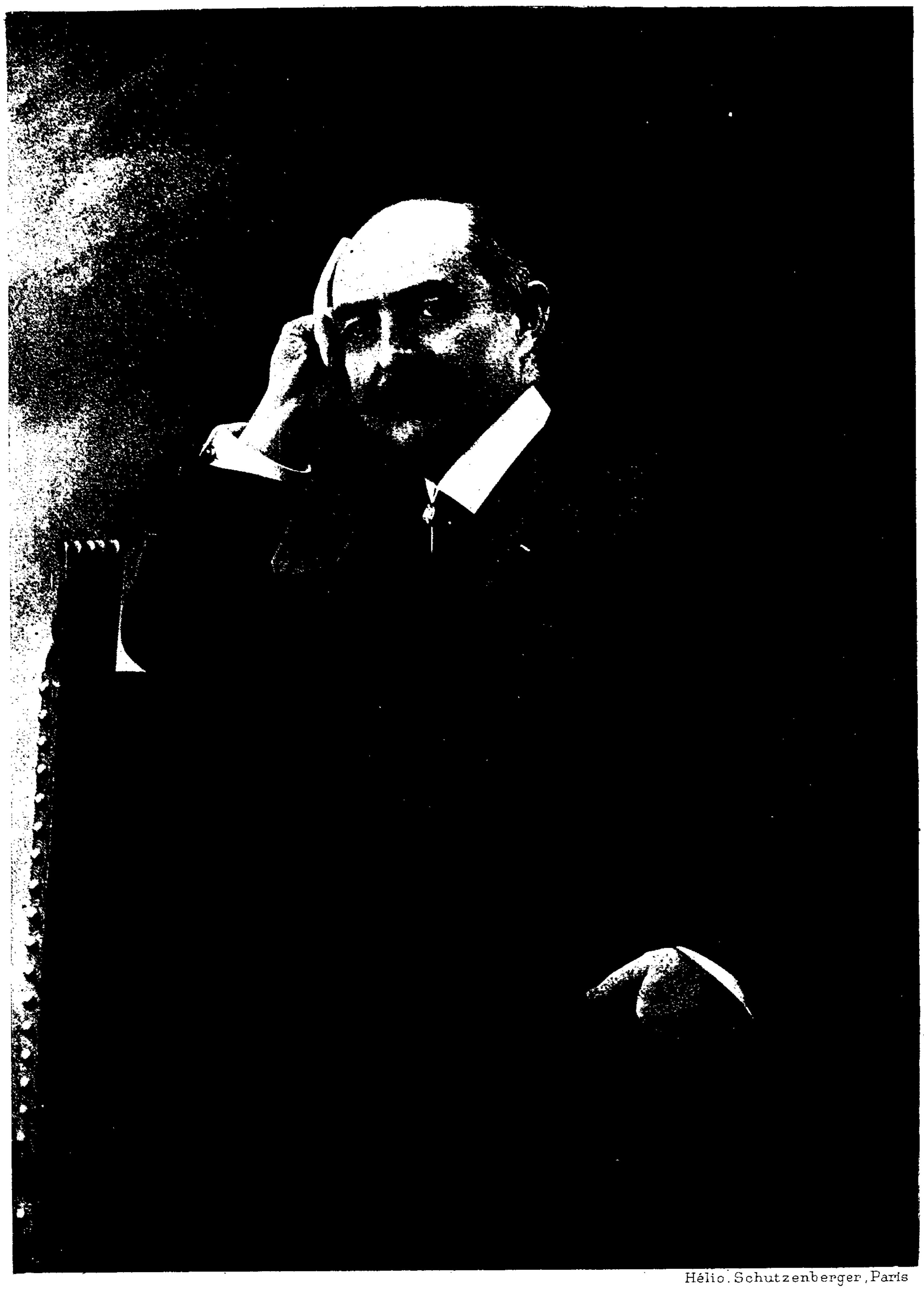


Hélio. Schutzenberger, Paris

GEORGES HUMBERT

1859 - 1921

NOTICE

SUR

LA VIE ET LES TRAVAUX

DE

GEORGES HUMBERT

(1859-1921)

LUE DANS LA SÉANCE DU 27 MARS 1922

PAR

M. EMILE BOREL

I.

Georges Humbert est né à Paris le 7 janvier 1859; élu membre de l'Académie des Sciences le 18 mars 1901, en remplacement de Charles Hermite, il a été enlevé prématurément à la Science et à ses amis le 22 janvier 1921.

Sa carrière scientifique débute par de remarquables succès scolaires, qui, s'ils ne prédisent pas toujours un brillant avenir, sont cependant le plus souvent la garantie de sérieuses qualités d'esprit et d'attachement au travail intellectuel. Reçu premier à l'École Normale supérieure et septième à l'École Polytechnique, il opte pour l'École Polytechnique où il entre en 1877, âgé de 18 ans. Son fils m'écrit : « Il n'a jamais expliqué pourquoi cette préférence : probablement parce que sa famille trouvait cela plus glorieux ! » Ses goûts personnels, en effet, le destinaient à la recherche scientifique et à l'enseignement : Georges Humbert n'était pas né seulement mathématicien; il était né professeur et il est resté professeur jusque sur son lit de mort; déjà très gravement atteint par la maladie qui devait l'emporter, il est revenu à Paris, en décembre 1920, pour essayer de commencer son cours au Collège de France, où il put, au prix de quels efforts, faire une dernière leçon. Comme on lui objectait qu'il risquait sa vie à dépasser ainsi ses forces, il répondit simplement : « Quelle plus belle mort pourrais-je souhaiter, que de tomber en faisant mon cours ? » Cette parole le peint tout entier, et fait comprendre qu'il ait rapidement abandonné la carrière d'ingénieur des mines pour se consacrer à la science et à l'enseignement, suivant l'illustre exemple d'Henri Poincaré et de bien d'autres.

Après avoir obtenu le second rang au classement de sortie de l'École Polytechnique et passé par l'École des Mines, il exerça cependant durant quelques années les fonctions d'ingénieur des mines, d'abord à Vesoul, demandé par lui parce que son oncle y habitait, puis attaché au contrôle de l'Est et enfin dans le service des carrières à Paris. Mais, dès 1884, il était appelé comme répétiteur auxiliaire d'Analyse à l'École Polytechnique où il devait, onze ans plus tard, en 1895, être nommé professeur d'Analyse. En 1904, il joignit à ces fonctions celle de suppléant de son maître Camille Jordan au Collège de France; il resta suppléant jusqu'en 1912 et succéda alors à Jordan dans sa chaire; il l'occupa jusqu'à sa mort. Il fut aussi, pendant de longues années, professeur à l'École des Mines, où il avait débuté dans l'enseignement.

En même temps que ces fonctions d'enseignement, les travaux d'Humbert lui valaient de nombreuses distinctions scientifiques; en 1885, il est reçu brillamment docteur ès sciences mathématiques, pour une Thèse dont nous reparlerons tout à l'heure; en 1891, il est pour une première fois lauréat de l'Académie des Sciences, qui lui décerne le prix Poncelet pour l'ensemble de ses travaux; en 1892, il reçoit le prix Bordin pour un Mémoire sur un sujet mis au concours; en 1893, il est président de la Société mathématique et en 1901 élu brillamment à l'Académie des Sciences. Enfin, en 1921, l'Académie lui a conféré une suprême distinction posthume, en décernant à sa mémoire le prix Petit d'Ormoy. L'attribution de ce prix précède souvent de peu d'années une élection à l'Académie des Sciences; mais Humbert avait été élu assez jeune pour n'avoir pas eu le temps de le recevoir; l'Académie a cependant tenu à ce que son nom figure parmi ceux des titulaires de ce prix, qui est l'un des plus importants dont elle dispose.

Cette brève esquisse de la carrière scientifique d'Humbert doit être complétée par quelques détails plus personnels et plus intimes. Humbert était, en effet, de ces hommes dont la valeur scientifique, si grande qu'elle soit, est peut-être encore dépassée par la valeur proprement humaine. Ceux qui ont eu la joie de le connaître et l'honneur de recevoir de lui des témoignages d'une amitié qu'il ne prodiguait pas, en conserveront toute leur vie le souvenir. Il donnait avant tout l'impression d'une netteté, d'une droiture, d'une franchise parfaites. Allant toujours droit au but, il mettait très vite son interlocuteur à l'aise, car on sentait que l'on était directement en contact avec sa belle intelligence et son noble cœur. Il était brillant causeur et cependant, non seulement il savait écouter, mais il aimait faire parler ses interlocuteurs, surtout lorsqu'il en espérait quelque fait, quelque idée, quelque impression esthétique de nature à enrichir encore le vaste trésor que recélait son cerveau. Ses manières toujours correctes pouvaient paraître froides et réservées à celui qui l'abordait pour la première fois; à mesure qu'on l'approchait davantage, on appréciait davantage sa bonté; les siens et quelques amis intimes pourraient seuls nous dire toute la valeur des qualités exquises que l'on devinait en lui; c'est se conformer à sa noble réserve que de ne pas insister sur les côtés trop personnels de sa vie privée. Mais je pense qu'il n'eût point désapprouvé le récit sans apprêt des circonstances extérieures de cette vie, simple et nette comme sa carrière scientifique (1).

(1) Je dois remercier M. Pierre Humbert, professeur à la Faculté des Sciences de Montpellier, auquel je suis redevable de la plus grande partie des renseignements qui suivent.

Ses deux grands-pères étaient industriels et francs-comtois : l'un ayant une usine de métallurgie au Magny, près de Lure; l'autre à Baignes, près de Vesoul (celle-ci est toujours dans la famille). Georges Humbert est né à Paris, mais s'est toujours considéré comme franc-comtois.

Son père, Émile Humbert, docteur en médecine, n'exerçait pas et s'occupait spécialement de chimie; il a fait notamment de nombreuses et infructueuses tentatives pour isoler le fluor. Plusieurs Mémoires de lui (sur l'iodoforme, le brome, l'acide cyanhydrique) ont été lus à l'Académie de Médecine. Il avait inventé une pile au chlore, ce qui a été néfaste à sa santé. Peu après la naissance de ses deux enfants, il dut aller vivre dans le Midi, d'abord à Pau, puis en Algérie; il y mourut bientôt et sa femme ne tarda pas à le suivre. Humbert ne se rappelait pas son père; il avait quelque souvenir de sa mère.

Georges Humbert ne passa donc à Paris, après sa naissance, que sa toute première enfance; il commença ses études, dans les classes enfantines, au lycée de Pau. Après la mort de ses parents, il alla vivre chez ses grands-parents, surtout au Magny, et suivit, jusqu'à l'âge de sa première communion, les cours du collège de Lure. Il entra alors comme pensionnaire chez les oratoriens de Juilly et y demeura jusqu'à la rhétorique inclus. Il y reçut une forte éducation classique dont il resta imprégné toute sa vie; il ne cessa jamais de lire dans le texte les auteurs grecs et latins, notamment Homère et Virgile; un an avant sa mort, il se chargea seul de préparer au baccalauréat latin grec sa fille aînée et le succès justifia pleinement son entreprise. Il fit ses mathématiques élémentaires au lycée de Vesoul et termina enfin ses études secondaires à Paris, au collège Stanislas, où il eut Vazeilles pour professeur et Biehler pour directeur des études. Il a toujours conservé pour Biehler une grande vénération. Il avait traversé ainsi, si je compte bien, cinq établissements d'enseignement secondaire avant d'entrer à l'École Polytechnique; cette variété aurait pu nuire à un esprit moins solide que le sien; il semble au contraire qu'elle contribua à lui donner cette richesse de goûts intellectuels qui était un des charmes de sa conversation. Il resta toujours attaché à la foi catholique, dans laquelle il avait été élevé; comme chez beaucoup de savants, sa vie religieuse n'était en rien mêlée à sa vie scientifique et l'on pouvait le fréquenter pendant des années sans la soupçonner. Très étranger à la politique, il était également très étranger aux manifestations publiques des convictions religieuses et philosophiques; il aurait même été difficile, ce qui est rare, de connaître ses opinions d'après le choix de ses amitiés : quelques-uns de ses amis les plus intimes avaient des convictions fort différentes des siennes et les passions politiques ou religieuses n'ont jamais altéré ses amitiés.

Ses goûts littéraires et artistiques, très développés, furent la source de ses plus pures joies; sa vie fut à cet égard très riche et seuls ceux qui vécurent près de lui pourraient en dire la complexité. En littérature, il admirait particulièrement Racine et les poètes parnassiens; en musique, il s'enthousiasma pour Wagner et, en peinture, il adorait Burne-Jones. Il lisait volontiers les Mémoires et connaissait particulièrement Saint-Simon. Il a beaucoup voyagé dans sa jeunesse, visité l'Espagne, l'Italie, l'Angleterre, Constantinople, la Norvège.

Il avait épousé en 1890 M^lle Marie Jagerschmidt, fille d'un diplomate d'origine alsacienne, qui avait vécu notamment à Odessa et à Beyrouth avant de terminer sa carrière au Ministère des Affaires étrangères, et petite-fille du baron Feuillet de Conches, chef du protocole et introducteur des ambassadeurs sous Napoléon III, érudit, écrivain, bibliophile, collectionneur réputé d'autographes; mais elle mourut deux ans après, en 1892, après avoir donné le jour, le 13 juin 1891, à un fils, Pierre, devenu, comme son père, mathématicien et professeur.

Après huit années de recueillement et de travail, Humbert se remaria; il épousa en 1900 M^lle Suzanne Lambert-Caillemer et il eut de ce second mariage deux filles, nées en 1902 et 1903. Il réalisa, en 1910, un rêve fort ancien : l'achat d'une maison de campagne assez proche de Paris, pour qu'il pût y vivre presque toute l'année, sans négliger ses obligations professionnelles. Les quelques années qui suivirent paraissent avoir été les plus heureuses de sa vie, pendant lesquelles il goûta pleinement les joies de la famille, sans renoncer à la vie intellectuelle intense qui lui était nécessaire. Lorsque arrive la grande tourmente de 1914, il s'installe définitivement à Pont-Authou avec les siens, ne venant à Paris passer quelques heures que pour son enseignement, qu'il ne négligea jamais. Entre temps, il cultive son jardin et se consacre à ses travaux mathématiques; il cherche visiblement à calmer l'anxiété formidable qui l'oppresse depuis le commencement du terrible drame, et à laquelle son organisme déjà atteint n'est pas en état de résister; il attend fiévreusement les nouvelles, lit et relit livres et documents; mais les tourments qu'il se fait réagissent sur sa santé et sa maladie augmente ses tourments; il est obligé de renoncer à son enseignement à l'École Polytechnique; il décline l'honneur de la vice-présidence de l'Académie des Sciences, à laquelle l'aurait appelé, suivant les traditions, son ancienneté d'élection.

La joie de la victoire ne suffit pas à guérir le mal déjà trop avancé; la maladie implacable l'étreint chaque jour plus cruellement; il se distrait en relisant avec passion tous les Ouvrages parus sur la guerre; il s'éteint le 22 janvier 1921, après de cruelles souffrances courageusement supportées, dans son appartement de la rue Bonaparte, où il était revenu deux mois auparavant.

Sa mort ne laisse pas seulement dans la science française et dans notre corps enseignant un vide qui sera difficilement réparé; les corps savants dont il faisait partie, les conseils où sa voix était toujours écoutée, perdent en Humbert un guide sage et sûr. Exclusivement dirigé par des motifs d'ordre scientifique, il savait mettre au service de ses opinions une dialectique vigoureuse et précise, où l'on sentait l'inspiration d'une âme noble et d'une pensée élevée et qui commandait toujours le respect, même lorsqu'elle n'entraînait pas les convictions ou les votes.

Ses jugements, sur les travaux dont il prenait connaissance, étaient aussi droits qu'inflexibles; de sa part, jamais la moindre trace de malveillance, de dédain *a priori*, non plus que de la plus légère complaisance à l'égard de l'auteur, fût-il de ses amis. Si ses critiques ne manquaient jamais ni de précision ni de justesse, ses compliments étaient toujours dépourvus de banalité, et les jeunes géomètres dont les débuts étaient accueillis par lui avec faveur pouvaient être, à juste titre, fiers d'une appréciation venant d'un tel maître. Cette grande et légitime autorité d'Humbert excluait chez lui tout sentiment de vanité; il n'a jamais donné au plus modeste interlocuteur l'impression qu'il se regardait comme au-dessus de lui, sa cordialité était sincère, sans être jamais banale.

Mais que dire du vide qu'il laisse dans le cœur de ses amis et de ceux qui avaient le privilège de l'approcher, assez fréquemment pour connaître au moins quelques-uns des aspects de sa superbe intelligence et de sa haute conscience? Je voudrais avoir réussi à faire deviner quelle peut être la profondeur de ce vide; Humbert était une de ces fortes personnalités qu'on n'oublie pas quand on l'a connue, et qui ne peut être remplacée, car l'assemblage de qualités intellectuelles et morales qu'il réalisa est assez rare pour ne pouvoir se retrouver. Ses hautes qualités ont donné leur empreinte à son œuvre mathématique dont il me reste à parler.

II.

Humbert a publié près de 150 Notes ou Mémoires; une analyse complète et détaillée de ses travaux dépasserait de beaucoup les limites d'une telle Notice; elle exigerait d'ailleurs une connaissance approfondie, que je ne possède pas, des travaux d'Humbert et de ses élèves, et aussi de tous les travaux publiés depuis un demi-siècle sur ces mêmes questions; on pourrait alors montrer, ce que soupçonne déjà tout lecteur un peu averti, que la place véritable de l'œuvre d'Humbert dans l'ensemble de la production mathématique est considérable.

Les principaux travaux d'Humbert peuvent être groupés autour de trois ordres d'idées qui s'enchaînent d'ailleurs logiquement. Tout d'abord, il s'intéresse à la géométrie des courbes et surfaces algébriques et il met en œuvre pour l'étudier les ressources de l'algèbre, de l'analyse moderne, de la théorie des fonctions. C'est le premier stade, qui va de ses premières publications [1] (1885) jusqu'en 1898. Il s'avise alors que les moyens que lui offre l'analyse pour ses recherches géométriques sont insuffisants et il se propose de les compléter par l'étude des fonctions abéliennes singulières. C'est le second stade, où il se révèle non moins apte à surmonter les difficultés analytiques qu'il ne l'avait été à apercevoir les faits géométriques. Enfin, troisième stade, il est conduit par les fonctions abéliennes singulières à de profondes recherches de nature arithmétique.

Ainsi, contrairement à la marche ordinaire de l'esprit déductif, Humbert n'est pas allé de l'abstrait au concret, mais du concret à l'abstrait, dans la mesure où l'on peut distinguer des degrés d'abstraction dans les recherches de mathématiques pures. Beaucoup de géomètres ont suivi la marche inverse et, après s'être intéressés dans leur jeunesse à l'arithmétique ou à l'analyse pure, en ont appliqué en quelque sorte les résultats ou les méthodes à des problèmes moins abstraits posés par la géométrie ou la physique. Humbert part au contraire de la géométrie, mais son intelligence lucide ne tarde pas à le convaincre que certaines difficultés ne peuvent être résolues que par l'étude préalable de questions d'analyse et d'arithmétique jusque-là négligées; il n'hésite pas à faire l'effort nécessaire pour s'attaquer directement à ces problèmes difficiles.

L'origine des premiers travaux d'Humbert se trouve dans les résultats obtenus, notamment par Clebsch et ses continuateurs, dans l'étude des courbes planes, en utilisant l'expression des coordonnées d'un point de ces courbes en fonction uniforme d'un paramètre. Si l'on considère, par exemple, les courbes de genre 1, dont le type le

---

[1] Humbert avait publié, en 1880, étant à l'École des Mines, quelques Notes se rattachant aux fonctions hypergéométriques et à l'équation linéaire du second ordre, auxquelles il n'attachait pas grande importance. Après un silence de quelques années, dû sans doute à son apprentissage du métier d'ingénieur des Mines, il reprit en 1885, pour ne plus les interrompre, ses publications mathématiques par sa Thèse de Doctorat, préparée par des Notes insérées en 1883 et 1884 dans les *Comptes rendus*.

plus simple est la cubique plane générale, les coordonnées cartésiennes d'un point de ces courbes s'expriment en fonction elliptique d'un paramètre; les propriétés élémentaires des fonctions elliptiques fournissent alors immédiatement un grand nombre de propriétés géométriques extrêmement élégantes, qui prennent pour la cubique une forme particulièrement simple.

Dans sa Thèse de Doctorat (1885), qui fut son premier travail important, Humbert prend comme point de départ les travaux de Clebsch; il les complète par plusieurs résultats où se trouve déjà ce rare cachet d'élégance qui devait être la marque de tous ses travaux et qu'il faudrait signaler à chaque page de cette Notice. En particulier, il donne le moyen de reconnaître si une courbe dont les coordonnées sont données en fonction elliptique d'un paramètre est effectivement de genre *un*, ce qui est le cas général, ou est de genre *zéro;* la méthode suivie n'exige que des opérations algébriques simples. Humbert ne tarde pas à s'apercevoir que l'emploi des fonctions fuchsiennes, récemment découvertes par Poincaré, offre à la géométrie algébrique des possibilités d'applications très nombreuses; il indique quelques-unes de ces applications et complète notamment sur un point important les travaux célèbres de Max Nöther et Brill, relatifs à la géométrie sur une courbe algébrique; mais son esprit est plus attiré vers les applications particulières que vers les propositions d'un caractère trop général, du moins lorsqu'elles ne peuvent pas être mises sous une forme facilement applicable à des cas particuliers : il a donné, dans ses travaux sur les applications géométriques du théorème d'Abel, des énoncés extrêmement généraux, dont il a su tirer une foule de propositions géométriques élégantes et simples. Citons, par exemple, ce théorème relatif à l'orientation d'un système de n droites dans le plan, au sens de Laguerre, c'est-à-dire à la somme des angles que font ces droites avec un axe fixe : « *Pour qu'un système de n droites, variables algébriquement, garde une orientation fixe, il faut et il suffit que, lorsqu'une ou plusieurs droites du système viennent à passer par un des points cycliques du plan, d'autres droites du système, en même* *nombre, passent au même instant par l'autre point cyclique.* » Parmi les nombreux résultats généraux relatifs aux arcs de courbes algébriques, citons celui-ci : « *Les points de contact d'une courbe plane* C *de classe* ν *avec les* 2ν *tangentes communes à cette courbe et à un cercle se groupent deux à deux de manière à déterminer sur* C ν *arcs dont la somme algébrique est égale à la somme des longueurs des tangentes communes.* »

Mais c'est dans l'étude de courbes et de surfaces particulières que le génie géométrique d'Humbert pouvait donner toute sa mesure. Il en est en Géométrie comme en Théorie des fonctions, et comme aussi, je le pense, en Physique, en Chimie et en Biologie. L'étude d'êtres analytiques ou réels particuliers, lorsqu'elle est faite avec un esprit étroit par un chercheur dépourvu d'idées générales, conduit rarement à des résultats importants et doit être le plus souvent regardée comme étant à peine de la science; lorsque, au contraire, cette étude particulière est inspirée par une connaissance approfondie des théories générales et sert à faire progresser et à illustrer ces théories, elle est peut-être la forme la plus élevée et la plus complète de la recherche scientifique. Il n'est pas besoin de dire à laquelle de ces deux alternatives se rattachent les travaux d'Humbert sur les aires sphériques, les aires ellipsoïdales, les arcs de lemniscate, les surfaces cyclides, la surface générale du troisième ordre, la surface desmique du quatrième ordre, la surface de Kummer, les surfaces hyperelliptiques du quatrième degré à 15 points doubles, qu'il a découvertes comme conséquences de ses travaux sur les fonctions abéliennes singulières, et d'autres encore. Ici, il faudrait tout citer, car les énoncés géométriques sont très nombreux et il est difficile d'y faire un choix : celui que l'on vient de lire paraît toujours être le plus intéressant. Voici, par exemple, un théorème sur les arcs de lemniscate : « *Deux cercles passant par le centre d'une lemniscate interceptent sur cette courbe des arcs égaux, si leurs centres sont sur une même conique, ayant pour foyers les foyers de la lemniscate.* » Les résultats les plus importants dans cet ordre d'idées sont peut-être les résultats relatifs à la surface de Kummer, qui ont été obtenus dans le Mémoire présenté en 1892 par Humbert à l'Académie des Sciences, pour le concours du prix Bordin. Le sujet mis au concours était le suivant : « Applications de la théorie générale des fonctions abéliennes à la géométrie ». Le prix fut attribué à Humbert, sur le rapport de Poincaré, pour un Mémoire portant comme épigraphe : « *Pendent opera interrupta* ». Voici comment le rapporteur s'exprime au sujet de ce Mémoire : « Les résultats qui y sont démontrés sont d'une très grande importance et conduisent à la solution de plusieurs problèmes intéressants. Les surfaces hyperelliptiques, c'est-à-dire les surfaces telles que les coordonnées d'un quelconque de leurs points puissent s'exprimer par des fonctions quadruplement périodiques d'un paramètre, sont de deux sortes. Il peut arriver, en effet, qu'à chaque point de la surface corresponde un seul point du champ hyperelliptique, ou bien plusieurs points de ce champ. Les surfaces de la première classe sont celles de M. Picard; mais on connaît depuis longtemps une surface de la deuxième classe à laquelle est attaché le nom de Kummer. La plus grande partie du Mémoire est consacrée à la théorie de la surface de Kummer; bien que cette surface ait déjà fait l'objet des travaux d'un grand nombre de géomètres allemands, l'auteur a découvert beaucoup de propriétés nouvelles dont quelques-unes s'énoncent fort élégamment. Il s'attache surtout à l'étude des courbes tracées sur la surface. On sait quelles difficultés présente la classification des courbes gauches, et, en particulier, de celles qui sont tracées sur une surface donnée. Cette question, abordée par notre regretté confrère Halphen, lui avait inspiré un Ouvrage justement admiré de tous les géomètres, et couronné autrefois par l'Académie de Berlin. Le problème a été résolu complètement par Halphen pour quelques surfaces, pour celles du second degré, par exemple. Grâce à l'emploi des fonctions abéliennes, l'auteur du Mémoire fait pour la surface de Kummer ce qu'Halphen avait fait pour les quadriques. »

Après avoir rappelé des résultats relatifs aux surfaces inscrites dans la surface de Kummer, aux relations de la surface de Kummer avec sa réciproque, aux surfaces adjointes à celle de Kummer, aux surfaces de M. Picard et aux courbes qu'on peut tracer sur elles, aux relations entre les fonctions hyperelliptiques, et les surfaces adjointes à une surface hyperelliptique, à certaines surfaces hyperelliptiques de deuxième classe, telles qu'à chacun de leurs points correspondent deux couples d'arguments et qui correspondent, point par point, à la surface de Kummer, Poincaré conclut en ces termes :

« En résumé, le Mémoire qui est soumis au jugement de l'Académie contient l'étude complète de plusieurs surfaces intéressantes et de leurs relations avec les fonctions abéliennes; c'est là une conquête très précieuse pour la Géométrie et qui ne sera pas non plus inutile à l'Analyse pure, puisqu'elle nous aidera à nous représenter, d'une manière plus concrète, les propriétés de ces transcendantes. »

Cette appréciation de Poincaré s'appliquerait, *mutatis mutandis*, à tous les travaux géométriques d'Humbert, non moins précieux pour les analystes que pour les géomètres.

Dans ses recherches sur les surfaces hyperelliptiques, Humbert avait désigné par $(1, 0)$, $(0, 1)$, (g, h), (h, g') un système de périodes normales pour les fonctions abéliennes de deux variables et avait étudié ce que l'on peut appeler le *cas général*, où les périodes g, h, g' ne sont liées par aucune relation à *coefficients entiers* du type

$$Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0. \tag{1}$$

Dans le cas où il existe une ou plusieurs relations du type (1), où les entiers A, B, C, D, E sont supposés sans diviseurs communs, et qu'Humbert appelle *relation singulière*, les fonctions abéliennes correspondantes sont des *fonctions singulières*. L'étude des fonctions abéliennes singulières est l'œuvre la plus considérable d'Humbert, à laquelle son nom restera attaché : il ne s'agit plus ici, en effet, de perfectionnements plus ou moins ingénieux de théories connues, ni même de la solution complète de problèmes déjà posés ou de la généralisation de propriétés établies par d'autres géomètres : c'est une théorie entièrement nouvelle, dont la création n'est pas arbitraire, mais est apparue nécessaire à Humbert comme conséquence de ses travaux approfondis sur les fonctions abéliennes et la géométrie. Une fois le problème posé, il l'attaque résolument, en trouve la solution complète et en développe les conséquences les plus importantes, laissant une riche moisson de découvertes pour ses élèves et ses continuateurs, qui compléteront son œuvre comme il avait lui-même, dans ses premiers travaux, complété celle de Clebsch, Poincaré, Kummer.

Un rôle fondamental est joué, dans l'étude et la classification des fonctions abéliennes singulières, par l'invariant Δ défini par la relation

$$\Delta = B^2 - 4AC - 4DE, \tag{2}$$

où A, B, C, D, E sont les coefficients sans diviseur commun de la relation (1).

Nous ne pouvons indiquer ici toutes les conséquences géométriques de la théorie des fonctions abéliennes singulières, où un rôle capital est joué par les fonctions intermédiaires singulières, au sens de Briot et Bouquet et de Poincaré; signalons seulement la proposition suivante, qui met en évidence le lien étroit entre les propriétés de la relation arithmétique (1) et les propriétés géométriques de la surface de Kummer: « *Pour qu'une surface de Kummer particulière renferme une courbe algébrique n'existant pas sur la surface de Kummer générale, il faut et il suffit qu'elle dérive de fonctions abéliennes singulières.* »

Humbert ne s'est pas borné à appliquer la théorie des fonctions abéliennes singulières aux problèmes de géométrie, par lesquels il avait été conduit à construire cette nouvelle théorie. Il lui a semblé qu'il ne devait pas laisser à d'autres le soin d'étudier, d'un point de vue purement analytique, ces fonctions nouvelles; il était, en effet, particulièrement préparé à cette étude par le soin avec lequel il avait approfondi la théorie des fonctions abéliennes dans tous ses détails, sans se borner aux parties de cette théorie immédiatement utilisables pour les applications géométriques. Il a donné ainsi un très bel exemple à tous les chercheurs, en faisant voir quels avantages peuvent résulter pour les découvertes d'une culture mathématique large, qui ne se limite pas à l'érudition strictement indispensable pour le but actuellement poursuivi.

Pendant que de nombreux élèves d'Humbert et, en même temps, d'éminents savants étrangers, notamment dans la brillante école italienne, utilisaient et développaient les conséquences géométriques de ses découvertes, il s'attachait particulièrement à en approfondir les conséquences analytiques et arithmétiques.

On sait quelle est l'importance, dans la théorie des fonctions elliptiques, de la notion de multiplication complexe, qui se rattache au problème de la transformation d'Hermite. L'introduction des fonctions abéliennes singulières donne un aspect nouveau à cette question et conduit à des multiplications complexes extrêmement remarquables qui n'avaient jamais été considérées avant Humbert. Ces propriétés analytiques le conduisent d'ailleurs immédiatement à des conséquences algébriques et géométriques d'une très grande importance : il découvre que la surface de Kummer admet des transformations irrationnelles en elle-même, formant un groupe *infini et discontinu*. C'est le premier exemple connu d'un tel groupe pour une surface algébrique; on aurait pu penser, par analogie avec les courbes planes, que de tels groupes ne peuvent exister. Après les découvertes d'Humbert, d'autres géomètres, notamment M. Painlevé, ont donné des exemples analogues.

L'étude approfondie des fonctions abéliennes singulières devait logiquement conduire Humbert à se poser des problèmes de théorie des nombres; il était moins évident que ce géomètre, devenu analyste, se révélerait, à la fin de sa carrière, un brillant arithméticien et contribuerait, pour une large part, à la renaissance, dans la patrie d'Hermite, des études de théorie des nombres, en ajoutant, sur plusieurs points importants, des résultats nouveaux à ceux qui font la gloire de son illustre prédécesseur à l'Académie.

Le déterminant Δ défini par la formule (2) est une forme quadratique indéfinie à cinq variables; l'étude des transformations du premier ordre pour les fonctions simplement singulières conduit Humbert à un groupe linéaire à cinq variables, isomorphe au groupe abélien d'Hermite, grâce auquel il peut déduire d'une seule d'entre elles toutes les représentations d'un entier par cette forme Δ.

Les trois modules des fonctions abéliennes sont liés par une ou deux relations algébriques suivant que ces fonctions sont simplement ou doublement singulières. On peut ainsi faire correspondre à l'invariant (entier) de toute relation singulière une surface algébrique; à un système de deux relations correspond, par suite, l'intersection de deux surfaces, soit une courbe ou un système de courbes algébriques. A ce système de deux relations correspondent des fonctions abéliennes doublement singulières auxquelles Humbert associe une classe de formes binaires positives, proprement ou improprement équivalentes entre elles. Il démontre alors le théorème fondamental suivant : *Si une classe de formes représente proprement un entier, la surface qui répond à l'entier contient la courbe qui répond à la classe et réciproquement.* C'est là une relation des plus intéressantes entre l'arithmétique et la géométrie; poursuivant l'étude de ces analogies, Humbert montre que l'ordre de multiplicité de la courbe sur la surface est égal au nombre de représentations propres de l'entier par chaque forme de la classe; il établit ensuite que les courbes qui répondent à des classes de même déterminant et de même *genre arithmétique* ont le même *genre géométrique* et se correspondent point par point. Une étude analogue est faite ensuite sur les fonctions triplement singulières; les analogies géométriques continuent à être d'un puissant secours pour l'étude des propriétés arithmétiques, qui se rapportent ici à une classe de formes ternaires positives.

Dans une autre série de travaux, Humbert a repris et complété sur plusieurs points la méthode célèbre indiquée par Hermite dans sa *Lettre* à Liouville. Je ne puis citer ici tous les résultats dont l'énoncé est souvent assez long et dont la beauté ne peut être pleinement appréciée que par les initiés à ces questions difficiles. Il convient cependant de signaler particulièrement une Note publiée aux *Comptes rendus* en 1910 (t. 150) : *Sur les minima des classes de formes quadratiques*, dans laquelle Humbert introduit, dans l'application de la méthode d'Hermite, une constante arbitraire, ce qui donne aux formules finales une portée bien plus grande, et ce qui permet même d'y faire figurer une fonction arbitraire.

De 1914 à 1921, Humbert a presque uniquement étudié l'arithmétique. Il a donné notamment ([1]) une interprétation géométrique nouvelle très élégante des fractions continues ordinaires, d'où résulte aussitôt le beau théorème de Lagrange sur les fractions continues périodiques, et une méthode arithmético-géométrique nouvelle pour la formation des polyèdres fondamentaux de tous les groupes modulaires dans les corps $i\sqrt{D}$. Cette méthode va plus loin que la méthode des symétries employée par Bianchi et s'applique dans des cas où la méthode de Bianchi ne s'applique plus. Il a étudié les formes d'Hermite dans ces corps, les représentations des entiers par les formes, les problèmes sur le nombre et la mesure de leurs classes pour un déterminant donné. Enfin, à la veille de sa mort, il étudiait les formes ternaires. Comme conséquence des résultats qu'il a obtenus dans ses travaux d'arithmétique, il a démontré un grand nombre de formules que Liouville avait jadis données sans démonstration. On voit qu'il avait conservé intactes ses facultés d'invention et de production et, chose plus rare encore, qu'il les avait appliquées à un domaine nouveau; sa mort prématurée prive la Science de nombreuses et importantes découvertes.

III.

J'espère que, malgré ses imperfections et ses lacunes, ce résumé extrêmement raccourci de l'œuvre mathématique d'Humbert en aura fait saisir toute la variété, l'originalité et la profondeur. Ce qu'il n'a pu traduire, ce sont les qualités de rédaction et d'exposition qui

---

([1]) *Journal de Jordan*, 1917.

donnent un si grand charme à la lecture de tous les écrits d'Humbert; il n'y a point de coins obscurs ni de cette fausse clarté qui réserve parfois tant de déceptions; tout est clair et limpide et en même temps d'une solidité à toute épreuve; on peut y bâtir comme sur le roc. Aussi les disciples ne lui ont pas manqué; de nombreuses Thèses de Doctorat, un grand nombre de Mémoires, ont été inspirés par ses publications et par son enseignement. Dans une histoire des mathématiques au premier quart du xx^{e} siècle, un chapitre important devra être consacré à Humbert et à ses élèves. Pour faire comprendre toute l'influence qu'il a exercée, il faudrait pouvoir dire toutes les qualités de son enseignement.

Il suffisait d'avoir avec Humbert un quart d'heure de conversation scientifique pour se rendre compte qu'il était un admirable professeur; le témoignage unanime de ses élèves renforçait encore, si possible, cette conviction. A l'École Polytechnique, il était universellement aimé et admiré; après avoir été un examinateur d'entrée hors pair, il était devenu le plus écouté des professeurs. Il ne se contentait pas d'utiliser ses qualités naturelles, qui lui auraient permis de faire sans effort un cours brillant, où chaque leçon aurait été assurée du succès; il travaillait avec soin l'agencement général de son cours et il avait une facilité exceptionnelle à faire varier la nature des sujets abordés pour adapter constamment son enseignement aux besoins qui se manifestaient, en raison des cours voisins du sien à l'École, notamment des cours de mécanique et de physique. Sans la moindre hésitation, il savait sacrifier des sujets spécialement étudiés par lui, enrichis de ses propres contributions, s'il arrivait à se convaincre qu'ils offraient moins d'utilité que tels autres qu'il devait d'abord creuser pour s'en rendre maître. Il arrivait d'ailleurs immédiatement à traiter avec la même maîtrise ces sujets nouveaux.

Son *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique* a été publié par lui; il n'a pas cédé à la tentation d'y développer les matières qu'il eût désiré traiter, si son cours avait comporté cinq ou six fois plus de leçons; il a fait un livre relativement élémentaire, qui a rendu et rendra encore bien des services à la catégorie de lecteurs auxquels il s'adresse. Ce livre correspond bien à son enseignement à l'École Polytechnique; il devrait être complété par la publication de ses Cours du Collège de France.

C'est au Collège de France, en effet, que pendant seize ans, dont huit comme suppléant de M. Jordan et huit comme titulaire de la chaire, Humbert a donné la vraie mesure de ses qualités de professeur, formé des élèves et exercé une influence importante sur l'orientation des études mathématiques en France. Je voudrais en donner une idée, en indiquant rapidement les sujets de sept de ces cours, d'après les notes qu'a bien voulu me communiquer M. Gaston Julia.

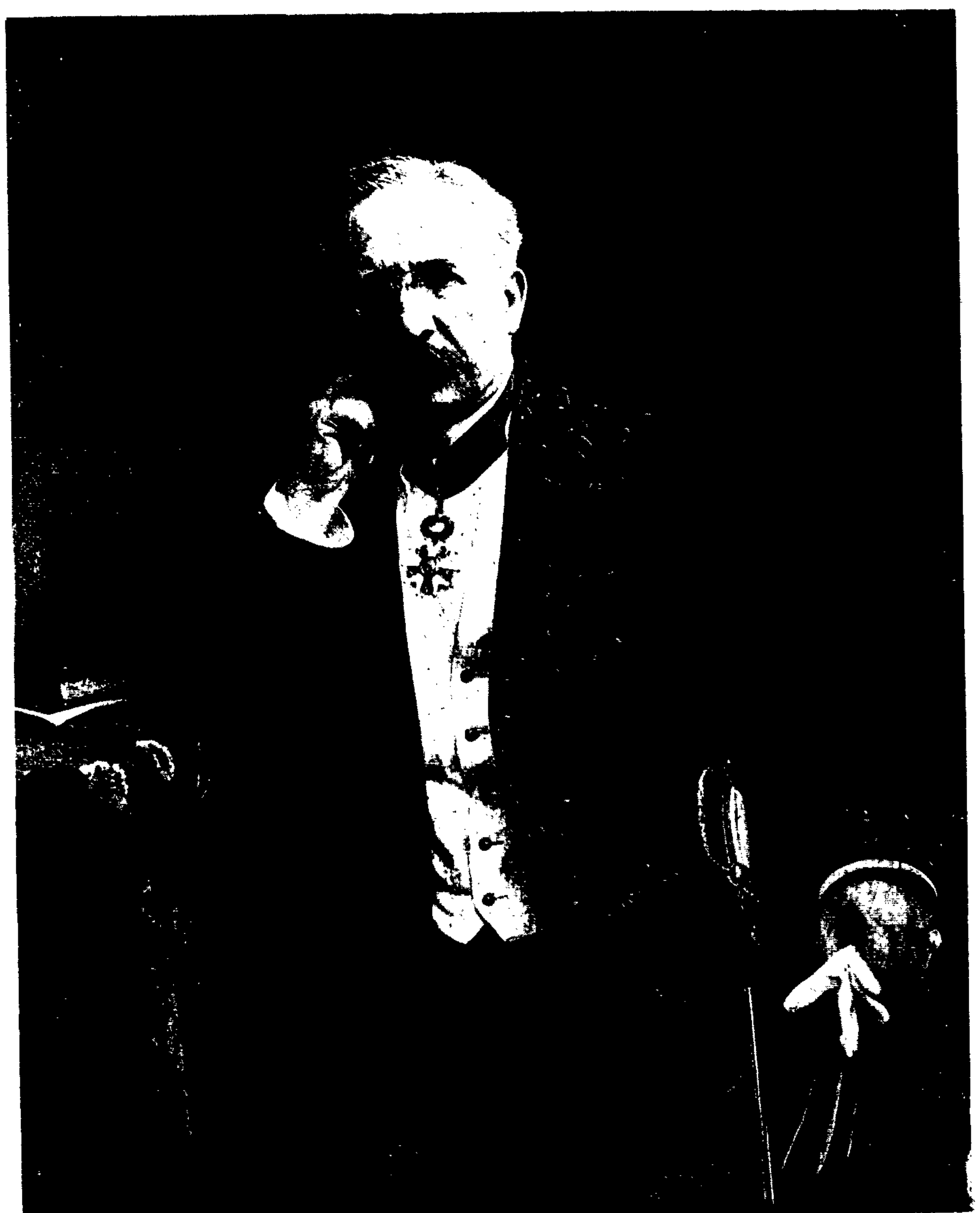
En 1913, il traite de la théorie des substitutions et des équations algébriques, expose les travaux fondamentaux de Galois, les recherches de Jordan et applique ensuite ces théories générales à des exemples particuliers, poussés jusqu'au bout, ce qui le conduit à passer en revue les équations du troisième et du quatrième degré, la division du cercle, les équations d'Abel et de Galois, les équations ternaires, les équations résolubles par radicaux. En 1914, il applique les résultats précédents aux équations algébriques à deux variables, c'est-à-dire à l'étude du groupe de monodromie. Il est ainsi conduit à étudier les groupes linéaires, cycliques et métacycliques, les points d'inflexion des cubiques, le groupe homographique et sa liaison avec le groupe linéaire à deux variables (travaux de Klein), les équations modulaires et enfin le groupe abélien de Jordan et quelques-unes de ses applications géométriques (points et plans tangents singuliers de la surface de Kummer, tangentes doubles de la quartique plane de genre 2). En 1916 (1), il étudie les formes quadratiques et la théorie des groupes, en utilisant systématiquement des représentations géométriques. La réduction continuelle, l'étude du groupe modulaire, les réduites des fractions continues donnent lieu à des représentations géométriques simples qui

(1) M. Gaston Julia n'a pas suivi le cours de 1915, étant aux armées, puis à l'hôpital pour soigner ses blessures.

en rendent intuitives les propriétés essentielles. Citons encore les réduites de la fraction continue d'Hermite, les formes d'Hermite à indéterminées conjuguées, les groupes de Bianchi dans le corps $(i\sqrt{D})$, et nous n'aurons donné qu'une idée fort incomplète de cet exposé si riche et si varié de questions regardées habituellement comme ardues et qu'il a su rendre faciles et attrayantes. Les résultats nouveaux ont été publiés par Humbert dans un Mémoire du *Journal de Jordan* dont nous avons parlé plus haut. En 1917, il étudie les fonctions abéliennes de deux variables et la surface de Kummer; c'est un sujet qu'il avait approfondi dans ses premiers travaux, dont nous avons déjà eu l'occasion de parler. En 1918, il traite des principes de la théorie des nombres et de sa liaison avec l'Analyse. Partant de la théorie élémentaire des résidus quadratiques, il aboutit aux parties difficiles de la théorie des formes, et étend notamment l'analyse de Dirichlet aux formes d'Hermite d'un déterminant donné; là aussi, il utilise des représentations géométriques et fait intervenir les aires (non euclidiennes) des domaines fondamentaux des sous-groupes fuchsiens d'un groupe de Picard. En 1919, il expose, avec des applications, la théorie des corps de nombres quadratiques et enfin, en 1920, les applications géométriques et arithmétiques des fonctions elliptiques.

On voit, par ce rapide aperçu, quelle place tenait cet enseignement riche et varié dans l'ensemble de l'enseignement des mathématiques à Paris; c'est une place qui reste à peu près vide et qu'il serait cependant nécessaire de remplir. Si cette place est occupée un jour, il est vraisemblable qu'elle le sera par un des élèves d'Humbert, et c'est à lui que nous devrons encore de voir l'enseignement de ces sujets, où des Français tels que Galois, Hermite, Jordan, ont apporté des contributions si importantes, ne pas être entièrement négligé dans notre pays.

Il est à désirer que les cours d'Humbert soient rédigés et publiés; ce sera là le plus beau monument qui puisse être élevé à la mémoire de cet honnête homme qui fut un bon Français, un éminent mathématicien et un professeur hors ligne.



Nadar Phot. Néogravure. Paris

JULES CARPENTIER
1851-1921