

NOTICE
SUR LA VIE ET L'ŒUVRE
DE
HENRI LEBESGUE

(1875 - 1941)

déposée en la séance du 21 octobre 1946,

PAR

M. ARNAUD DENJOY

Membre de l'Académie des Sciences.

Aussi longtemps l'Analyse mathématique éveillera-t-elle des fervents parmi les hommes, aussi longtemps l'intégrale de Lebesgue perpétuera le souvenir d'un Français justement admiré.

Henri Lebesgue était né en 1875, à Beauvais, où son père et sa mère enseignaient à l'école primaire. La physionomie mentale d'un personnage connu peut s'éclairer au détail biographique. La catégorie sociale où notre famille s'est inscrite cantonne notre enfance et notre jeunesse dans un monde nettement délimité, d'où prennent

leur premier essor nos idées et nos jugements sur l'ensemble de la société. Nul n'embrasse dans son coup d'œil la vaste diversité des modes d'existence enfermés dans les alvéoles où se cloisonne la ruche active des hommes.

Lebesgue fut élève de l'École Normale supérieure. A la sortie, il ne se classa point le premier à l'agrégation des sciences mathématiques, mais seulement le troisième. Ses deux camarades normaliens qui l'avaient dépassé ont eu eux aussi une belle fortune scientifique. Mais la notoriété et l'admiration conquises par chacun d'eux dans le monde savant inversèrent l'ordre où le concours les avait situés. Dans cette république répandue en citoyens clairsemés sur tous les États civilisés de la planète, ils furent le premier considéré, le second réputé, le troisième illustre. L'observation en est banale: d'une intelligence d'ailleurs brillante, les succès scolaires certifient la plasticité, la carrière inventive démontre l'originalité. Les deux caractères, sans être incompatibles, ne vont pas nécessairement de pair.

I

C'est dans sa Thèse de Doctorat ès sciences, soutenue à l'âge de 27 ans, que Lebesgue fit connaître sa conception de l'intégrale.

Intégrer, c'est pousser à l'infini les deux règles conjointes de Descartes: d'abord diviser la difficulté pour la mieux résoudre, ensuite recomposer cette désagrégation préliminaire.

Dans une masse étendue, une cause s'exerce, un effet s'accomplit. Si l'intensité des phénomènes était constante aux divers points, les résultats se manifesteraient proportionnels à cette intensité et à cette masse à la fois. Un simple produit de deux facteurs les livrerait. Mais si ces intensités sont fluctuantes, comment évaluer leur concours total? Par la pensée on partage le corps en éléments tellement réduits et ainsi disposés que sur chacun d'eux l'action et sa conséquence, rapportées l'une et l'autre à la mesure de la parcelle, ne présentent plus de variation appréciable. Les évaluer est donc immédiat. Additionner ensemble ces infiniment petits pour calculer

le phénomène total, c'est procéder à une intégration. Le tout est de prendre la partition préalable par le bon biais.

A la fin du dix-septième siècle, Newton, Leibniz avaient ouvert la voie. Puis leur outil s'était révélé insuffisant à certains emplois nécessaires. L'allemand Riemann, le mathématicien doué du génie le plus imaginaire et le plus puissant du dix-neuvième siècle (sous la réserve des titres de Poincaré), recréa l'instrument par une innovation hardie, opérant une révolution des idées. Mais avec les années la fécondité de l'intégrale riemannienne se trouvait exploitée jusqu'à l'épuisement et les limites de son pouvoir atteintes partout. Sur les terres neuves de l'Analyse mathématique les expéditions conquérantes marquaient le pas. Lebesgue fut le thaumaturge dénouant les liens où tant de compagnons d'avant-garde étaient comme par un enchantement retenus. J'ai entendu soutenir par un étranger que la découverte de Lebesgue pouvait sans lui se faire attendre cinquante ans. C'est le délai dont la science devrait à Lebesgue la merci.

*

* *

On ne saurait trop exalter le rôle de ces conjureurs de sortilèges par le magnétisme de qui s'évanouit à notre vue l'échafaud des barrières dissimulant le secret d'un palais féerique.

Les pionniers dans leur marche laborieuse et patiente sont arrivés au pied d'une sombre muraille de rochers, haute au point de leur masquer le ciel aux abords du zénith. A leur droite et à leur gauche s'élèvent les montagnes abruptes creusant le val dont ils foulent, désarmés, le fond. Une lumière avare s'appauvrit jusqu'à eux. C'est un bout du monde. Sur la veille de chacun la solitude, les ténèbres s'alourdissent. Et voici que, à la voix d'un seul, charmes et prestiges opérant sous cette unique parole, au sein du colossal bloc noir, dalle funèbre murant un sépulcre d'espérance, une aube semble poindre. Une lueur de grisaille, une phosphorescence fluide se répand à travers la masse géante. Elle en franchit les contours. La roche s'est dissipée dans une nébulosité encore épaisse et blafarde,

mais qu'une flamme toujours invisible éclaire et dilue d'instant en instant davantage. Puis, comme dans le conte slave, tandis que les derniers lambeaux de brume fuient vers le haut du ciel, aux yeux de l'armée envahissante saisie d'admiration et troublée, la ville sacrée apparaît sous son diadème de clochers, dont les bulbes enveloppés d'or réfléchissent en dards éblouissants les rayons du soleil vainqueur.

Une découverte, celle de l'intégrale de Lebesgue, n'est d'abord entendue en son vrai sens que de rares adeptes, prompts à éclairer de ce flambeau saisi quelques coins obscurs de la science. Même la réaction générale est hostile et vive contre l'irruption d'une idée balayant sans égards les jugements révévés. Lentement, mais irrésistiblement, la lumière pénètre un monde d'esprits de plus en plus étendu. Une heure vient où, dans cet ordre de pensées, la dernière acquise des grandes vérités apparaît à tous comme le jour clair, évidente, et pour finir banale.

II

La science peut à tout moment recevoir d'un savant isolé une impulsion, une orientation inattendues. Comment obéirait-elle à un plan préparé? Monument édifié par l'effort collectif des générations humaines, et dont la croissance ne devrait s'arrêter qu'avec l'extinction de notre espèce, comment ce travail toujours poussé vers des fins inconnues suivrait-il un cours tracé d'avance ou même prévisible à courte échéance?

Déjà pour une construction limitée, enfermée dans une fraction de la vie d'un homme, le plan lui préexiste-t-il? Un même travail de gestation n'enfante-t-il pas de l'œuvre tour à tour les éléments dissociés et l'ordre qui la parfera? Naissant de bourgeonnements progressifs, elle est conçue dans ses membres disjoints avant d'être au sein de l'esprit montée en assemblage organisé.

Le fleuve ne dit pas: «Je creuserai mon lit d'abord. J'y coulerai ensuite.» Le fleuve creuse son lit en coulant et à force de couler il

lui donne une forme nette.

Jamais nulle science ne connaîtra le plan qu'elle met en œuvre. Car un indéterminé sans borne la séparera toujours de son terme.

N'obéissant pas à un plan préconçu, c'est une création.

La science va vers sa destinée à la façon d'un flux de lave lourde et boueuse. Dans l'épaisseur de la masse et lui imprimant son mouvement, mille bêtes grouillent, se multiplient en une fièvre active. De loin en loin l'une d'elles, monstrueuse, surgit de la surface et brise le front du flot. La traîne visqueuse pendant de ses élitres et de ses pattes de faucheur dépose sur le sol la trace où se déviara un bras du paresseux courant. Et après bien des années, à l'aisselle de la bifurcation, la science encore laissera un emplacement vierge de son passage, tandis qu'une grosse artère de cette circulation fluide aura pris pour amorce et gonflé le sillage marqué jadis par la souveraine hardiesse d'un être se détachant seul devant tous.

Les promoteurs de la science lui impriment, au moins pour un temps, le tour de leurs attraits de pensée et de leur goût, bref leur style. La science en formation présente un caractère changeant et humain, qu'elle perd avec le recul de l'époque, en se décharnant du superflu, en se rétractant à l'essentiel, pour devenir impersonnelle et squelettique.

*

* *

Dans deux courts Traités, toujours avidement lus, — je m'excuse d'en désigner les titres explicitement —, l'un sur l'intégration, l'autre sur les séries trigonométriques, Lebesgue expose sa théorie et le brillant parti qu'il en tire.

La facture d'un ouvrage elle aussi joue son rôle dans la carrière de l'invention qu'il publie. Nous autres mathématiciens, avec notre horreur cartésienne de simuler une descente de Sinaï, environnés de nuages, les bras chargés de tables gravées d'une révélation, puis obéissant à notre conviction spontanée que pour faire paraître le plein sens d'une vérité il faut décrire une voie conduisant naturelle-

ment à son évidence, et encore pour savourer la joie de peindre à d'autres la liesse d'une victorieuse aventure, peut-être abusons-nous de cette démarche maïeutique associant le disciple à l'élaboration de la trouvaille. Cette partie du plant où circule le plus intensément la sève est celle dont le dépérissement sera le moins tardif. Une génération proche, ayant cueilli le fruit, extrait son suc, abattra et jettera le reste.

Le plaisir de la découverte a été si vif que les auteurs semblent vouloir prendre le lecteur par la main pour lui faire suivre avec eux toutes les étapes de leur fortune.

Une chaîne de montagnes dont la crête passe pour infranchissable borne la contrée et la sépare d'un versant inconnu. Descendant et escaladant les pentes des ravins, déchirant ses poignets aux arêtes des rochers et aux épines des buissons, un homme a trouvé la succession des failles l'amenant à la brèche insoupçonnée par où l'accès aux terres d'outre-mont, ignorées et fécondes, est désormais facile. A qui veut l'écouter, l'auteur de la découverte, tout à son propre bonheur, ne fait pas grâce d'un détail touchant les conditions où s'offrait le problème de sa recherche, les hypothèses naturelles à envisager, comment l'une après l'autre furent-elles controuvées par le relief et les accidents du sol, jusqu'à une dernière qui, circonvenue par intuition heureuse et déduction habile, enfin livra la clef de la solution.

Mais plus tard, la sente tracée par l'inventeur, avec ses escarpements gravis, ses plongées abruptes, ses détours qu'une connaissance approfondie de la montagne permettait d'éviter, tout ce vénérable pittoresque de l'inspiration novatrice, tout cela est négligé, puis oublié. Sur les vestiges de ce chemin, l'abrégeant par endroits, une large route s'est construite. Le public n'en connaît plus d'autre. S'élevant par une pente égale, enjambant les gorges sur des ponts, serpentant au flanc des montagnes, elle gagne le sommet du col. En quelques minutes, cette montée originellement si laborieuse est parcourue et le riche pays qui lui fait suite est atteint.

Il faut dix ans de travaux pour permettre à un train chargé de voyageurs de franchir en vingt secondes la largeur d'un fleuve.

Pour celui qui, ingénieur, entrepreneur, contremaître, a, du premier jour au dernier, pris part à la construction du pont, cette jonction des deux rives est une épopée de rocs noyés, de piles surgies de l'eau, d'immenses raccords de fer les reliant, de croisillons, de rivets, de boulons. C'est avec cela que pendant deux lustres la vie de cet homme s'est confondue. A son sens il y a de l'aberration à s'imaginer comprendre ce qu'est le passage d'un bord de la rivière à l'autre si l'on n'est pas descendu au détail de toutes ces opérations dont son esprit s'est pendant des années repaît à satiété.

Pour le voyageur qui, debout derrière la vitre de son wagon, a vu de loin le ruban d'acier bleui de la rivière sous-tendre l'horizon, puis dans le fracas et le tonnerre du métal trépidant, la terre ferme se démettre, la nappe striée de remous glisser droit sous lui, l'autre berge se rapprocher et grandir, le sol cultivé ou bâti reprendre, à cet homme uniquement occupé du motif et du terme de son voyage, qu'importent cette transition incidente du bond par-dessus le fleuve et l'originelle mise en chantier qui la lui permet?

*

* *

Telle belle réussite sera par les contemporains magnifiée pour avoir couronné un long enchaînement d'efforts vains ou balayé un chaos de vellétés impuissantes. Un avenir prochain ne verra plus en elle qu'une brève liaison entre le périmé et le dès longtemps dépassé.

Lebesgue, bien à tort, se montra confus des dieux qu'il avait destitués, des statues qu'il avait renversées de leur socle. Il se penchait avec piété sur les uns, avec déférence sur les débris des autres. Passé le triomphe gagné par ses victoires, il aurait voulu faire chorus à l'anathème dont les vaincus le réprouvaient.

C'est affaiblir une œuvre, c'est lui imprimer une date et la con-

damner au prompt vieillissement, que de vouloir édulcorer les témérités où elle trouve ses titres par le soin de justifications premières, puis d'hommages, d'apaisements offerts aux idées qu'elle renverse.

Vain espoir de convertir par douceur persuasive le tenant d'une foi invétérée! Son entêtement, passionnel avant tout, étrangle sa naturelle ouverture d'esprit. Si la discussion s'engage, le moins compréhensif est le plus intraitable. Donnez la parole à une borne, elle aura toujours le dernier mot.

Tailler en pièces les idées dont un homme avait fait son credo coutumier, c'est lui arracher le toit sous lequel il abritait son vivre pensif. On ne saurait éluder sa révolte, sa résistance farouche. Composer par dévotion humaine avec la doctrine que l'on s'ape, poursuivre l'alliance de deux Testaments inconciliables, charité funeste, joignant la bouche d'un vivant au râle d'un agonisant!

L'auteur, animé de la certitude que l'avenir adoptera les vérités nouvelles qu'il apporte et abolira les fausses vraisemblances qu'il démasque, cet auteur doit dès son entrée en exorde procéder comme si cette ratification était accomplie et appartenait au passé. Il feindra d'ignorer les idées autour de lui amoureusement cultivées, âprement défendues et qu'il voue au néant. Il présentera son œuvre comme doit l'être au-delà d'une époque oubliée l'annonce d'un futur du moins conjecturé. Ainsi aura-t-il une chance de parler quelque temps à la postérité le langage dont elle usera elle-même. Il reculera d'autant pour son ouvrage le terme de l'inéluctable ruine.

L'œuvre durable, c'est l'arbre tournant ses fruits vers le passé en offrande à des vœux innés ou séculaires, mais plongeant ses racines dans l'avenir.

III

Au départ du travail mental qui le conduisit à l'intégrale, Lebesgue eut sa pomme de Newton: à propos d'un fait banal, dans un éclair la vision d'une cause universelle. Le problème des surfaces géométriques dites développables en fut l'occasion. Il s'agit des sur-

faces pouvant être étalées sur un plan sans subir d'extension ni de déchirure, ni de repliement sur elles-mêmes. On en réalise voici comment.

Prenez un large rectangle de carton suffisamment souple. Posez-le à plat sur une table de marbre. L'adhérence des deux surfaces est parfaite. Gauchissez le carton sans le casser ni le froisser. Vous faites un cône, un cylindre, le flanc d'un abat-jour ou, en imprimant à la feuille une torsion capricieuse, une nappe d'un galbe beaucoup moins régulier et simple. Dépliées sans être rompues ni doublées, ces surfaces reviennent s'appliquer exactement sur le plan de marbre. Elles sont développables.

Toutes les surfaces obtenues comme il a été dit offrent ce même caractère: Si vous posez sur le marbre la feuille ainsi forcée et si d'une chiquenaude vous lui imprimez un balancement, vous observerez que la surface du carton touche toujours la table suivant une ligne droite, et non pas en un point unique comme le ferait une sphère. Cette droite se déplace évidemment à la fois sur la surface et sur la table au cours du mouvement. Les mathématiciens disent que: d'une part la surface est engendrée par la variation d'une droite, — aussi appellent-ils cette ligne une génératrice —, d'autre part, tout au long d'une même génératrice la surface garde le même plan tangent.

Cette double observation fournie par la déformation d'un carton raide, les géomètres anciens démontraient que toute surface développable la confirme.

Mais Lebesgue, sortant un mouchoir de sa poche et le chiffonnant entre ses doigts disait: «Voilà une surface développable. Car elle est exactement étalable sur un plan. Et cependant où se trouvent les génératrices rectilignes de la surface du mouchoir fripé, et le plan tangent invariable tout le long de ces génératrices absentes?»

C'est que l'auguste démonstration des géomètres d'autrefois exigeait que les développables eussent en chacun de leurs points un plan tangent et que celui-ci ne variât pas sinon avec une sereine continuité en accompagnant son point de contact. De sa remarque de sens

commun, Lebesgue concluait que la véritable géométrie des surfaces les plus conformes à notre expérience familière est bien éloignée des théories de son temps classiques, ces dernières idéalisant les conditions de la nature à trop large distance de la réalité.

Seulement, pour agréger au domaine de notre science ces phénomènes nouveaux dont le mouchoir fripé était l'emblème, il fallait réformer jusqu'en leurs principes les notions fondamentales de l'Analyse et de la Géométrie. De cette élaboration sortit l'Intégrale.

IV

Avec ces travaux de Lebesgue, lui-même l'a noté, renaissait en Mathématiques l'universel, l'éternel débat jamais clos, l'imprescriptible grief de la pensée substantielle contre la forme osant s'habiller à la suppléer.

Une forme est créée pour donner une expression à un sujet. L'inventeur de la forme, on doit le supposer, éprouve au plus haut point l'épousaille exacte de cette forme à la réalité qu'elle enveloppe. Puis le sujet est oublié. La forme seule absorbe l'attention. Le jeu d'une symbolique lui est appliqué et la modèle et la transmue. On croit, on feint d'admettre qu'aux mouvements, aux attitudes de la forme le réel ne cesse d'obéir et de s'adapter. Et ainsi jusqu'à ce qu'un nouvel initiateur, retournant aux enseignements de la nature directement sentie, rejette la forme ancienne, en moule une neuve sur le corps à vêtir. Et celle-ci à son tour fera un jour prochain oublier le recours à la souveraineté du réel.

Une expression originale, derme exsudé par une pensée naissante et chaude, est ensuite empruntée comme une dépouille de mue par l'imitation débile et usée, qui s'y glisse pour s'en habiller.

La répétition exclut la sincérité. Même, dans un développement artistique tenir une promesse presque vaut de commettre une répétition.

En cette vaste branche des mathématiques dénommée par nous l'Analyse, l'élément du réel, c'est le nombre; comme pour le poète,

c'est l'image; pour le peintre, la couleur; pour le musicien, le son. Nous envisageons des nombres à valeurs changeantes, les fluctuations de l'un appelé fonction] étant commandées par celles des autres, dites variables indépendantes. A la fonction se rapporte la chaîne des images éprouvées et vécues, des visions ressenties, des réponses mélodiques à l'émotion.

La facture du vers, du tableau, de la phrase musicale, c'est le pendant de l'expression analytique de la fonction. Les mathématiques de Lebesgue, comme celles de ses émules des temps modernes, sont par-delà toute loi d'expression des objets conçus. Les classiques recherchaient la causalité des faits dans les vertus de la forme: Persistance d'une vocation métaphysique, indéracinable de la pensée humaine, bien que toujours refoulée et châtiée à tout progrès du savoir.

Toute métaphysique est contresens à la poésie, à l'art, comme à la science.

Nos âmes externes — la part de nos âmes tournée au-dehors — prennent et échangent par les cinq sens leur connaissance du monde dont le spectacle leur est commun. Nos âmes internes, seules intéressées à la réalité mathématique, déploient pour observer une physique en elles incluse, un complexe de sens dont cinq sont à l'écho des sens externes, mais dont une profusion d'autres retentissent violemment ou sourdement aux éclats, aux poussées, au flux d'une houle, d'un branle de phénomènes dont notre vie intérieure éprouve le perpétuel balancement. La poésie, la peinture, la musique s'évertuent, parfois contre toute possibilité, à traduire dans le langage communicatif, c'est-à-dire fondé sur l'usage des sens externes, ce que les sens internes ont recueilli. Ce langage est la forme, la sensation pensée est le réel.

Mais ce besoin, cette curiosité du réel ne sont-ils pas contraires à la nature de beaucoup, ceux-ci cherchant leur délectation dans le jeu convenu de formes et demeurant inattentifs, indifférents à une substance dont la forme ne daigne même plus emprunter le prétexte?

La plupart des esprits sont de mauvais limiers dont on met vainement le nez sur la trace du réel. A la première forme coupant la piste, ils prennent le change et s'accrochent à elle.

On a dit que ni le soleil ni la mort ne se peuvent regarder fixement. Il nous faut un verre obscurci, un rideau d'illusions pour nous voiler un intolérable éclat. La contemplation des vérités capitales ne saurait être soutenue. Elle détruit ce composé instable de chimie et de psychologie qu'est l'homme.

*
* *

Notre vieux sensualisme français, qui si nettement anime la claire évidence cartésienne et même le précepte de Pascal: «A la définition substituez le défini», notre sensualisme se révolte contre le culte du littéral. Certes à Leibniz nous admonestant pour l'irréductibilité de l'esprit aux sens, nous accordons en une gémissement:

L'intelligence est une matrice que la sensation féconde.

Mais nous redressant, nous préférons: Même dans les hautes mathématiques, tout est sensible. L'abstraction est une imposture.

Taine nous l'a appris: Toute notion d'objet est ensemble d'images, impressions collectées par nos sens et gravées en nous par la mémoire, avec leur innombrable diversité statique et cinématique, à la fois figées dans l'instant et se mouvant vers leur immédiat devenir.

Le problème de l'expression? Nouer autour de la gerbe d'images que l'on nomme l'idée une étroite ceinture de termes transparents.

Les images étant à la poésie ce qu'à l'être vivant sont les cellules, nous ne saurions penser que poétiquement.

Connaître un objet, c'est en posséder au moins une image, trace laissée en notre mémoire par une sensation née de cet objet.

Comprendre une proposition intelligible, c'est à chaque terme faire répondre une image de façon que le système de ces images soit enchaîné et cohérent. Autant de systèmes distincts sont conçus, d'autant de façons différentes la phrase est entendue:

D'un auteur comprendre la pensée formulée, c'est retrouver tou-

tes les images présentes en son esprit quand il a voulu en arrêter l'expression. Si l'œuvre suggère bien d'autres images que celles dont il a eu le sentiment, elle va au-delà de l'idée qui l'inspira.

L'œuvre a choisi un cerveau pour y naître. Celui-ci remplit sa tâche hermaphrodite: engendrement, conception, gestation, révélation au jour. Détachée du sein qui l'enfanta, l'œuvre appartient à tous. D'autres découvriront en elle plus que son géniteur lui-même n'y connut.

Le germe sitôt fait aspire à descendre son cours, ignorant de sa source. Dès l'état d'embryon, le fruit a sa vie propre. A son tour l'œuvre éclore féconde. Par des générations renouvelées sans limite, elle est la souche d'une postérité dont le semeur originel n'avait aucune prescience possible.

Souvent la création passe le créateur.

Mais de quelle idée la prolifération indéfinie a-t-elle fait le monde ?

Les images dont la méditation du mathématicien se nourrit ne sont pas des évocations de sonorités, d'odeurs, d'impressions gustatives ou tactiles. Ce sont des visions et d'autant plus révélatrices qu'elles gagnent moins à être saisies concrètement en des traits. Dans les théories les plus modernes où le discontinu joue le rôle essentiel, où le continu est rompu en débris dont la masse totale subsiste, mais qui, observés à tel grossissement que l'on veut, ont chacun leur diamètre toujours inappréciable et sont écartés toujours les uns des autres, comment la plume sur le papier rendrait-elle un dessin fidèle transmettant à la rétine étrangère la figure de ce paysage fixé jamais, en perpétuel changement, visible au seul regard interne ?

*

* *

A l'opposé de ces conceptions, certainement fidèles aux vues de Lebesgue, la tendance actuelle est à l'axiomatisation de la science. Lebesgue ne sympathisait pas avec cet engouement.

Les mathématiques se partagent en de nombreux chapitres dis-

tinets dont chacun est dominé par un système spécial de notions générales, liées entre elles par des propriétés fondées sur de certains raisonnements. On a observé que telles notions, rencontrées dans des corps de pensée divers, sont autant de visages empruntés par un même concept universel pour figurer dans ces différentes sociétés du règne numérique. Cette remarque est d'un grand intérêt. Elle ouvre sur le paysage de la science le belvédère des synthèses.

Le danger est ailleurs. La scolastique, l'hydre dont les cent têtes ne seront jamais irrémédiablement tranchées toutes d'un même coup, nous guette et nous menace de ses résurrections indéfinies. Meule puissante à broyer le vide, mais inapte à tirer quelque farine du moindre grain, de quelle superbe n'enfle-t-elle pas l'âme de ses disciples invincibles dans les joutes stériles du verbalisme! Certes, les mathématiques ne sont pas descendues à ce stade.

Mais ces universaux abstraits, dépouillés de tout contenu sensible, on nous montre que si nous leur appliquons aveuglément les mécanismes de la logique, sans aucun besoin d'évoquer ces concepts en l'une de leurs physionomies familières, toutes les vérités composant le patrimoine actuel des mathématiciens s'offrent une à une, reconnaissables individuellement sous des schémas communs. Et la découverte de toutes les vérités futures encore inconnues est, nous affirmet-on, assurée par le même procès loin de tout appel au sentiment direct de la nature, tel qu'il s'acquiert au contact des faits d'expérience ou d'observation. N'est-ce pas là, ressuscitée, la prétention de scolastique?

La production mécanique illimitée d'énoncés exacts ne serait d'aucun secours, puisqu'une pensée vivante devrait finalement mesurer la portée, le rang d'intérêt, de chaque proposition obtenue. Il sera toujours plus court de se demander, en tel état de la science, quelles questions importantes et générales sollicitent une réponse urgente et de chercher celle-ci en s'aidant des ressources contemporaines offertes par le savoir humain.

On pourrait certainement inventer une machine à fabriquer des sonnets. Disposant de collections complètes et répétées des mots

français assortis de leurs flexions distinctes, elle saurait les grouper sans enfreindre les règles de la métrique, de la prosodie ni même de l'accord grammatical. Le constructeur se targuerait valablement de reproduire immédiatement avec son appareil tout sonnet déjà publié, et d'émettre en un temps fini tous les sonnets possibles passés et futurs.

Mais pour découvrir de beaux morceaux de vers, serait-on plus avancé de fouiller cet amoncellement inconcevable de pièces correctement rythmées qu'en se fiant à l'imagination future des poètes? Avant d'admettre ces tirades fabriquées à la dignité de poèmes il faudrait s'assurer qu'elles ne sont pas éliminées de par certains critères négatifs, irréductibles à l'automatisme. D'abord l'assemblage des mots devrait offrir une possibilité de sens littéral, et cette condition serait la moins subtile. La suprême épreuve serait le jugement de valeur, purement subjectif, inspiré d'une philosophie et d'une esthétique, pour apprécier l'intérêt du sujet, le linéament du dessin. L'ingéniosité réglant des connexions et engrenages inertes ne peut pas suppléer à la discrimination par la conscience animée. Le discernement de la qualité est l'attribut de la vie. Aucune manœuvre de matière morte ne saurait y prétendre.

L'art est élection de traits. Vivre, c'est choisir. Ame vivante: substance qui librement élit.

V

Le transfini occupe dans l'œuvre de Lebesgue une place éminente. Transfini! par-delà l'infini! mots plongeant le profane dans des rêveries émues, nébuleuses, et intriguées. Or le transfini est dans notre nature, à l'infini rebelle.

Cinq siècles avant notre ère, Zénon d'Elée démontrait qu'Achille, le plus rapide entre les coureurs grecs, lancé à la poursuite d'une tortue, ne pourrait jamais atteindre l'animal. Car, disait à peu près le philosophe, l'homme aurait à franchir une succession indéfinie d'étapes et d'instant. En effet, au premier instant Achille part. Il est à

une certaine distance de la bête. En un second instant, il a parcouru cette première distance, mais la tortue a progressé. Et Achille se trouve devant la même difficulté qu'au début. Il est encore à une distance effective du balourd chélonien. En un troisième instant, quand le coureur aura franchi cette seconde distance, l'animal sera encore devant lui. Et ainsi indéfiniment. Il faudra compter une infinité d'instantanés préliminaires avant de parvenir à celui du contact.

Néanmoins ce suprême instant arrive.

Et l'allemand Cantor en conclut qu'il est possible de concevoir un rang immédiatement ultérieur à tous les rangs numérotés par des nombres entiers. Tout s'échelonne, dit-on, entre l'alpha et l'oméga. Pour Cantor, cet oméga est un nouveau commencement, le premier nombre transfini, laissant derrière lui la suite inépuisable des entiers finis.

En fait, dans cette évocation de la course d'Achille après la tortue, nous pouvons imaginer à peine quelques repères initiaux, trois, quatre, cinq. Notre pensée se fatigue promptement à gravir l'échelle numérique. Après s'être posée sur quelques-uns des premiers degrés, elle saute immédiatement à celui qui tous les domine. Nous tentons de saisir directement ce qui serait consommé si la chaîne sans fin des étapes était intégralement déroulée.

Ainsi, pas le seul infini, le fini très grand lui-même nous est inaccessible. Nos vains essais de le concevoir se lassent vite.

L'esprit de Dieu se joue de l'innombrable, mais il demeure dans le fini et le discontinu. L'esprit de l'homme, accablé sous l'innombrable, pour échapper à sa déroute se jette dans ses refuges de l'infini et du continu, créés par lui pour donner asile à sa panique.

*

* *

Avec son oméga, Cantor inaugure le nombre transfini. Mais, la tortue atteinte par Achille, celui-ci peut en apercevoir une autre devant lui. Une nouvelle gradation infinie se présente, qu'il faudra décrire en sa totalité et qu'un nouveau nombre, émule de l'oméga, relèguera derrière lui. Il n'y a plus de tortue qui tienne, le méca-

nisme est en route. Des bonds se succèdent, se perdent vers l'infini. La barre d'un oméga les arrête, puis sert de nouveau palier à une ascension ultérieure.

Cependant une entreprise illusoire nous tente. On voudrait construire une arithmétique pour ces nombres du par-delà le fini. Il est de leur essence que jamais ils ne se laisseront courber tous sous une loi unique. On agrandit de plus en plus le filet où l'on cherche à les envelopper. Au-delà de ces extensions, qui ne cessent de gagner du champ comme faisait le progrès d'Achille vers la tortue, il y a toujours un premier nombre échappant à elles toutes et posé sur leur front comme la couronne dérisoire de leur insuffisance finale.

Mais on veut se persuader d'avoir trouvé, de tenir le talisman qui nous enlèvera par-dessus toutes les lices capables de nous arrêter. Cette fois, l'élan sera si fougueux, la chevauchée si impétueuse qu'un bond suprême nous dressera au faite du glacis. Le paladin croit à l'égalité constante de son galop toujours acharné. L'observateur voit le cavalier et sa monture diminuer d'instant en instant, leur dimension fondre à ses yeux. La course inlassable s'inscrit toujours davantage dans un insensible piétinement. Astreinte par plus et plus de rigueur étroite, elle tend sans pouvoir l'atteindre à un seuil devant lequel sa carrière infinie expirera, mais qui plus tard sera le tremplin d'où s'emportera la cavale d'une nouvelle ambition aussi bouillonnante, aussi folle et aussi vaine que les précédentes.

Et le même leurre toujours nous séduira. Encore le chant de la sirène nous ravira. Nous croirons enfin la tenir enserrée. L'étreinte se fermera sur notre poitrine. Nous aurons emprisonné le néant. Puis, relevant les yeux, à la ronde promenant le regard, nous reverrons non loin de nous le visage charmant, les carnations irisées et diaphanes, l'appel et la promesse des bras ouverts attisant la même espérance et concertant la même déception.

Toutes ces quêtes patiemment, longuement suivies par des replis de ténèbres, ces analyses obstinément fouillées, autant de coups de sonde jetés court au-dessus d'un abîme sans fond.

VI

Quel est donc pour le mathématicien ce bonheur de la vérité révélée par la découverte, si brûlant que l'auteur veut le faire envier à tous ?

On cite le transport d'Archimède, frappé de l'idée dans son bain, se précipitant nu par les rues de Syracuse en criant : « J'ai trouvé ! » pour en porter à la hâte la nouvelle au tyran qui avait posé le problème brusquement résolu.

Au terme d'une investigation obscure, opiniâtre et pénible, soutenue par la seule confiance que le mystère et le secret enveloppent la beauté d'une Phryné, observer les voiles un à un tombant jusqu'à l'apparition de la statue de chair, c'est la récompense esthétique dont se laure une éclatante victoire.

Est-ce bien l'empyrée d'ivresse où bondit l'âme d'un Wagner, d'un Beethoven, quand il entend, il voit, assourdi de leur vacarme, aveuglé de leurs foudres, les clameurs de l'inspiration et toutes les flammes de l'idée ?

*
* *

Les mathématiques, dit-on communément, renferment une poésie. Certes. Mais où n'en trouve-t-on pas ? Voyez le Sahara. Scintillement de l'horizon à travers l'espace grésillant sous les midis torrides, déclin du jour sur des couchants de solfatare incendiée, anciens lits de mers desséchées dont le sel a revêtu le fond d'une galvanoplastie d'argent posant au creux du désert une vasque trop aveuglante, magie des sables enchantés de mirages, ces phases d'une même splendeur invitent aux images de la poésie.

Retirez cette lumière fantasmagorique apportée d'ailleurs, ses feux nuancés jouant sur l'arène jonchée d'ossements blémis. Subsistera-t-il la palpitation d'une vie endormie sous l'ombre nocturne ? De nulle pulsation, de nulle vibration ne tressaillera le champ de la mort.

*
* *

Le climat des mathématiques est commandé par les rigueurs d'une logique implacable. Mais ce despote est imparfaitement gardé de l'incohérence et de l'erreur. Toute création d'une variété nouvelle d'infini l'a fait trébucher. Le transfini lui ménagea une épreuve dont il ne s'est pas encore tiré victorieux. Philosophes et mathématiciens ont uni leurs efforts pour dénouer la crise. L'avis donné par Lebesgue à ce propos garde encore tout son poids. La trêve est ainsi venue: en se gardant de toute affirmation de foi, chacun, adoptant indifféremment les explications rivales, devra s'appliquer à pousser leurs conséquences raisonnées aussi loin qu'une première contradiction surgie n'aura pas rendu caduque l'hypothèse mise en échec.

Ce tyran sourcilieux, cette raison oublieuse de ces carences, maudissant tout entraînement imaginaire ou sentimental, nous dicte des leçons moroses, quasi-lugubres:

Intuition? Illusion. — Chaleur et conviction? véhicule habituel de l'erreur. — La preuve par l'hymne trouve en nous des oreilles sourdes.

*
* *

Le Dieu de Platon et celui de Vigny se répondent.

Le premier, absorbé de calculs, — «et toujours le dieu géométrise», dit l'Athénien —, rapportant ses inspirations à la froide nature de la ligne et du nombre, insoucieux des besoins affectifs de l'homme, harmonise l'univers par la vertu des figures et des proportions exactes. Sur la règle de ces conceptions l'esprit du savant se modèle inévitablement. A vouloir atteindre les ressorts et les rouages imprimant son mouvement à l'horloge du monde, à retirer de l'entrecroisement inextricable des causes et des effets enchevêtrés les fils conducteurs des liaisons fondamentales, — le savant débrouille l'écheveau de Dieu —, la pensée tend à se fondre en celle de la divini-

té et s'éloigne pour autant de l'humain. La compréhension réciproque des âmes s'affaiblit. Pour l'esprit dressé aux disciplines de la science, les évidences communes pâlisent et s'éteignent. D'autres s'allument devant lui, obscures à la foule. Cet écart grandit avec le progrès de l'individu pénétrant davantage en ses secrets le Système de la nature.

La sottise des hommes doit être un mystère pour l'intelligence de Dieu.

Entendons maintenant Vigny nous parler outre-tombe : Dieu n'est ni bon, ni moral, ni juste. Artiste, ayant de l'artiste la cruelle insensibilité, il a donné aux espèces pour ferment de perpétuité l'amour dont il n'a pas gardé sa part. Effusions, larmes, béatitudes : mécanisme d'hormones suintant aux bons endroits. A l'humanité nul espoir, nul recours sinon en elle-même.

La femme, — peut-être surtout notre Française —, gardienne de l'âme instinctive du genre, n'aime pas la science. La science n'est pas la civilisation. Celle-ci est fleur humaine, l'autre ronce et chardons divins. La mystique du savant, tendue vers la nudité grossière et brutale du vrai, doit répugner à celle pour qui parure et costume sont aussi bien total symbole et certaine réalité.

Civiliser, c'est instruire de feintes. La science est fermée à l'amour et au mensonge, également.

VII

En Lebesgue désormais cherchons l'homme.

Nous souhaitons voir les qualités du cœur parer les dons de l'intelligence. Il nous faut que de chaleur humaine demeure baignée une âme qui pouvait se glacer à vouloir épouser le génie de la divinité.

Lebesgue nous apporte à cet égard tous apaisements. Il fut bon époux, excellent père, sociable et de plaisante compagnie.

De subir les griffes de la chimère sans miséricorde ni pause crispées dans sa chair pensante n'avait pas aigri son humeur.

Il était la loyauté, la franchise mêmes. Je me rappelle une visite de candidature académique rendue à l'un de mes professeurs de jadis et où ce dernier, puisant une image dans ses souvenirs de volontariat, clama tout vibrant : « Lebesgue ? il est droit comme un sabre de cavalerie ! » N'ayant jamais tenu en mains une arme de cette sorte, j'eus recours à la gravure pour vérifier que l'expression de ce jugement ne démentait pas son accent pénétré.

Une polémique, dont le souvenir n'est pas perdu, opposa Lebesgue à l'un de ses collègues. Notre héros mena sa partie avec la fougue de son tempérament, mais sans manquer aux lois d'une probité scrupuleuse et chevaleresque. Le temps était longuement dépassé, il n'était pas déjà revenu, où cette constatation vaut éloge.

*
* *

Lebesgue avait le talent de faire sourdre de ses moindres propos le comique. C'est un pli de l'esprit auquel peut-être la pratique de notre science l'avait disposé.

Nous autres mathématiciens administrons nos preuves autant par ironie que par maïeutique.

Nous appelons nos vérités des théorèmes. Un théorème d'abord formule relativement à certains objets une hypothèse, condition supposée remplie par eux. Puis il affirme qu'une conséquence logique de cette prémisse est la jouissance par ces mêmes objets de telle propriété formellement distincte de l'hypothèse. La question est de légitimer par le raisonnement cette conclusion. Deux voies s'offrent à notre choix.

Ou bien, accrochant solidement à la donnée de l'hypothèse la chaîne alternée des « puisque » et des « il s'ensuit », nous aboutissons inexorablement à la conclusion prédite. Si nous avons eu soin de déclarer à l'interlocuteur la seule hypothèse, en lui cachant la conclusion qui est notre but, si nous feignons de laisser trouver à notre dialecticien et par lui-même, un à un les poussant sous sa main, les

jalons successifs du progrès inductif, si nous lui inspirons l'illusion d'arriver par sa réflexion propre au terme où nous le conduisons à son insu, la maïeutique a joué.

Ou bien nous déclarons le théorème faux. Nous posons que le contraire de la conclusion est le vrai. Tel est notre départ. Tandis que nous pensons des « si » commandant des imparfaits et appelant au conditionnel leurs conséquents, devant notre partenaire nous nous tenons affirmatifs. Nous le conduisons de pas en pas jusqu'au point où l'impossibilité de l'hypothèse éclate. C'est le fossé où tout l'échafaudage dressé sur une base inconsistante s'écroule. La conclusion était vraie, puisque supposée fausse elle anéantit l'hypothèse. On a raisonné par l'absurde. C'est l'ironie.

Et dans les propos de la vie usuelle, telle est bien la signification de l'ironie. J'adopte un instant votre idée. Je lui laisse parler sa logique. Voyez l'allégation ridicule ou stupide où elle mène spontanément très vite: votre opinion n'était pas soutenable. Mais le raisonnement est à peine esquissé. On vise d'un doigt léger les quelques rocs semés en travers du gué, sur où saute le pied pour gagner l'autre rive. Si, loin de laisser beaucoup au soin de deviner, le discours décrivait avec complaisance le déroulement inductif des propositions implicites, les voies de l'ironie socratique apparaîtraient, limitées généralement bien sûr à un court trajet.

Indisposant celui qui la souffre, l'ironie éveille la gaieté chez celui qui en jouit.

On rit de connaître l'avantage d'être soi.

Avantage intrinsèque? Le rire est béat, inoffensivement. Les visages alentour l'adoptent et le reflètent. Avantage de comparaison? Le rire désoblige, vexe, irrite, injurie.

L'ironie de Lebesgue n'était pas incisive ni mordante. Évitant les allusions individuelles, elle campait d'un mot la caricature d'une opinion anonyme et commune. Nul n'en était blessé. Elle n'écorchait pas les amours-propres.

*
* *

Au dire de Swift, la politique est la marotte des mathématiciens.

Lebesgue mourut en juillet 1941, ulcéré dans son orgueil national par l'insulte constamment ressentie à subir la vue du soldat étranger maître de nos rues et le mépris affiché par le vainqueur pour toutes les valeurs spirituelles de la France.

Mais, au regard du penchant à la politique, Swift eût déclaré Lebesgue mathématicien douteux. Peut-être une rare pureté d'âme fait-elle pâlir l'intérêt porté aux affaires publiques. On se plaît à noter les divorces fréquents de la morale et de la politique. Faut-il s'étonner si, même se cotoyant, elles ne se mêlent pas? En l'une et l'autre la source de la doctrine est si différente!

Kant nous dit: Pour établir votre loi morale, inquiétez-vous des meilleures convenances d'autrui. La règle qui, adoptée par tous, procurerait la plus grande satisfaction à l'ensemble des hommes doit devenir la vôtre.

Pour fixer nos opinions politiques, nous suivons l'ordre inverse. Imaginez le plus large rayonnement d'occasions et de facilités où, dans toutes les directions possibles, vos goûts, vos intérêts, vos appétits s'épanouiraient sans nul obstacle. L'étoile de vos convenances idéales entre ses bords dessinera le système de vos convictions politiques, le moule dans lequel vous souhaitez couler la société.

Les mathématiciens de Swift ont sur beaucoup l'avantage de savoir comment les tendances simultanées multiples, concurrentes ou divergentes, se composent entre elles dans une résultante unique, dissemblable à chacune d'elles. La politique des grandes masses, États, vastes partis doctrinaux, subissant l'impulsion de facteurs immanents supérieurs aux variations des caprices temporaires, cette politique serait la plus promptement accessible aux mathématiciens. Peut-être démêleront-ils moins bien le chaos de tourbillons et de remous entretenu par le désordre des forces affectives ou persuasives et observé à l'échelle de la molécule humaine.

Ils sont pour la plupart opposés aux inégalités sociales étrangères au mérite personnel. « Il n'y a pas en Géométrie de chemin privilégié pour les rois », disait un ancien à son souverain qu'il instruisait. Leur pied toutefois ne perd pas son appui sur le sol. Altruisme et générosité, certes, mais suggérés par la raison calme. La solidarité des hommes se heurte à cette borne, que chacun jouit pour son compte et jamais pour le compte d'autrui.

Mais ne blasphémons pas la vertu de l'amour.

Comme si l'âme de Lebesgue avait gardé une angélicité d'adolescence, il se tenait volontairement ignorant ou sereinement indifférent à l'égard de tout ce qui est enjeu de batailles sociales. Il n'eût certainement pas ressenti le présent désarroi de l'opinion : dans les conjonctions gouvernementales, tous les partis perdant leur virginité, plus de partis vestales, tous les feux sacrés s'éteignant. . .

VIII

Parlons de sa vie scientifique.

Lebesgue écrivit peu, si l'on considère l'ampleur du mouvement imprimé aux mathématiques par ses idées. Il savourait le plaisir d'imaginer, de voir naître l'esquisse. Il reculait devant les douleurs d'accomplir laborieusement l'œuvre. Le plus agréable est de concevoir et le moins d'enfanter. Toutes les mères en témoigneront.

Il avait une façon très personnelle et singulière de lire les productions des autres. Il lui est arrivé plusieurs fois, — il s'en amusait beaucoup lui-même ensuite —, de quereller un auteur sur une prétendue opinion gratuitement prêtée à celui-ci par Lebesgue, alors que la rectification exigée par ce dernier reproduisait tout uniment le texte initial de l'autre.

La lecture n'était pas pour Lebesgue une abdication de la personnalité, une démission de sa pensée propre, s'abandonnant docile à une gouverne étrangère. De l'article parcouru d'un coup d'œil rapide il extrayait de sommaires indications et il en tirait sa conclusion sur le sens de la question étudiée et la voie adoptée pour la résoudre.

Partant de ces données succinctes, il prétendait restituer le travail de l'auteur. S'il lui arrivait de tomber dans le piège d'une erreur séduisante, d'apercevoir sa malencontre, de s'évader par une ingénieuse ressource, il hésitait à croire son confrère capable d'avoir traversé indemne la même embûche. Aussi lui reprochait-il la méprise que l'autre avait su se garder de commettre.

Accoutumé à creuser le fond de sa propre pensée et à plonger toujours plus avant son forage, s'il remontait à la surface du sol et découvrait autour de lui l'orifice des modestes puits ouverts par les chercheurs, il ne se sentait pas le goût de répondre à l'appel de ceux-ci pour les suivre dans leurs descentes limitées. Il préférait de sa propre mine creuser une galerie pour les rejoindre.

Savoir lire, savoir écrire : talent reconnu aux lauréats des écoles enfantines, ou bien, sous une entente de manière, aux hommes les plus foncièrement cultivés ; à l'exemple de cette décoration de l'armée, décernée glorieusement aux soldats héroïques et libéralement à des subalternes chevronnés, ou réservée aux premiers des chefs.

Certains esprits, immédiats, bondissants et légers, sur-le-champ réagissent aux invites offertes par le propos d'autrui. Ils criblent de flèches courtes et menues l'épiderme du sujet, sans atteindre le cœur. D'autres, plus lents à émouvoir, exercent sur l'obstacle une pesée continue et croissante, jusqu'à l'éclatement des ais, l'écroulement de la muraille. L'intelligence de Lebesgue joignait la force à la vivacité.

*
* *

Les consécration officielles ne lui manquèrent pas.

Les Compagnies savantes — ou lettrées — élèvent jusqu'à elles ceux qu'elles distinguent. Elles haussent par-dessus elles ceux qu'elles méconnaissent.

Malgré les réactions tumultueuses provoquées par ses premières publications, Lebesgue n'eut à se plaindre ni des Facultés ni de l'A-

cadémie des Sciences. Il n'attendit jamais indûment son tour. Il obtint l'honneur de choix d'enseigner au Collège de France.

*
* *

Il a noté, en y reconnaissant un peu son histoire, le désenchantement des mathématiciens âgés, à l'égard, dit-il, « de la science qu'ils ont tant aimée ».

Le jeune homme, recevant son initiation à la Géométrie, à l'Algèbre, s'émerveille de pouvoir, par la seule vertu de la raison sévèrement endiguée contre la fantaisie, déterminer, fonder sur quelques postulats les propriétés de l'espace, puis la mécanique et maint rameau de la physique. Il conçoit l'espérance démesurée d'investir dans l'enceinte clôturant l'empire du nombre la totalité de l'Univers. Mais la voie sur laquelle il s'élançe reste indéfiniment droite. Il attend vainement l'indice d'une incurvation latérale révélant que sur elle-même se fermera la course. Les pays laissés sur le bord du trajet et qu'il rêvait d'enclorre à l'intérieur d'une circonvallation immense, restent passés définitivement, sans retour perdus à sa connaissance.

A cette mélancolie d'avoir trop escompté du secours de leur science, les mathématiciens vieilliss ajoutent l'usure commune infligée par le temps aux facultés d'enthousiasme, devenues paresseuses et exigeantes.

Tel est le dernier lot de nos esthétiques lassées: la laideur nous écœure, la beauté nous ennuie, à moins de nous brûler l'œil de son diamant.

Lebesgue souffrit de voir son ciel se dépeupler des astres dont l'illumination avait grisé d'extase son âge ardent. Mathématicien d'abord de goût, de passion, en fin le demeura-t-il par destination.

*
* *

Notre peuple détient l'apanage d'une élite exquise, recrutant à tous les niveaux au-dessus de l'étiage social ses membres, commençant à l'humble animateur d'une modeste entreprise.

Et il y aura toujours guerre latente ou déclarée entre la masse des Français et leur élite.

Dans la couronne des meilleurs Lebesgue avait sa place légitime. Sa mémoire est digne d'être conservée et honorée en sa patrie.

A cette vue d'ensemble sur la vie et l'œuvre de Lebesgue, ajoutons quelques détails.

L'agrégation acquise en 1897, il resta comme bibliothécaire-adjoint deux années complémentaires à l'École Normale. Ensuite il enseigna jusqu'en 1902 au Lycée de Nancy, et dès lors dans les Facultés, à Rennes, à Poitiers, enfin à Paris depuis 1910. En 1921, il quitta la Sorbonne pour le Collège de France, où il succédait à notre confrère Humbert.

Il prisait très haut dans son œuvre personnelle sa théorie de la mesure des ensembles. Les Anciens avaient appris à mesurer en leurs longueurs, aires, volumes le cercle, la sphère, le cône, le cylindre, etc.. Ces figures géométriques sont des ensembles de points groupés dans le plan ou dans l'espace suivant certains modes. Cantor avait abordé l'étude générale des ensembles de points et défini parmi eux des espèces et des classes. Après lui le problème se posa de mesurer ces configurations pour la plupart toutes discontinues. Borel avait de 1894 à 1896 trouvé et fait connaître les éléments complets de la solution. Lebesgue, sans avoir remarqué ce travail, fit la même recherche, puis soutint avoir amplement dépassé Borel sans rien lui devoir.

En fait les ensembles mesurables par le procédé de Lebesgue l'étaient déjà tous par la méthode de Borel et de la même façon. Toutefois ce dernier ne paraissait pas avoir soupçonné ce dont Lebesgue ne doutait pas, à savoir l'existence d'ensembles non mesurables du point de vue euclidien, c'est-à-dire non susceptibles d'une évaluation qui restât constante dans tout déplacement.

Cependant, l'application la plus importante de la mesure des ensembles — et Borel n'avait pas abordé ce sujet — était l'intégration des fonctions. Ici Lebesgue fut un novateur incontesté. Il croyait que la mesure borélienne n'avait pas la portée de la sienne et qu'elle procédait d'une vue plus étroite parce qu'au lieu de progresser de la mesure à l'intégrale, c'était de la conception originale de l'intégrale que Lebesgue était parti pour obtenir comme cas particulier d'une intégration (celle des fonctions égales uniquement à 1 ou à 0) la mesure des ensembles.

Les deux notions, intégrale et mesure, se mêlent intimement. Pourtant, si la mesure est selon Lebesgue un cas particulier de l'intégrale, il est beaucoup plus vrai que l'intégrale d'une fonction d'une variable est une aire, donc une mesure dans le plan. Aussi le problème de l'intégrale avait sa solution incluse dans celle de la mesure. En puissance les résultats de Borel contenaient ceux de Lebesgue. Mais les considérations de cette sorte, presque évidentes à celui qui, longtemps après l'événement de découvertes historiques, en étudie la genèse, sont normalement impénétrables aux inventeurs de ces vérités universelles, généralement rencontrées par eux en pleine nuit, sur une route qu'ils frayaient pour atteindre un but plus éloigné et souvent plus étroit. Borel avait trouvé la mesure des ensembles en cherchant à étendre la notion de fonction monogène d'une variable complexe. Lebesgue obtint la mesure en cherchant l'intégrale. Et celle-ci était-elle pour lui une fin, ou simplement une étape inévitable pour remplir le programme d'agrandir le domaine d'application de nombreuses formules fondamentales vers des régions où l'intégrale de Riemann perdait son sens?

En possession de cette arme nouvelle et puissante qui avait manqué à ses prédécesseurs, Lebesgue engagea aussitôt une campagne de brillants succès: calcul de fonctions primitives, développement en séries trigonométriques pour les fonctions rebelles à l'intégration riemannienne; et la découverte qu'une immense variété de propriétés, dont l'exactitude universelle est fautive, peuvent être vraies « pres-

que partout», c'est-à-dire si l'on néglige une exception rencontrée seulement sur un ensemble ponctuel de mesure nulle.

Borel avait introduit dans l'Analyse, et depuis plusieurs années, les ensembles s'obtenant à partir des intervalles par répétition indéfiniment accumulée des deux opérations alternées: réunion et intersection commune d'une infinité dénombrable d'ensembles d'espèces connues. D'autre part, Baire venait d'étudier les fonctions définies à partir des fonctions continues par des passages à la limite de suites convergentes, opération elle aussi répétée indéfiniment et transfiniment.

Lebesgue montra la solidarité des deux théories. Il établit l'existence effective de toutes les classes de fonctions considérées par Baire, et encore l'existence de fonctions étrangères à cette classification. Lusin et son école de Moscou retirèrent plus tard de cet admirable mémoire les principes de vastes théories nouvelles.

On trouverait difficilement illustration plus remarquable de la manière dont différents cerveaux, pareillement doués de génie, offrent ou opposent à la révélation d'une même connaissance chacun leur système propre d'affinités ou d'atonies. Aux uns cette vérité demeure inanimée et stérile. Pour un autre, l'épousaille avec l'esprit est intime et féconde. L'intelligence enrichit de rejetons l'idée dont elle s'est éprise.

Dans l'ordre chronologique, Borel, Baire, Lebesgue ont publié leurs découvertes en théorie des ensembles et des fonctions de variables réelles au cours d'une même période inférieure à huit années (entre 1894 et 1902). Et leur œuvre contient en germe une grande part des mathématiques modernes. Or Borel, dont l'activité se déployait d'ailleurs en même temps sur bien d'autres chapitres de l'Analyse, n'a pas accompagné les recherches de Baire ni utilisé l'intégrale de Lebesgue. Baire a pu ignorer la mesure, l'intégrale, les ensembles boréliens. Son œuvre est comme si toutes ces théories ne fussent pas encore sorties du néant. Lebesgue a suivi les premiers résultats de Baire, puis les idées de Borel, établi une jonction formelle entre

eux. Mais il n'a pas saisi le sens profond des théories de Baire. Il a cru que les données métriques pouvaient suppléer à une connaissance descriptive. Il n'a pas soupçonné que ces caractères sont trop grossiers pour se substituer à l'exquise subtilité des autres. Il eut une foi trop aveugle dans la vertu de la méthode d'approximation (dont Picard avait lui aussi fait un usage systématique): on modifie à son gré et de la manière la plus favorable pour ses propres vues les données, dans la limite d'une certaine marge; on résout la difficulté ainsi réduite; on obtient par là une approximation de la solution exacte; puis on diminue indéfiniment la marge. La solution approchée tend à se confondre avec la solution vraie.

Mais Lebesgue ne pensait qu'à l'approximation métrique. Il aurait fallu envisager encore et davantage les bornes de l'approximation permise dans l'ordre descriptif, si l'on osait altérer les champs de valeurs prises par la variable indépendante, comme il était loisible de le faire pour la fonction.

La manière de Baire et celle de Lebesgue différaient. Baire montrait comment et pourquoi cela est, Lebesgue pourquoi il est impossible que cela ne soit pas.

Un long et passionnant débat s'ouvrit au début du siècle, où mathématiciens et philosophes confrontèrent leurs vues sur ces questions: Qu'est-ce que définir? Ce qui en mathématiques ne saurait être individuellement conçu ni défini peut-il être regardé comme existant, ne doit-il pas être par présupposition exclu de tout champ de validité des théorèmes?

Lebesgue proposa la distinction des êtres définissables et des êtres simplement nommables, cette dernière classe, plus étendue que la première (à son sens), pouvant légitimement être admise au bénéfice des vérités générales.

Dans un ordre de sujets plus classiques, Lebesgue s'intéressa beaucoup au problème de Dirichlet, savoir de déterminer à l'intérieur d'un domaine une fonction harmonique par ses valeurs connues à la frontière du domaine. Il justifia un raisonnement célèbre, mais contesté

de Riemann, puis révéla que dans l'espace la continuité des données n'implique pas celle de la solution.

La géométrie des espaces cartésiens dite « de situation » suggère intuitivement des théorèmes dont la démonstration purement logique est souvent d'une très grande difficulté. On s'était laborieusement efforcé de montrer qu'une correspondance ponctuelle, réciproque et continue, entre deux ensembles assure l'égalité du nombre de leurs dimensions. Lebesgue fonda cette vérité sur la remarque suivante, de géniale simplicité : Quand on couvre un segment, un carré, un cube (pour s'en tenir aux espaces du monde sensible) avec des domaines dont chacun contient au plus un sommet (une extrémité) de la figure, il y aura toujours un point appartenant simultanément à des domaines en nombre excédant d'une unité au moins — et, si on le veut, jamais de plus d'une unité — le nombre de dimensions de la figure.

Lebesgue étudia également les variétés spatiales « enlacées ».

Lebesgue eut le souci de professer dans sa chaire du Collège de France un enseignement varié, tendant à renouveler à la lumière des théories récentes les sujets classiques.

Les derniers mois de sa vie furent assombris par les progrès du mal douloureux qui l'emporta le 26 juillet 1941. « C'est un deuil mondial pour les mathématiques », m'écrivit à cette nouvelle un ami hollandais, mort lui-même depuis avec sa femme et son fils dans un camp d'extermination en Allemagne. Et en effet, les sociétés, les académies scientifiques de tous pays les plus difficilement ouvertes aux étrangers, avaient accueilli depuis longtemps Lebesgue. Peu de mathématiciens ont connu plus large célébrité parmi leurs confrères de la planète entière.
