiques, et des considérations sur la conservation de l'énergie, on peut tirer des propriétés qualitatives des solutions, sans les connaître et sans faire de véritables calculs, remplacés par des subtils (et extrêmement difficiles) raisonnements sur les positions possibles et leur évolution dans le temps!

Le mémoire de Poincaré contient une quantité impressionnante de résultats qualitatifs inattendus sur le problème en question: existence de solutions périodiques, de solutions asymptotiques,… Mais le plus surprenant est que certains d'entre eux ont un caractère tout à fait général, dépassant largement la question de la stabilité du système solaire: théorème de récurrence, théorie des exposants caractéristiques… Une nouvelle théorie est née, issue des méthodes inédites mises en œuvre! Le mémoire de Poincaré établit aussi la stabilité (dans le cas restreint considéré) du système solaire; c'est un résultat formidable, mais…faux!

[2] Du moins pendant des longues périodes de temps. C'est d'ailleurs la raison pour laquelle on a découvert (Kepler, 1571 -1630) que les orbites sont elliptiques; en fait elles ne sont que très approximativement elliptiques.
[3] Il s'agit en fait d'un point représentatif dans l'espace des phases.

Une douzaine de mémoires sont reçus par le jury. L'un d'eux apparaît immédiatement et sans équivoque comme très largement supérieur aux autres, c'est celui de Poincaré. Le 21 janvier 1889 Mittag-Leffler lui écrit pour lui notifier que le prix lui est attribué et lui fait savoir que, conformément aux statuts du prix, le mémoire est envoyé pour publication dans Acta Mathematica. Le manuscrit est confié au jeune mathématicien Phragmèn pour préparer l'édition. L'ambassadeur de Suède remet à Poincaré la médaille et le montant du prix lors d'une cérémonie le 23 mars.

En juillet, Phragmèn a fini son travail de préparation. Il n'a pas décelé d'erreur, cela aurait d'ailleurs été impensable! Comme d'habitude, plusieurs points sont insuffisamment clairs, on demande à l'auteur des commentaires pour les éclaircir. Comme d'habitude, Poincaré s'exécute, cela lui prend très peu de temps, sauf que…l'une des questions à clarifier se montre récalcitrante… il ne parvient pas à donner rapidement une explication simple et convaincante. Poincaré approfondit l'affaire: il y a un raisonnement totalement faux; qui plus est, il ne parvient pas à le remplacer par un autre, il doit se rendre à l'évidence: le résultat de stabilité du système solaire est tout simplement faux!

Poincaré met un certain temps à faire la lumière sur l'affaire. Par ailleurs, le 9 novembre naît Yvonne, deuxième fille d'Henri et de Louise Poincaré. Fin novembre il envoie enfin à Phragmèn une lettre, aujourd'hui perdue, en lui proposant une version modifiée de l'article, et le 1er décembre il écrit à Mittag-Leffler lui faisant état de sa profonde déception.

C'est l'évidence même que, même amputé du résultat erroné, le mémoire de Poincaré mérite sans l'ombre d'un doute le prix, qui n'est nullement remis en question. Mais le texte modifié de Poincaré est arrivé trop tard. Le numéro d'Acta Mathematica est imprimé mais pas encore distribué[4]. En accord avec l'auteur, Mittag-Leffler fait réimprimer une version modifiée, qui est finalement distribuée. A titre anecdotique, les frais de réimpression ont été de 3585 couronnes, et la facture a été envoyée à Poincaré, qui a donc gagné une médaille d'or et perdu 1085 couronnes[5]; mais cela est complètement dérisoire au regard de la dimension scientifique, présente et future.

En quoi consistait l'erreur? Bien entendu, elle était très bien cachée à l'intérieur de nombreux raisonnements difficiles et subtils (ni les membres du jury ni Phragmèn ne l'on décelée). Mais, à l'heure de vérité, le schéma de l'erreur était le suivant[6]: dans un demi-plan dont le bord contient un point O, considérons deux courbes fermées, C1 et C2 passant par O. Les aires entourées par les deux courbes sont égales. Poincaré en déduit que les deux courbes coïncident; c'est manifestement faux, il suffit pour s'en convaincre d'envisager deux courbes se coupant en un ou plusieurs points (en plus du O). De toute évidence, Poincaré pensait que les deux courbes ne pouvaient pas se couper ailleurs qu'en O! *Une telle erreur est surprenante… mais compréhensible!* Dans un travail précédent, Poincaré avait traité des questions analogues dans un autre

[4] On prévoyait probablement d'insérer les explications complémentaires de l'auteur dans le numéro suivant.

[5] La couronne suédoise valait à l'époque 1,40 francs environ. Pour se faire une idée des sommes en jeu, il est utile de savoir que le salaire annuel de Mittag – Leffler était de 7000 couronnes.

[6] J'ai simplifié, presque caricaturé.

problème où les courbes C1 et C2, qui ne sont pas des trajectoires, héritaient de celles-ci la propriété de ne pas pouvoir se couper ailleurs qu'en O, car tout s'y passait dans le plan, et les courbes y font des barrières. Dans le problème du prix, les trajectoires étaient dans un espace tridimensionnel, les courbes C1 et C2 n'héritant pas de celles-ci la propriété de ne pas pouvoir se couper car les courbes ne sont pas des barrières dans l'espace tridimensionnel. *Manifestement, Poincaré avait en tête le problème précédent!*

Poincaré a-t-il été victime du délai de présentation des mémoires pour le prix, qui l'a empêché de consacrer le temps nécessaire pour finir le travail? Peut-être, mais c'est loin d'être évident. Les mémoires devaient être envoyés à Uppsala pour le 1er juin 1888, et Poincaré a envoyé le sien le 17 mai, ce qui peut être considéré comme limite pour un envoi important et volumineux (270 pages de «Acta Mathematica»), or, le concours était ouvert depuis 1885; de par ses capacités, Poincaré pouvait choisir pratiquement n'importe lequel des sujets proposés (par ailleurs les sujets proposés n'étaient pas contraignants); il a finalement choisi celui de la stabilité et travaillé environ un an[7]. On peut estimer qu'il a travaillé à son rythme normal, mais c'est un fait qu'à la fin il a pu être pressé. Mais quoi qu'il en soit, il a rédigé comme d'habitude, faisant confiance à son intuition, avec des résultats insuffisamment élaborés. *Et cette fois-ci, contrairement à l'habitude, un des résultats était faux. Il n'a vu que ce qu'il avait prévu de voir*.

Dans son mémoire, Poincaré a essayé de démontrer son (faux) théorème par deux méthodes. La première faisait intervenir une série dont il n'a pas démontré la convergence, sans quoi elle n'était pas une démonstration. Les séries non convergentes étaient un sujet très sensible en mécanique céleste, car dans le passé, nombre de résultats établis par des astronomes en les utilisant avaient plus tard été reconnus faux. Poincaré n'est pas tombé dans ce piège, et a abandonné cette tentative de démonstration, qu'il a quand même incluse, en tant que filière inachevée, dans son mémoire. Il s'est ensuite tourné vers l'autre démonstration, qu'il croyait juste et qui contenait une véritable erreur. Or, si Poincaré était convaincu de la véracité de sa deuxième démonstration, pourquoi a-t-il donné la première, embryonnaire et peu convaincante? Il y a lieu de se demander si Poincaré avait un doute sur la justesse de la deuxième démonstration, et voulait combler avec un argument supplémentaire une possible lacune dont il avait vaguement conscience. Il n'y a pas de réponse à ces questions. Il a quand même rédigé comme il en avait l'habitude; les travaux complémentaires lui avaient toujours donné raison. Le plus probable est que Poincaré n'avait aucun doute sur la validité de sa démonstration.

[7] Il a commencé en mai ou juin 1887 (lettre de Poincaré à Mittag-Leffler du 16/7/1887, dans H. Poincaré et G. Mittag-Laffler. Correspondance [Springer 1999], p 161).


LES MÉTHODES NOUVELLES

MÉCANIQUE CÉLESTE

H. POINCARÉ,

TOME I.
Solutions périodiques. Non-existence des intégrales uniformes.
Solutions asymptotiques.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1892

Fig. 4 - Couverture du tome 1 de «Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste» Par H. Poincaré, Gauthier-Villars, Paris, (3 volumes, 1892, 1893, 1899).

Après ces aventures, Poincaré en a tiré toutes les conséquences, qu'il a développées dans un livre qui a fait époque: «Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste». Les deux courbes C1 et C2 se coupent, bien entendu, mais une infinité de fois, et ceci au voisinage de tout point. Elles sont enchevêtrées de façon inextricable, voyons ce que Poincaré explique:

«*Ces intersections forment une sorte de treillis, de tissu, de réseau à mailles infiniment serrées; chacune de ces courbes ne doit jamais se recouper elle-même, mais elle doit se replier elle-même d'une manière très complexe pour venir couper une infinité de fois toutes les mailles du réseau. On sera frappé par la complexité de cette figure, que je ne cherche même pas à tracer. Rien n'est plus propre à nous donner une idée de la complication du problème de trois corps et en général de tous les problèmes de la dynamique où il n'y a pas d'intégrale uniforme*».

Bien entendu, il n'y a pas que ces deux courbes. Tout cela a des conséquences d'une portée extraordinaire sur les trajectoires elles-mêmes, qui sont aussi enchevêtrées et imbriquées les unes dans les autres. En fait, *dans la plupart des cas, le système est instable, et l'allure des trajectoires sur des temps très longs, extrêmement compliquée*.

Avez-vous remarqué que dans le texte qui précède Poincaré semble avoir parfaitement compris la complexité des courbes (et des trajectoires) mais qu'il ne les décrit pas en tant que telles, et qu'il «ne cherche même pas à tracer» la figure? En effet, une figure des trajectoires n'aide pas beaucoup, car elles sont dans l'espace de dimension 3, et en en faisant une figure plane, elles deviennent absolument illisibles. Notez aussi que *Poincaré a aussi compris la portée très générale de ce type de phénomènes*, qui dépasse très largement le problème spécifique de la stabilité du système solaire. Ce type de phénomène était «général à tous les problèmes de la dynamique où il n'y a pas d'intégrale uniforme».

Faute de figures, faute d'exemples palpables, mais dû aussi à la difficulté des raisonnements, la connaissance de ces phénomènes remarquables, de portée et généralité immenses, reste confinée pendant plus de 70 ans au cercle des rares lecteurs des «Méthodes nouvelles de la mécanique céleste». Sans doute les recherches dans ce domaine ont progressé pendant ce temps, notamment grâce aux travaux de l'américain George D. Birkhoff (1884 – 1944), mais dans un cadre très académique et sans vraie percée vers une conception globale des problèmes d'évolution, du moins jusqu'à Stephen Smale (né en 1930) et sa célèbre structure imbriquée connue par « fer à cheval de Smale».

Dans les années 1960, Edward Lorenz (1917-2008) travaille sur des modèles simples pour comprendre certains phénomènes météorologiques faisant intervenir la convection atmosphérique produite par le réchauffement solaire. Les équations sont trop compliquées pour pouvoir obtenir des solutions exactes, et Lorenz fait des calculs sur ordinateur qui lui permettent d'avoir une solution (approchée) en donnant les valeurs à l'instant initial des divers paramètres (température, pression…).

Les ordinateurs de l'époque étaient très lents par rapport aux standards actuels, si bien qu'un de ces calculs pour un système d'équations différentielles, presque instantané aujourd'hui, demandait plusieurs heures. Un jour, voulant reproduire une séquence de résultats obtenue quelques jours avant, pour gagner du temps, au lieu de la recommencer dès le début avec les mêmes valeurs initiales, il la commence à un instant vers le milieu de l'évolution, en prenant comme valeurs initiales les valeurs de la séquence précédente à cet instant. Il a alors obtenu une séquence entièrement différente de la précédente. Intrigué par ce fait, incompatible avec le caractère déterministe du système, il a vu que, au lieu d'injecter comme donnée la valeur 0,5061127, il s'était contenté de mettre 0,506. Il avait donc injecté une erreur de 0,02 %, ce qui avait conduit à une évolution entièrement différente de la première. C'était le point de départ de la moderne théorie du chaos déterministe. Dans ce système, comme dans de nombreux (pour ne pas dire presque tous) systèmes différentiels non linéaires en dimension plus grande ou égale à trois, les trajectoires s'enchevêtrent comme celles de la planète perturbée étudiée par Poincaré. *Il a fallu attendre 70 ans qu'un ordinateur « dessine » les courbes que Poincaré « ne cherchait même pas à tracer » pour que l'on prenne la mesure de ces phénomènes généraux et fondamentaux.*

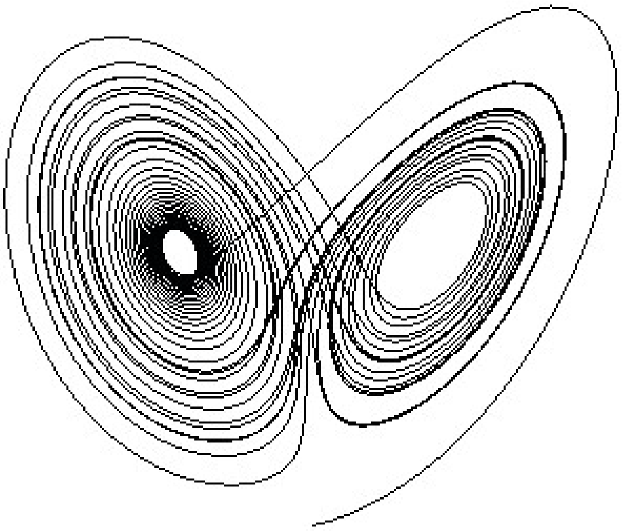

Fig. 5 - Attracteur de Lorenz. Orbite d'une solution (décrite en fonction du temps). Les basculements entre les deux schémas vaguement périodiques sont extrêmement enchevêtrés et ont lieu à des positions pratiquement imprévisibles, en ce sens qu'un très petit changement de la position de départ les modifie beaucoup, tout en gardant l'allure générale.

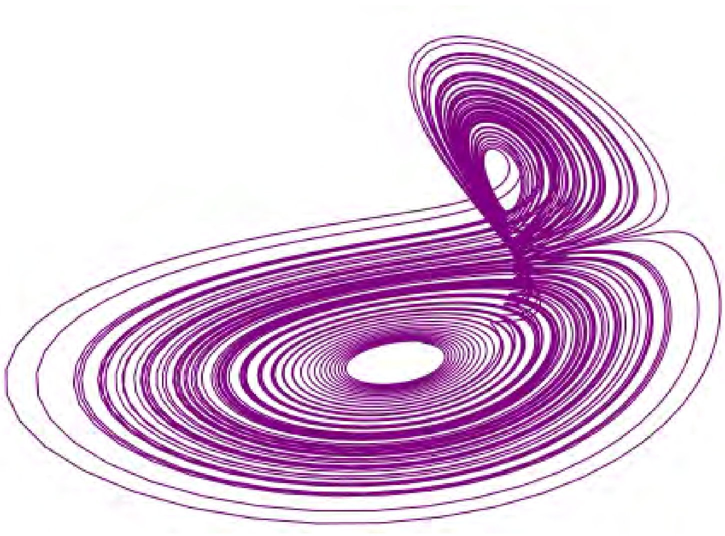

Fig. 6 - Une autre image de l'attracteur de Lorenz (une autre perspective, avec des paramètres différents, dont dépend la structure exacte).

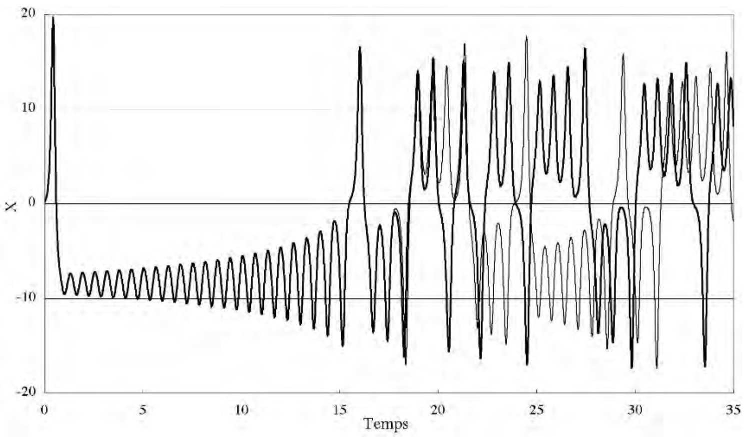

Fig. 7 - Système de Lorenz. Une des variables en fonction du temps. On distingue les deux mouvements vaguement périodiques avec des basculements entre eux pratiquement imprévisibles.

Les propriétés mises en évidence par Lorenz sont ensuite relativement connues de la communauté des météorologistes et connaissent des développements importants, notamment avec Michel Hénon (1931-2013), mais leur caractère général reste encore ignoré. En 1971, les physiciens D. Ruelle (né en 1935) et F. Takens (1940 – 2010) découvrent des propriétés analogues dans le système d'équations de la mécanique des fluides, apportant une clarification fondamentale au phénomène de l'apparition de la turbulence dans les écoulements fluides, ce qui propage dans la communauté des physiciens les nouvelles idées sur le chaos déterministe.

La structure sociale de l'évolution des idées scientifiques apparaît ici de façon paradigmatique. Le formidable génie intuitif de Poincaré avait besoin de la lecture attentive de Phragmèn pour corriger ses fausses intuitions hardies et saisir la réalité insoupçonnée. Des découvertes fondamentales peuvent rester endormies faute d'exemples palpables, de description intelligible. Les potentialités ouvertes par les progrès des techniques changent notre regard sur les connaissances anciennes et les font revivre et fructifier.