

REMISE
A
M. JACQUES HADAMARD
D'UNE MÉDAILLE D'OR

A L'OCCASION DU CINQUANTIÈME ANNIVERSAIRE
DE SON ÉLECTION A L'ACADÉMIE

le vendredi 21 décembre 1962.

A SON DOMICILE, A PARIS,

ALLOCUTION

DE

M. GASTON JULIA

Membre de la section de géométrie.

Un adolescent, né peu avant le siècle, reçoit un jour, comme prix de Mathématiques, les « *Leçons de Géométrie élémentaire* » de Jacques Hadamard. Dans les vacances qui suivent, il dévore ce livre, il s'acharne à résoudre les innombrables problèmes proposés. Ce livre lui devient un compagnon de tous les jours. Ce livre, et le professeur d'Élémentaires qui le lui a fait donner, orientent sa

vocation, il sera mathématicien, par amour des richesses d'imagination que ce livre lui révèle, par goût du travail bien fait.

Ce jeune homme entre à l'École Normale. Au Collège de France, il voit devant lui ce Jacques Hadamard qu'il admire déjà si fort. Il le suit assidûment; il étudie les belles « *Leçons sur le calcul des variations* » que Maurice Fréchet, élève d'élection du Maître, a rédigées peu auparavant, et que le Maître complète et enrichit par l'exposé de ses travaux sur les *isopérimètres*.

Nous sommes à la fin de 1912. Les mathématiciens de Normale, que la mort d'Henri Poincaré avait attristés peu avant, se réjouissent maintenant à la nouvelle que Jacques Hadamard lui succède dans la section de Géométrie de l'Académie des sciences. On s'interroge; on cherche à mieux connaître l'œuvre du nouvel élu. On découvre la suite de ses merveilleux travaux sur la *Série de Taylor*, sur les *fonctions entières*, sur leur application à la *théorie analytique des nombres*.

On ne perd pas une des leçons que le Maître continue de nous faire au Collège de France sur les isopérimètres, sur l'application des variations à la physique mathématique, en particulier sur les *plaques élastiques encastrées*. On assiste à la naissance du *calcul fonctionnel* par les travaux conjugués de Jacques Hadamard et de Vito Volterra, on se passionne pour l'Équation de Fredholm; on y est aidé par le cher et regretté Joseph Pérès. Paul Lévy, s'engageant dans la voie ouverte par Hadamard et Volterra, nous donne sa belle thèse sur les *Équations aux dérivées fonctionnelles*.

D'autre part, pour initier les jeunes à l'œuvre d'Henri Poincaré, Jacques Hadamard crée son *séminaire*, et nous fait découvrir les immortels travaux sur les groupes fuchsien et sur les fonctions fuchiennes.

*
* *

Du temps a passé. L'adolescent, le jeune homme dont nous parlions a suivi Jacques Hadamard dans la carrière mathématique. Par

ses lectures assidues, par l'assistance aux cours du Collège, il étudie les « *Leçons sur la propagation des ondes* », les beaux mémoires sur les *équations différentielles*, ceux sur les *Équations aux dérivées partielles du type hyperbolique*, qui donneront plus tard les « *Leçons sur le problème de Cauchy* » et dont certaines pages, inspireront les chercheurs de la théorie des distributions. Notre jeune professeur lui-même trouve en particulier dans le mémoire sur les plaques élastiques une évaluation de la variation de la fonction de Green qui le conduit à prolonger ce travail et à en donner des applications fécondes à la théorie de la représentation conforme.

Notre jeune professeur, entre temps, est devenu l'assistant de son Maître à l'École Polytechnique, et dans ce travail commun qui dure plus de 15 années, il apprécie de première main, si j'ose dire, les énormes possibilités, la jeunesse persistante, l'enthousiasme et l'humour de son Maître, les qualités admirables de cet esprit qu'il est heureux d'assister dans son travail d'éducateur.

Autour de Jacques Hadamard, les années ont réuni, dans notre section de géométrie, ceux de ses élèves qui aujourd'hui se présentent autour de lui, pour célébrer le 50^{me} anniversaire de son élection à l'Académie des sciences, le 9 décembre 1912. Et précisément, notre adolescent du début, notre jeune homme, notre professeur devenu moins jeune, est appelé, devant notre Maître commun, à exprimer l'hommage de nos communs sentiments d'admiration, de respect, de reconnaissance, pour tout ce qu'il nous a donné de lui-même à travers ses nourissantes leçons, par l'exemple d'une vie toute entière consacrée à la science et à l'enseignement.

Que nos vœux de vie heureuse et comblée vous accompagnent longtemps, mon cher Maître, tels que nous les formulons aujourd'hui, avec toute notre intelligence et avec tout notre cœur.

ALLOCUTION

DE

M. LOUIS DE BROGLIE

Secrétaire perpétuel de l'Académie des sciences.

CHER MONSIEUR HADAMARD, MON CHER CONFRÈRE,

Nous sommes réunis autour de vous pour fêter le 50^{me} anniversaire de votre élection à l'Académie des sciences. C'est en effet le 9 décembre 1912, il y a eu un demi-siècle il y a 15 jours, que vous avez été élu membre de cette Académie, entrant ainsi dans la première de ses sections, celle qui portait et qui porte encore à l'heure actuelle le nom traditionnel de section de Géométrie. Vos remarquables travaux que vient d'évoquer notre Confrère Gaston Julia et qui apportaient d'admirables contributions aux branches les plus élevées des Mathématiques vous avaient désigné, jeune encore, pour venir siéger parmi les membres de cette illustre Compagnie. Le physicien que je suis ne saurait oublier les contributions capitales que vous avez fournies à des branches diverses des Mathématiques appliquées, notamment en Mécanique des fluides, dans la théorie des ondes, dans l'analyse du principe de Huyghens...

Entré à l'Académie des sciences, vous avez toujours participé très assidûment à ses séances et à ses travaux. Vous interveniez souvent dans les discussions parfois avec ardeur, mais toujours avec autorité et avec lucidité. Vous étiez très attentif à tous les détails des problèmes qui étaient discutés. Ceux qui, comme moi, font partie depuis déjà assez longtemps de l'Académie se souviennent de

vous avoir vu bien souvent assis devant le bureau du Président, près de la table de nos Secrétaires des Comptes rendus, écoutant avec soin les communications et demandant fréquemment qu'on vous remit le texte des notices et des communications qui venaient d'être lues. Vous participiez activement à nos Comités secrets et parfois même vous demandiez des explications sur les propositions de prix faites par nos Commissions, propositions qui le plus souvent sont peu discutées par notre Académie. C'est dire que vous avez toujours rempli très consciencieusement votre rôle au Palais de l'Institut comme ailleurs. On sait du reste que votre curiosité d'esprit est universelle et porte sur toutes les branches des connaissances humaines. Ne dit-on que vous vous êtes toujours intéressé à la Botanique, branche de la Science où cependant le rôle des Mathématiques est encore aujourd'hui assez restreint?

Vous avez tant reçu, mon cher Confrère, de hautes distinctions au cours de votre vie en récompense de vos admirables travaux scientifiques qu'il pouvait paraître difficile à ceux qui voulaient vous témoigner leur sympathie et leur admiration à l'occasion du 50^{me} anniversaire de votre entrée à l'Institut de décider sous quelle forme leurs sentiments pouvaient se manifester. Mais nous avons été aidés dans notre choix par des précédents dont on retrouve trace dans les archives de notre Académie. J'en ai la liste sous les yeux, mais je ne citerai que les deux plus récents. L'Astronome Hervé Faye, qui fut professeur à l'École Polytechnique, fut élu membre de la section d'Astronomie en 1847 et en resta membre pendant 55 ans; l'éminent mathématicien Émile Picard qui fut élu Membre de la section de Géométrie en 1889 et devint ensuite secrétaire perpétuel vécut jusqu'en 1941. L'un et l'autre purent donc atteindre le cinquantième anniversaire de leur élection et pour l'un comme pour l'autre, l'Académie décida de leur offrir à cette occasion une belle médaille. Il était donc naturel qu'une décision analogue fut prise aujourd'hui à votre égard.

Lorsque vous fûtes élu à l'Académie il y a 50 ans, on vous remit comme à tous les nouveaux membres une petite médaille. C'est une petite médaille d'argent très modeste qui porte à l'avvers une tête de Minerve parce que cette déesse casquée était jadis considérée comme personnifiant la Sagesse et la Science et au revers le nom du nouvel élu et la date de son élection. Cette modeste médaille procure à ceux qui la possèdent, l'avantage, également assez modeste, de pouvoir entrer gratuitement dans les musées ou les châteaux qui appartiennent à l'Institut de France. Nous avons pensé que pour rappeler votre élection il était naturel de vous offrir une médaille analogue à celle que vous aviez reçue autrefois, mais d'un plus grand format et d'un métal plus précieux. Il convenait, en effet, qu'elle fut en or puisqu'elle servait à célébrer vos « noces d'or » avec l'Académie des sciences. Je n'ai pas besoin de dire que la proposition faite par le Bureau de vous offrir cette médaille, quand elle fut présentée à l'Académie, a été accueillie par de si vifs si et unanimes applaudissements que tout vote à son sujet a été inutile.

Il appartient à l'actuel Président de l'Académie des Sciences, notre Confrère M. Arnaud Denjoy, qui est pour vous un ami et un disciple, de vous remettre au nom de l'Académie la médaille qu'elle vous offre. Mais avant de lui céder la parole, je veux exprimer, au nom de la petite délégation qui est venue chez vous aujourd'hui et aussi au nom de tous les membres de l'Académie des sciences qui n'ont pas pu nous accompagner, tous nos sentiments de grande admiration, de profond respect et d'affectueuse sympathie.

ALLOCUTION

DE

M. ARNAUD DENJOY

Président de l'Académie des sciences.

CHER MONSIEUR HADAMARD,

La règle suivie par l'Académie des sciences pour la succession de ses présidents a fait que celui de l'année 1962, chargé par vos confrères de vous présenter leur hommage, fût l'un des membres de la section de géométrie, et parmi eux, si j'en excepte M. Fréchet, sans doute l'un de ceux dont la vie mathématique à ses débuts eut le plus de contact avec votre pensée.

Au lycée de Montpellier en 1897 j'avais entre les mains votre grand traité de Géométrie élémentaire. Je me livrai à cette lecture avec admiration, respect et dévotion. Des camarades, esprits forts et sceptiques, ironisaient: «*Ils appellent cette géométrie «élémentaire» pour faire croire qu'ils en savent plus long.*» En fait deux études terminant l'ouvrage, l'une sur la mesure des figures géométriques, l'autre démontrant de façon inattaquable un important préliminaire au théorème de Jordan sur la division du plan en deux régions par toute courbe simple fermée, ces deux exposés présentaient des considérations jamais envisagées auparavant. A cette époque on n'en savait pas plus long.

Je devins «taupin». Notre classe s'extasia d'apprendre que près de vingt ans plus tôt un candidat avait obtenu au concours d'entrée à l'École polytechnique, et pour l'ensemble de ses notes, une moyenne jamais atteinte auparavant ni depuis, dépassant 18 sur 20. Et il

s'agissait toujours de cet Hadamard, dont notre émerveillement faisait un être fabuleux.

Pendant mon séjour à l'École normale je ne profitai pas de votre enseignement. J'écoutai Darboux, Painlevé, Picard, Borel, et naturellement Goursat, mais Poincaré, Appell ni vous ne m'eurent parmi leurs auditeurs.

En revanche, sitôt passé l'agrégation, pourvu d'une modeste bourse de doctorat et me sentant intéressé par les fonctions d'une variable complexe, je voulus commencer par les plus simples, les entières. Aussitôt vos mémoires du Journal de Jordan devinrent ma pâture. Poincaré avait limité la croissance des fonctions de genre donné. Avec une extraordinaire ingéniosité et la manipulation de déterminants impressionnants, vous pûtes évaluer, pour une fonction entière de croissance donnée, un ordre minimum de croissance pour la suite de ses zéros.

Vos fameuses inégalités, d'où Borel devait tirer une démonstration historique du théorème de Picard, ornaient le mémoire. Celui-ci se terminait par l'application célèbre à la fonction $\zeta(e)$ de Riemann. Ma Thèse sur les Produits canoniques d'ordre infini était portée par un arbre dont les racines plongeaient dans vos travaux.

Puis ma voie se détourna des routes frayées par vos ouvrages. Les ensembles géométriques de Cantor, appréciés et utilisés par Poincaré et Painlevé, particulièrement les parfaits totalement discontinus, vous laissèrent froids. Borel les mesura. Baire et Lebesgue fondèrent sur eux la théorie des fonctions de variables réelles. Je me liai à cette nouvelle école. Mais, avec Vito Volterra vous aviez pris une autre direction pleine d'avenir, celle des fonctions de lignes, les fonctionnelles. Paul Lévy, mit en œuvre vos idées. Familier de ces dernières et des cantoriennes également, Fréchet créa une Analyse générale, devenue ensuite la topologie des espaces abstraits et de leurs relations.

Votre renommée parmi les mathématiciens du monde fut et est encore immense. Dans les congrès où je vous rencontrais, j'ai toujours été témoin des acclamations, des applaudissements déchaînés,

saluant votre arrivée sur une estrade face à un vaste amphithéâtre plein et débordant de congressistes enthousiastes.

*

* *

Votre vie a été traversée de violents orages. L'affaire Dreyfus vous fit participer, en raison de liens familiaux, aux tourments de l'innocent condamné. Elle vous jeta dans la mêlée politique, où vous avez toujours défendu vos positions avec le plus grand courage. La jeunesse dont je faisais partie vibrait d'ardeur aux côtés des nobles accusateurs dénonçant l'erreur judiciaire. Puis le procès fut révisé, la grâce accordée, la réhabilitation prononcée, et Dreyfus réintégré dans l'armée. Une longue et douloureuse période de troubles et d'angoisses était close. Les temps sereins se rouvraient devant vous.

La guerre de 1914 vint et ce fut l'épreuve. Les mathématiques étaient là pour absorber toutes vos pensées. Votre séminaire du Collège de France fut pour de fructueuses recherches une source abondante. En même temps vous teniez à jour votre immense érudition. Une nouvelle guerre se déclara et vous contraignit à plus de quatre années d'exil aux États-Unis. En 1945, âgé de plus de 80 ans déjà, mais toujours en pleine activité intellectuelle, vous êtes rentré en France. Le cours d'une existence paisible vous était enfin et définitivement offert. Hélas, il y a quelques années, un grand vide se fit près de vous. La bonne, la charmante Madame Hadamard, si exceptionnellement douée pour comprendre et admettre les singularités dans les façons d'être communes aux mathématiciens « purs », si indulgente à ces anomalies, votre compagne idéale et admirable, s'éteignit. Il vous est resté la tendresse de votre fille Jacqueline, les sentiments d'une nombreuse descendance et parenté, sans oublier le soutien des soins les plus dévoués.

Vos confrères vous souhaitent de connaître encore de longs jours de paix et de repos. Ils me chargent de vous remettre, pour fixer à jamais la mémoire d'une carrière académique ayant couvert un demi-siècle, cette médaille dont le présent s'accompagne de leur respect et de leur affection.



NOTICE NÉCROLOGIQUE

SUR

JACQUES HADAMARD

(1865 - 1963)

Membre de la section de géométrie

prononcée en la séance du 23 décembre 1963 (1)

PAR

M. MAURICE FRÉCHET

Membre de l'Académie des sciences

En perdant son doyen, Jacques Hadamard, le 17 Octobre, l'Académie a perdu un de nos plus grands savants de tous les temps, un savant de renommée mondiale, comme l'a montré sa nomination comme Président d'Honneur du congrès international des Mathématiques tenu à Cambridge (Mass.) en 1950.

(1) En réalité, la Notice parue dans les Comptes - Rendus de l'Académie des Sciences, (p. 4081-4086, n° 28, tome 257, du 23 Décembre 1963), n'était, pour ne pas alourdir ces C. R., qu'un extrait de la présente Notice, plus complète, parue ultérieurement dans les « Notices et Discours » publiés par l'Académie des Sciences, chez Gauthier - Villars.

C'est parce que j'ai été le premier des élèves et des disciples d'Hadamard, que, contrairement à la tradition, sa famille a exprimé le vœu de me voir chargé d'évoquer sa mémoire, tant à ses funérailles, que devant l'Académie. C'était là me faire un grand honneur, une occasion de lui témoigner à la fois mon admiration et ma reconnaissance, mais en même temps un honneur périlleux. Je m'y essaierai, néanmoins, de mon mieux.

Lors de mon allocution au cimetière du Père Lachaise, j'avais brossé un tableau de la vie, du caractère et de l'action pédagogique, universitaire et sociale d'Hadamard. Mes auditeurs d'aujourd'hui comprendront que de nombreux passages de cette allocution devaient nécessairement se retrouver dans cette notice. Mais je n'avais pu dire que quelques mots sur l'œuvre proprement scientifique d'Hadamard devant un auditoire encore plus varié qu'ici. Car la soif de connaissances dans tous les domaines et la générosité de cœur, d'Hadamard, lui avaient laissé des admirateurs et des amis, aussi bien parmi les littéraires, les hommes d'action, les musiciens, etc.... que parmi les scientifiques. C'est sans doute pourquoi on m'a demandé de reproduire cette allocution dans le périodique « La Pensée » (1), non spécialisé dans les sciences.

MES CHERS CONFRÈRES,

Vous avez entendu ou lu, enchâssé dans une suite de Notes biographiques diverses, l'éloquent, le magnifique éloge que votre Président a consacré à Jacques Hadamard.

Il me suffira ici de développer cette Notice.

Dans le court espace d'une page des Comptes-Rendus, il était impossible à votre Président de commenter et de faire comprendre l'œuvre scientifique d'Hadamard. Mais M. Heim a su nous décrire aussi bien la soif inextinguible de connaissances nouvelles d'Hadamard que la noblesse de son caractère, son désir de justice et sa

(1) Pages 102-104, du n° 112, Décembre 1963.

bonté. Nous pourrions aussi nous étendre un peu plus sur ces côtés de son caractère en citant quelques exemples de son action sociale.

Dans cette enceinte, puis, ici-même, il m'est possible de donner plus de détails sur l'œuvre proprement scientifique d'Hadamard, sans négliger ses autres formes d'activité.

Mais je ne pourrai le faire que trop brièvement, une telle allocution ne devant disposer comme d'habitude que d'une partie de la durée de cette séance de l'Académie. En outre, pour ne pas retarder la parution de cet exposé dans les Comptes-Rendus, je n'ai pu ni consulter avec le soin voulu, ni digérer tous les travaux d'Hadamard et j'ai dû m'inspirer souvent des savants exposés qui ont été présentés lors du Jubilé d'Hadamard en 1936. Mais je souhaite qu'un mathématicien prenne, à loisir, la peine d'exposer en détail la vie et l'œuvre d'Hadamard, comme j'ai pu rédiger et faire paraître, sept ans après la mort de mon prédécesseur Émile Borel, une petite brochure de cent pages environ, dans la collection des « Monographies » éditée par le périodique intitulé « L'enseignement mathématique » de Genève, où une initiative analogue pour Hadamard serait certainement bien accueillie ;

Traçons maintenant un court aperçu de sa vie.

Jacques Hadamard est né le 8 Décembre 1865 à Versailles ; son père était professeur de latin au Lycée Louis Le Grand. Il a épousé en 1892, M^{lle} Louise-Anna Trénel, femme intelligente et de grand cœur, qui l'a soutenu et aidé efficacement dans toute sa carrière. Elle l'a précédé dans la tombe et sa mort a été pour son mari une grande perte dont il ne s'est jamais relevé.

Ils ont eu cinq enfants : trois garçons : Pierre, Étienne, Mathieu et deux filles : Cécile et Jacqueline. Très tôt, Hadamard a été éprouvé dans sa famille : les deux aînés, qui donnaient les plus belles espérances, devenus officiers dans la première guerre, y ont été tués ; le troisième fils est mort pour la France dans la dernière guerre.

Cependant, sa seconde fille, Jacqueline, a pu rester auprès de son père jusqu'à son dernier jour et écarter la solitude qui le menaçait.

Elle a été secondée par sa sœur Cécile Picard, son gendre René Picard et sa belle-sœur Simone Hadamard.

Enfin, je ne puis ignorer quel secours intelligent, efficace et dévoué Hadamard a trouvé ces dernières années auprès d'une infirmière de grand mérite, M^{me} Hameau.

Mais revenons à l'homme lui-même. Dans son enfance, sans montrer de prédilection pour les mathématiques, il comptait suivre l'exemple de son père et se consacrer aux langues anciennes. C'est ainsi qu'au Concours général entre tous les lycées de France, il était lauréat dans les compositions de Latin et de Grec. C'est seulement plus tard, vers les classes de baccalauréat, qu'il se sentit attiré vers les Mathématiques, suivant ainsi, par ce changement d'objectif, l'exemple d'Émile Picard et de quelques autres grands mathématiciens. Il s'engageait si bien dans cette direction qu'il fut reçu, peu après, à l'École Normale Supérieure, dans la Section des Sciences.

Mais il aurait aussi bien pu entrer à l'École Polytechnique où, reçu 1^{er} comme à l'École Normale, il avait obtenu le record, jusqu'à lui, du total des points du concours d'entrée. C'était encore là une manifestation de l'universalité de ses aptitudes.

Donnons - en quelques autres exemples plus frappants encore. Aimant la musique, il avait organisé un orchestre d'amateurs; plus tard, il fit partie d'un quatuor où figurait aussi notre confrère Henri Villat.

Il s'intéressait aussi à la Botanique; même des botanistes venaient le consulter sur les Fougères.

Tout dernièrement, un éminent chimiste me confiait comme il avait été stupéfait des connaissances d'Hadamard en chimie.

Il avait d'ailleurs une mémoire prodigieuse. Son éditeur m'a raconté qu'au moment où il rédigeait son cours d'Analyse, Hadamard, sortant de sa librairie, où il avait corrigé ses épreuves, était revenu

en lui disant: «Je viens de m'apercevoir, dans la rue, que j'avais oublié de corriger une erreur à la troisième ligne de la page 169».

Quelle devait être sa carrière, avec de tels dons?

Après avoir été reçu agrégé de mathématiques, il avait été nommé Professeur au Lycée Buffon à Paris (1890-1893); ce qui lui avait donné l'occasion d'écrire pour l'enseignement secondaire, des «Leçons de Géométrie élémentaire» d'une grande originalité. Après sa soutenance de thèse, il était nommé d'abord à l'Université de Bordeaux (1894-1897), puis à la Sorbonne où, entré comme Maître de conférences, il devenait Professeur adjoint (1897-1912).

Enfin, il assurait en 1909, la suppléance de Maurice Lévy, puis, en 1912, il était élu professeur titulaire au Collège de France où il enseigna jusqu'à sa retraite en 1935.

L'œuvre scientifique d'Hadamard est immense et d'une importance exceptionnelle. Après la mort d'Henri Poincaré, d'Hilbert et d'Émile Borel, il est devenu, non seulement le plus grand mathématicien français vivant, mais même le plus grand mathématicien vivant du monde entier.

Comme beaucoup de mathématiciens, tels ceux dont je viens de rappeler les noms, Hadamard a porté d'abord ses recherches sur les mathématiques pures puis les a étendues peu à peu aux mathématiques appliquées: à la cinématique, à la mécanique et enfin à la physique. En outre de cette tendance, fréquente chez les mathématiciens, il a été influencé dans cette voie par son amitié, déjà nouée lors de leur séjour commun à l'École Normale Supérieure, avec le grand physicien mathématicien Duhem.

Nous allons passer en revue, les travaux d'Hadamard dans le même ordre logique et à peu près chronologique.

La thèse d'Hadamard a paru en 1892. Elle portait sur les fonctions analytiques, ces fonctions d'une variable complexe $z = x + i y$ qui, dans un certain domaine peuvent être représentées par une série convergente, dite entière, c'est-à-dire de la forme:

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots \text{ où les } a_0, a_1, \dots \text{ sont}$$

des constantes appelées coefficients de la série. Il y établit d'abord la formule bien connue qui détermine son rayon de convergence en fonction des a_n .

Dans sa thèse, Hadamard s'était proposé de partir de l'étude des coefficients d'une série entière pour élucider les questions d'existence et éventuellement les propriétés de la convergence de cette série, des singularités de la fonction qu'elle représente et du prolongement analytique de cette fonction. Et il y avait brillamment réussi par des méthodes à la fois simples et élégantes, lui fournissant plusieurs résultats très frappants, comme, par exemple, celui-ci :

Si une série entière lacunaire $\sum a_n z^{\lambda_n}$, avec $\lambda_{n-1} > \lambda_n > \lambda > 1$, a un rayon de convergence fini, le cercle de convergence est une coupure.

Vers la même époque, Hadamard a aussi obtenu d'autres résultats remarquables comme les suivants :

I. — Soient deux séries entières $\sum a_n z^n$, $\sum b_n z^n$, convergentes pour $|z| < k$ et $|z| < l$ respectivement. La série $\psi(z) = \sum a_n b_n z^n$ converge pour $|z| < k.l$ et elle n'a d'autres points singuliers que les points d'affixes, $\alpha\beta$ où α et β sont les affixes des points singuliers des deux premières séries.

II. — En appelant $M(r)$ le maximum de $|f(z)|$ pour $|z| = r$, alors, tant que $f(z)$ est régulière, si $\log M(r)$, considéré comme une fonction de $\log r$ a une dérivée seconde, celle-ci est non négative. D'où résulte une inégalité entre les valeurs de $M(r)$ pour trois valeurs de r distinctes, qui est appelée « le théorème des trois cercles ».

Comme suite naturelle de sa thèse, Hadamard répondait en 1892 à une question posée en 1891 par l'Académie des Sciences. Et celle-ci le conduisait à étudier les fonctions entières, [c'est-à-dire les fonctions analytiques $f(z)$ définies pour toutes les valeurs de la variable z]. Hadamard étudiait ce qu'on appelle le « genre » de ces fonctions et il donnait, entre autres, une loi de croissance des modules des racines de la fonction à l'aide des coefficients de son développement en série entière.

L'Académie des Sciences, en lui décernant le « Grand Prix des Sciences Mathématiques » avec des éloges exceptionnels, en 1892, vint lui conférer un grand prestige. Les résultats et les méthodes d'Hadamard dans le domaine des fonctions analytiques avaient ouvert des voies nouvelles.

Ces recherches sur l'Analyse mathématique lui donnent le moyen de toucher à la théorie des nombres. Elles lui permettent d'obtenir la démonstration d'un théorème sur la distribution des nombres premiers, énoncé autrefois sans démonstration par Riemann. Le théorème d'Hadamard a d'ailleurs été trouvé indépendamment par de La Vallée Poussin.

Riemann avait conjecturé que la fonction $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ n'avait (en négligeant les racines réelles et négatives) que des racines de la forme $s = \frac{1}{2} + ti$ (t réel). Hadamard a montré que $\zeta(s)$ n'a pas de racines de la forme $s = 1 + ti$ (t réel).

Soient alors $\pi(n)$ le nombre des nombres premiers inférieurs à n , et $\mu(n) = \frac{n}{\log n}$.

Tchebichev avait prouvé que si $\frac{\pi(n)}{\mu(n)}$ a une limite, cette limite ne peut être égale qu'à 1. Pour prouver que $\frac{\pi(n)}{\mu(n)}$ a une limite, il suffit de prouver que $\zeta(s)$ n'a pas de racine de la forme $1 + ti$, (t réel). En démontrant cette dernière proposition, Hadamard prouvait du même coup « le théorème des nombres premiers », à savoir que le rapport $\frac{\pi(n)}{\mu(n)}$ tend vers 1 quand n croît indéfiniment.

C'est ce résultat, dans ce qu'on peut appeler avec Vessiot l'arithmétique transcendante, qui a fait connaître de bonne heure, chez les mathématiciens de tous les pays, le nom d'Hadamard, alors âgé seulement de 27 ans.

Mais, déjà, son esprit inventif et curieux de nouveautés le faisait passer à d'autres sujets de recherches. Dans le champ des mathématiques pures, il étudie encore le calcul des Variations.

Il en fait le sujet d'un cours au collège de France et me fait l'honneur de me confier la rédaction du livre où ce cours est exposé. A la fin de ce cours, il fait connaître en France une généralisation des fonctions d'une variable numérique due à son illustre ami italien Vito Volterra. Celui-ci étudie ce qu'il appelle « les fonctions de lignes », c'est-à-dire les fonctions numériques dont la variable est une courbe. Hadamard passe à une notion analogue, qu'il appelle fonctionnelle où la variable est une fonction numérique et qu'il faut bien distinguer des classiques fonctions de fonctions.

Il ne se contente pas d'exposer et de commenter les résultats de Volterra sur ce sujet: Euler et Lagrange avaient obtenu des conditions nécessaires en ramenant tout problème sur le Calcul des Variations à un problème plus particulier de la théorie des fonctions de variables numériques. Dans son livre, Hadamard ouvre le chemin opposé: il remodèle le Calcul des Variations en le considérant systématiquement comme un problème particulier dans la théorie, plus générale, de l'« Analyse fonctionnelle ».

Plus tard, en adoptant la définition de la dérivée d'une fonctionnelle proposée par Volterra, Hadamard arrive à la formule exprimant la valeur d'une fonction de Green relative à un certain domaine, pour une variation infiniment petite de ce domaine. Son mémoire, publié en 1908, fut couronné par l'Académie des Sciences.

Enfin, dans un article prophétique, il propose aux mathématiciens l'étude plus générale des fonctions numériques d'une variable de nature quelconque et fait observer qu'il faudrait la fonder sur une géométrie nouvelle. C'est cette dernière remarque qui m'a incité à essayer de créer, en effet, une telle géométrie et qui m'a conduit à fonder la théorie des espaces abstraits.

Dans la suite, ses recherches en Mathématiques pures et en Mathématiques appliquées apparaissent intimement liées.

Cela lui fait souhaiter de se tourner vers les applications. Mais celles-ci sont si souvent exprimées par des équations différentielles ou aux dérivées partielles qu'Hadamard en attaquant l'étude mathématique de ces formes d'équations, considère avec plus de faveur

ceux des problèmes qu'elles soulèvent qui ont une signification physique.

Elles ont aussi parfois une interprétation géométrique intéressante.

Par exemple, Hadamard prouve un résultat inattendu, où l'on voit surgir la discontinuité dans un domaine voué en apparence au continu. Il montre que: sur les surfaces à courbures opposées et à connexion multiple, les tangentes aux lignes géodésiques (c'est-à-dire aux lignes de plus court chemin) de ces surfaces forment un ensemble « parfait discontinu ». C'était, remarque Émile Picard, le second exemple d'un tel ensemble, le premier ayant été rencontré par Henri Poincaré dans la formation de certains groupes fuchsien.

Hadamard a plusieurs fois rencontré et fait connaître des faits aussi surprenants. En mathématiques, on était habitué à ce qu'une petite modification dans l'énoncé ou dans les données d'un problème entraînerait généralement de petites modifications dans leur solution. Mais il a montré plusieurs fois qu'il n'en était pas toujours ainsi et nous en donnerons un autre exemple plus loin.

La géométrie n'était d'ailleurs intervenue dans l'exemple précédent que pour illustrer ses recherches sur les équations différentielles. Hadamard avait étudié les courbes définies par des classes étendues d'équations différentielles. Ces dernières sont à la base de la Mécanique et c'est en faisant intervenir ses résultats qu'il a pu approfondir les questions de stabilité et d'instabilité.

Mais la physique attirait Hadamard, pour elle-même, comme pour satisfaire son désir d'étudier les équations aux dérivées partielles, lesquelles expriment de nombreux phénomènes.

Il y rencontrait un des exemples annoncés plus haut: des circonstances très différentes se présentant, en effet, dans la résolution des équations aux dérivées partielles, suivant la nature des « caractéristiques » de ces équations, ou, suivant les conditions initiales considérées, ou suivant la parité du nombre des variables, ou etc...

En introduisant les solutions fondamentales, Hadamard a pu résoudre des problèmes restés jusqu'à lui sans solution satisfaisante.

Après ses recherches sur la Mécanique des solides, il passe à la Mécanique des fluides, appelée aussi Hydrodynamique. Il en fait l'objet de ses premiers cours au Collège de France et les publie sous le titre « *Leçons sur la propagation des ondes et sur les équations de l'hydrodynamique* ».

Hugoniot avait étudié les ondes planes. Hadamard étudie plus généralement la cinématique des milieux continus et l'applique au mouvement des ondes. Dans ce mouvement peuvent se produire des discontinuités dont Hadamard fait une étude générale, forme les conditions de compatibilité et donne une interprétation géométrique. Les rayons donnent un exemple pour le son et la lumière, de la conception générale due à Hadamard des lignes, qu'il appelle « bicaractéristiques » relatives à des équations aux dérivées partielles.

Notre confrère s'est aussi attaché à l'étude du principe de Huyghens entendu au sens de Kirchhoff.

Il distingue les cas où s'applique le principe de Huyghens : (ceux où le système rentre au repos après le passage d'une onde), de ceux où, après ce passage, intervient une onde résiduelle. On avait déjà fait cette distinction dans le cas de la propagation d'une perturbation électrique dans un cable. Hadamard a pu complètement élucider, au moins au point de vue mathématique, cette question du principe de Huyghens, antérieurement très discuté, par exemple, entre Fresnel et Poisson.

Tout en se consacrant principalement, dans ses dernières années de recherches, aux Mathématiques appliquées, il ne néglige pas pour autant les Mathématiques pures. Citons, par exemple, sa définition de la partie finie d'une intégrale infinie. Puis sa définition (opératoire) de la différentielle d'une fonction de plusieurs variables, définition qui vient se placer, dans le temps, après la première définition moderne due à Stolz, après la définition géométrique que nous avons donné ensuite et avant la définition analogique due à Severi. Nous avons pu démontrer que ces quatre définitions, de

formes et de buts tout à fait différents, sont équivalentes ⁽¹⁾. Et elles offrent sur la définition antérieure (encore présente dans l'ouvrage de Goursat paru en 1909) l'avantage de permettre un parallélisme complet des propriétés des fonctions différentiables d'une ou de plusieurs variables.

Citons encore la contribution d'Hadamard à la théorie des fonctions « quasi-analytiques », qui a suivi la notion de fonction monogène, définie par Cauchy et par Borel. Il montre qu'on peut aussi parvenir à la même notion de fonction quasi-analytique à partir de l'étude des solutions des équations aux dérivées partielles. En Calcul des Probabilités, il a donné une solution nouvelle du problème de battage des cartes, d'abord posé et résolu par Henri Poincaré.

Citons, enfin, un théorème sur les déterminants, qui a permis à Fredholm d'étudier l'existence et de déterminer la forme des solutions de son « équation intégrale ».

Au Collège de France, pendant plusieurs années, Hadamard s'était conformé à la tradition en faisant des cours que nous avons mentionnés plus haut. Mais une conception toute différente de son propre rôle le hantait et, dès 1913, il avait fait analyser quelques mémoires par ses auditeurs. C'était une première approche vers l'institution d'un « Séminaire », institution déjà répandue dans plusieurs pays étrangers. Mais notre confrère allait donner au nom de Séminaire, un sens personnel tout nouveau qui allait rendre son séminaire partout célèbre.

Mais la guerre vint et arrêta ce premier essai. La guerre finie, Hadamard revient à son idée. A l'étranger, les séminaires étaient généralement spécialisés. Grâce à son érudition et à son aptitude à dominer tous les domaines, il étend à toutes les parties des mathématiques l'activité de son séminaire.

Il débute en exposant lui-même l'œuvre de Henri Poincaré (pour

⁽¹⁾ Voir notre article en impression dans « L'enseignement mathématique » publié à Genève.

laquelle il a une grande admiration), œuvre qui s'étale, elle aussi, sur toutes les branches des mathématiques pures et appliquées.

Puis il fait participer ses auditeurs à des analyses de mémoires. Il lui faut choisir ceux-ci, choisir aussi les chercheurs capables de les exposer. Le succès appelle le succès. A mesure que son séminaire est connu, ce ne sont plus des étudiants qui y assistent, mais des chercheurs, et même des savants venus de tous les coins du monde.

C'est qu'en effet, nul autre qu'Hadamard n'était capable de diriger et d'orienter, sans effort, la discussion, (qui portait pourtant sur les chapitres les plus variés des mathématiques), et de présenter à chaque spécialiste des remarques nouvelles et profondes.

Il ne se contente pas de son action orale. Après les cours imprimés déjà mentionnés, il publie un cours d'analyse, en deux volumes, très clair et qui contient beaucoup d'applications. Il avait d'ailleurs fait ses débuts comme écrivain mathématique en écrivant la « *Géométrie élémentaire* » qui lui avait été demandée par Darboux. Tout en y développant les théories élémentaires classiques, il y rattache des notions nouvelles, faisant de ce livre, un ouvrage de fond qui résistera aux changements de programme.

Nous n'avons pu donner qu'une esquisse de l'œuvre scientifique d'Hadamard. Pour la mieux pénétrer, il faudrait se reporter à ses diverses publications. On trouvera quelques uns de ses mémoires les plus importants rassemblés dans le gros volume intitulé « *Selecta* », publié en 1936, par la librairie Gauthier-Villars à l'occasion de son Jubilé.

Pour aller plus loin, notre Compagnie trouvera certainement nécessaire de patroner la publication des œuvres complètes d'Hadamard, comme elle l'a fait récemment pour les recherches d'Henri Poincaré, et d'Élie Cartan ⁽¹⁾.

(1) Ce vœu va être exaucé. Depuis notre allocution à l'Académie des Sciences, le Comité National français de mathématiques a décidé de solliciter les concours nécessaires et de charger de la préparation de l'impression de ces œuvres, un Comité dont il m'a fait l'honneur de me nommer Président.

En dehors de ses écrits proprement scientifiques, Hadamard s'est aussi intéressé à la philosophie des sciences. C'est ainsi qu'il a participé à une correspondance célèbre (et plus tard publiée) où il opposait ses vues d'idéaliste aux mathématiciens empiristes, Émile Borel, Lebesgue, et Baire. Il s'agissait des questions d'existence qui interviennent au sujet des ensembles infinis et des paradoxes auxquels ceux-ci paraissent conduire.

D'autre part, Hadamard a publié pendant son séjour en Amérique un ouvrage sur la psychologie de l'invention. Il serait souhaitable qu'un spécialiste de la philosophie des sciences étudie à la fois cet ouvrage et un mémoire sur un sujet analogue publié par Émile Borel dans la revue polonaise « Organon ». Ce même spécialiste pourrait, en particulier, faire ressortir les concordances et les divergences de ces deux ouvrages.

Hadamard s'intéressait aussi beaucoup à l'Enseignement et à la Pédagogie; il a lutté avec son ardeur habituelle pour faire triompher ses idées, soit au sein de Commissions et de Comités, soit par de nombreux articles dans les périodiques les plus divers.

Tout au long de sa carrière, ce fut un grand voyageur. Il a donné des conférences un peu partout; il a aussi fait plusieurs fois des cours en terre étrangère, à Yale, à Rio de Janeiro, en particulier. Il est même resté quatre mois comme Professeur à l'Academia Sinica et à l'Université Tsing-Hoa de Pékin. C'est la rédaction du cours fait à cette Université qui constitue le manuscrit de son dernier livre. Malheureusement ce manuscrit, envoyé à Pékin, semble s'y être perdu.

Sa renommée s'étendait. Après avoir reçu des prix importants de l'Académie des Sciences, il était élu membre de cette Compagnie à l'âge de 47 ans. Plusieurs d'entre nous se souviennent qu'au cinquantième de cette élection, il avait reçu, tout souriant, il y a quelques mois à peine, la médaille d'or qu'avait été lui apporter une délégation de l'Académie à cette occasion. Il a été aussi nommé membre de plusieurs Académies étrangères, parmi lesquelles je me

contenterai de citer l'Académie des Lincei, celle de l'U. R. S. S., la National Academy of Science, de Washington, la Royal Society de Londres.

Plus souvent encore il a été nommé « Docteur honoris causa » de si nombreuses universités qu'il est impossible de les énumérer ici. Enfin l'Académie des Lincei, disposant assez récemment, du montant élevé d'un prix Feltrinelli, l'en faisait le premier bénéficiaire.

Le gouvernement français, après l'avoir fait successivement gravir les divers échelons de la Légion d'honneur lui a attribué la plus haute distinction en le nommant Grand Croix de cet Ordre.

Nous avons rappelé les différents aspects de sa vie scientifique et universitaire. Mais à côté du savant, il y avait l'homme. Il aimait l'humour et m'avait lu un malicieux petit poème de sa façon sur une candidature à l'Académie. Mais ce qui le caractérisait surtout, c'était sa générosité de cœur.

Et ici, pour illustrer cette appréciation je veux m'appuyer sur les citations d'éminentes personnalités. Dans le domaine scientifique, Lebesgue le montrait comme un homme « qui sait admirer, qui parle avec enthousiasme des découvertes des autres ». Et Hadamard lui-même écrit : « Rien ne peut être plus précieux pour le savant que de se sentir dépassé dans les chemins mêmes qu'il a commencé à tracer ». Il fait sienne cette citation de grand savant que fut Duclaux : « Dépassez-nous, cadets, car vos jambes sont plus jeunes, mais, pour Dieu, marchez, car si vous restiez stationnaires et nous laissez durer, ni vous, ni nous, n'aurions fait notre devoir ».

Mais Hadamard a étendu ses idées et son activité à d'autres domaines que les sciences.

Comme disait Bédier, ce grand écrivain qui fut son ami de toujours, « Loin de s'enfermer dans sa mathématique, comme dans une forteresse de l'égoïsme intellectuel, il s'est toujours dépensé dans tous les champs de l'action civique ». Et comme disait le Ministre Roustan, « il a toujours consacré une belle part de son activité à la cause de la Justice et du Droit ».

C'est ainsi qu'il est entré dans le Conseil de la Ligue des Droits de l'Homme, où, comme le rappelait à ses funérailles, M. Daniel Mayer, Président de cette Ligue, il a opiniâtement signalé et flétri tous les manquements aux droits de l'homme survenus à sa connaissance. Il n'a consenti à s'en retirer que lorsqu'il a eu l'assurance que sa fille, M^{lle} Jacqueline Hadamard, prendrait sa place, non seulement nominalement, mais avec la même ardeur.

Je viens de rappeler qu'Hadamard s'enthousiasmait pour toutes les grandes causes. Mais il savait aussi s'intéresser aux individus et les aider sans espoir de récompense.

On me permettra d'illustrer cette appréciation par le rappel d'un fait personnel : C'est à lui que je dois d'être devenu un mathématicien. J'étais entré au lycée Buffon en cinquième quand il y était professeur. Il avait cru remarquer en moi, tout jeune encore, un goût prononcé pour les mathématiques et avait fait appeler mon père pour lui recommander de m'encourager à persévérer dans cette voie. Ceci aurait déjà suffi à déterminer mon orientation, mais il fit beaucoup plus. Nommé peu après à Bordeaux, il trouvait le temps, dans la floraison de ses magnifiques travaux, de m'écrire pour me poser des problèmes et aussi pour se livrer à un commentaire de ma solution, commentaire dont la portée s'étendait bien au delà de celle-ci. Il avait aussi coutume, lors de ses voyages à Paris, de me convoquer chez lui pour me questionner et s'assurer que ses anticipations n'avaient pas été vaines. Je dois avouer que, si j'étais heureux de rencontrer mon bienfaiteur, j'étais aussi hanté par la crainte de n'être pas à même de répondre à ses questions.

Plus tard, faisant connaître dans ses leçons le domaine nouveau constitué par les fonctionnelles de Volterra, il m'orientait dans cette direction.

D'ailleurs, si j'ai été sans doute son premier disciple, je suis loin d'avoir été le seul à profiter de son aide et de ses précieux conseils,

qu'il a prodigués toute sa vie sans ménager ni son temps, ni sa peine.

En terminant cette description de l'œuvre et du caractère d'Hadamard, comment pourrais-je mieux la résumer qu'en citant la synthèse écrite indépendamment par son ami, M. Nicoletis: « Grande œuvre de savant et de penseur, universalité des dons, sensibilité, amour de ses semblables, courage dans l'action devant la vie, ses problèmes et ses épreuves ».

Mes relations avec Hadamard n'étaient pas seulement limitées à sa personne. J'ai toujours reçu de Madame Hadamard l'accueil le plus bienveillant et le plus aimable. Et je ne voudrais pas terminer cette Notice sans rappeler la part qu'elle a eue dans les succès de son mari, l'aidant de toute manière dans la partie matérielle associée à toute œuvre scientifique, cherchant à réduire où à éliminer les fatigues de ses voyages où elle n'a pas hésité à l'accompagner fréquemment, en Chine comme en Amérique.

Sachons donc unir le nom de Madame Hadamard et ceux de ses enfants, au souvenir admiratif et affectueux que nous conserverons de Jacques Hadamard.
