ÉLOGE DE M. FONTAINE.

ALEXIS FONTAINE naquit à Claveiſon en Dauphiné, vers l'année 1705. Il avoit environ vingt ans lorſque ſon père mourut; ſes parens auroient voulu qu'il ſuivît les Études de Droit, néceſſaires pour exercer une Charge; mais le ſtyle barbare des Commentateurs des Loix Romaines, & leur enthouſiaſme ſervile dégoûtoient un homme que la Nature n'avoit pas deſtiné à ſe traîner ſur les pas d'autrui. Né avec cette rigueur d'eſprit que les démonſtrations ſeules peuvent ſatisfaire, & qui donne un goût excluſif pour les Sciences exactes; peu ſenſible au plaiſir de démêler parmi les débris des anciennes Loix Romaines, quelques reſtes de la ſageſſe du Sénat; ces Loix elles-mêmes ne pouvoient être à ſes yeux qu'un amas de déciſions, fondées moins ſouvent ſur la raiſon que ſur les paſſions du Légiſlateur, ou ſur les préjugés de ſon ſiècle.

D'ailleurs, la conſidération qu'on achette avec une Charge ne flate guère que les hommes qui n'ont pas en eux de quoi prétendre à celle que donnent les talens; & l'envie d'être ce qu'on apelle quelque choſe, n'eſt bien ſouvent, dans un jeune homme, que l'inſtinct de la médiocrité. Tourmenté par les ſollicitations de ſes parens, & encore plus par l'activité de ſon génie auquel la Province n'offroit aucun aliment, M. Fontaine vint chercher à Paris le repos & un objet d'occupation. Le haſard lui offrit un livre de Géométrie dont il avoit appris les élémens dans ſon enfance, & il ſentit qu'il étoit né pour elle. Il la cultiva environ deux ans dans la Capitale. Élevé chez les Jéſuites, ce fut au Père Caſtel qu'il s'adreſſa pour avoir des ſecours & des conſeils. Le Père Caſtel étoit alors le Mathématicien le plus célèbre de ſa Société. La Nature lui avoit donné une imagination ardente, un eſprit hardi & élevé; & peut-être eût-il laiſſé quelque réputation, ſi la certitude de compter autant d'admirateurs qu'il y avoit de Jéſuites n'eût éteint en lui cette inquiétude qui nous rend difficiles ſur nos productions, & ſans laquelle le génie même s'éléveroit rarement à de grandes choſes; tant il eſt vrai, & même en plus d'un ſens, qu'il n'y a point pour les talens d'ennemis plus dangereux que des prôneurs.

La fortune de M. Fontaine ne lui permettoit pas alors de ſe fixer à Paris; il retourna dans ſa Province & y reſta juſqu'à la mort de ſon frère aîné. Maître alors d'une Terre d'environ cinquante mille livres, il la vendit & vint à Paris dans le deſſein de ne plus vivre que pour les Sciences. D'abord il employa une partie de ſes fonds à l'acquiſition d'Anel, petite Terre auprès de Compiegne: à cette diſtance de Paris, il pouvoit réunir & la paiſible liberté de la ſolitude, ſi précieuſe pour ceux qui ſe livrent aux Études abſtraites, & le commerce des Savans qui excite le génie & lui fournit les objets ſur leſquels il doit s'exercer. Ce fut dans ce temps que M. Fontaine ſe lia avec M.rs Clairaut & de Maupertuis; & il montra qu'il étoit digne d'une Société ſi ſavante, en donnant, pour les Problèmes *de maximis*, une Méthode plus générale que celle de Jean Bernoulli, dont alors il n'avoit pas encore lû les Ouvrages. Cette Méthode, imprimée en 1764, à la tête du Recueil des Œuvres de M. Fontaine, n'eſt pas réduite en formules comme celle de M. Euler; mais M. Fontaine, en donnant ſi long-temps après, l'eſquiſſe de la ſienne, n'a voulu que montrer au Public le premier eſſai de ſes forces & ſon premier titre pour l'Académie.

Les Géomètres s'occupoient alors des recherches de Jean Bernoulli ſur les *Tautochrones*. M. Fontaine trouva une nouvelle Solution de ce Problème: il l'appliqua à des cas abſolument nouveaux; & il montra qu'elle étoit ſuſceptible d'une très-grande généralité. Il étoit principalement queſtion alors de trouver la Tautochrone pour une force accélératrice, dont la loi étoit donnée. Les Géomètres ſe ſont propoſé depuis une queſtion d'un autre ordre; ils ont cherché dans quelles hypothèſes de force accélératrice il peut y avoir une Tautochrone. Le Problème dépend alors de la ſolution des équations aux différences partielles, dont le nom n'étoit pas même connu dans le temps où M. Fontaine donna ſon premier Mémoire. Deux grands Géomètres, M. de la Grange & M. d'Alembert, ont publié la Solution de ce dernier

Problème sur les Tautochrones, dans les Mémoires de l'Académie de Berlin; leurs recherches furent pour M. Fontaine une occasion de revenir sur un sujet qu'il avoit oublié depuis trente ans. Il pouvoit se borner à donner aussi une solution du Problème, & à montrer que ses premières Méthodes pouvoient y conduire: alors il eût pu partager la gloire de ses illustres Rivaux; mais le ton avec lequel il parla de l'Ouvrage de M. de la Grange, annonçoit qu'il auroit voulu avoir cette gloire toute entière. M. de la Grange fut donc obligé d'examiner aussi la solution de M. Fontaine; & il trouva qu'elle étoit moins complète que la sienne, & même défectueuse à quelques égards.

Jusqu'à M. Fontaine, on n'avoit connu, pour le Calcul intégral, que des méthodes particulières. Newton & Cotes * n'avoient travaillé que sur les Quadratures; les Équations, soit homogènes, soit linéaires du premier ordre, avoient été rappelées aux Quadratures par Jean Bernoulli. Nicolas, son fils, qui enlevé aux Sciences dans sa jeunesse, avoit déjà mérité que son père fût jaloux de sa gloire; M. Euler qui jeune encore étoit cependant célèbre depuis long-temps, avoient étendu & perfectionné les méthodes de Jean Bernoulli; & l'on trouvoit dans leurs Ouvrages, des vues grandes & profondes sur la nature même du calcul; mais M. Fontaine osa le premier s'occuper de la Théorie générale des Équations différentielles, & l'embrasser dans toute son étendue. Ses premières Recherches furent présentées à l'Académie dès 1739, mais elles n'ont été imprimées qu'en 1764. Dans cette partie de son Calcul intégral, M. Fontaine a poussé très-loin la Théorie des Équations de conditions, dont Nicolas Bernoulli avoit donné les premiers essais; & dans la seconde partie, il a développé le système des différentes intégrales que peut avoir une Équation des ordres supérieurs; il a montré comment toutes ces intégrales répondent à la fois à la même différentielle & à la même intégrale finie; & comment, lorsqu'on les connoît, il ne reste plus pour avoir l'intégrale finie, qu'à éliminer les différences; mais

* Cotes mourut très-jeune, & Newton disoit de lui : *si Cotes eût vécu, nous saurions quelque chose.*

il ne considère que les Équations dont les intégrales sont algébriques: Si elles sont rationnelles & pour le premier ordre, il est aisé de déduire de la méthode de M. Fontaine une formule finie qui les renferme toutes, & par conséquent de reconnoître si une équation proposée est susceptible d'une intégrale de cette forme *(II)*.

Outre ces deux Théories, également importantes & fécondes, on trouve dans son Recueil l'idée de rappeler les équations des ordres supérieurs à des équations du premier, en regardant les différentielles comme de nouvelles variables, & l'idée de rappeler ensuite l'intégration des équations du premier ordre, soit aux quadratures, en multipliant les équations proposées par un facteur qui les rend des différentielles exactes, soit à l'intégration des équations homogènes, en y supposant variable le paramètre qui avoit été regardé comme constant.

M. Fontaine, après avoir inutilement cherché, pour parvenir à cette réduction des équations différentielles, ou à des différentielles exactes, ou à des équations homogènes, une autre méthode que celle des coëfficiens indéterminés, sentit que celle-là seule pouvoit être générale; & c'est à mettre les Analystes à portée d'employer ce moyen, qu'a été destiné l'Ouvrage qu'il a intitulé seconde méthode de Calcul intégral *(III)*.

Ce calcul n'a pas seul occupé M. Fontaine. On voit, dans son Recueil & dans les Mémoires de l'Académie, qu'il s'est exercé sur d'autres objets: on y trouve, par exemple, une Méthode d'approximation pour les équations déterminées, où l'on n'a pas besoin, comme dans celle de Newton, de connoître d'ailleurs une première valeur approchée de l'inconnue, & qui donne toutes les racines, soit réelles, soit imaginaires *(IV)*.

Mais cette Méthode de M. Fontaine demande des Tables dont l'exécution seroit presqu'impraticable pour les degrés un peu élevés. Et depuis que M. de la Grange a trouvé pour le même objet une méthode plus simple, plus pratiquable, dont la marche est plus certaine, & qui, sans exiger la construction des Tables, donne également les moyens de reconnoître, dans les équations littérales, la forme des racines *(V)*, on ne peut presque plus regarder la Méthode de M. Fontaine que comme un monument de cette ſagacité & de cette fineſſe qui formoient le principal caractère de ſon génie.

M. Fontaine s'étoit fait une Mécanique toute nouvelle, & dans laquelle les loix du mouvement ſont appuyées ſur une métaphyſique ſingulière. Cet Ouvrage que le temps & le ſuffrage des Géomètres mettront à la place qu'il mérite, a été imprimé pour la première fois en 1764, & on lit dans la préface de ce Recueil, que M. Fontaine connoiſſoit dès 1739, le principe ſur lequel cette Mécanique eſt fondée. Quelques gens plus propres à brouiller des Hommes célèbres, que dignes de les juger, ont conclu de cette obſervation, & même ont imprimé dans les Journaux, que M. Fontaine regardoit ſon idée comme la ſource d'où M. d'Alembert avoit tiré ce principe ſi général & ſi lumineux, auquel les Sciences Phyſico-Mathématiques doivent les progrès immenſes qu'elles ont faits depuis trente ans. Mais le principe de M. Fontaine eſt métaphyſique & vague, celui de M. d'Alembert eſt géométrique & précis. Le principe de M. d'Alembert a été imprimé en 1743 ; & M. Fontaine n'a parlé du ſien qu'en 1764; auſſi lui doit-on la juſtice de penſer qu'il ne contribua en rien à une réclamation qu'on fit alors en ſa faveur, par un faux zèle pour ſa gloire, ou par des motifs bien moins louables *(VI)*.

M. Fontaine eut avec pluſieurs Géomètres de ces diſputes toujours ſurprenantes pour ceux qui ne connoiſſant de la Géométrie que les routes battues, ignorent que dans la ſcience même de la certitude, le génie peut s'égarer quelquefois dans les routes nouvelles qu'il a oſé ſe frayer.

Telles furent la diſpute ſur les Tautochrones dont nous avons parlé, une autre diſpute avec M. de la Grange, ſur la détermination des points extrêmes, pour les *maxima* des fonctions indéfinies; une avec M. Clairaut, ſur la recherche d'une courbe décrite par le ſommet d'un angle dont les côtés gliſſent le long d'une courbe. Jamais M. Fontaine n'attaquoit une ſolution ſans donner auparavant une nouvelle ſolution du même Problème, ſoit pour montrer à chaque fois qu'il étoit digne de ſon Adverſaire, ſoit plutôt que ſon génie, vraiment original, n'eût pu ſans cela entendre le travail d'un autre ; il faut avouer que dans la diſpute il s'écartoit quelquefois de cette politeſſe d'uſage dont jamais il n'eſt permis de ſe diſpenſer, mais que M. Fontaine croyoit peut-être moins néceſſaire avec des Adverſaires illuſtres, & dont la gloire n'avoit pas beſoin de ces petits ménagemens.

Les morceaux dont nous venons de parler ſont les plus importans de ceux que M. Fontaine a publiés; ſon Recueil & les Mémoires de l'Académie en renferment quelques autres moins conſidérables, & dans tous, même dans les plus courts, on voit briller une manière abſolument à lui; c'eſt preſque toujours un fil délié qu'il ſaiſit, & qui auroit échappé à la vue de tout autre, que ſouvent même on a de la peine à ſuivre avec lui. Toutes ſes ſolutions ſont dûes à des vues fugitives, pour ainſi dire, qui ont dirigé les procédés de ſes calculs, mais que ſouvent il n'a pas jugé à propos de développer.

La plupart de ſes Ouvrages roulent ſur des objets de pur calcul, & conduiſent à des Théories profondes, plutôt qu'à des réſultats applicables à des objets utiles. Il eſt donc impoſſible d'en faire voir ici l'importance & le mérite. Ce mérite ne pouvoit être ſenti que par de très-grands Géomètres; eux ſeuls pouvoient connoître M. Fontaine. Les autres n'admiroient en lui que la grandeur des objets qui l'occupoient, & la hardieſſe qu'il avoit eue de les choiſir. L'admiration de ces derniers ne flattoit pas M. Fontaine, mais il trouvoit du plaiſir à les avoir étonnés; quelquefois même il s'eſt plu à laiſſer, ſur la nature & l'étendue de ſes méthodes, une obſcurité affectée qui ſervoit ſur-tout à en cacher les limites. Alors il aimoit à être deviné par ſes égaux, & convenoit de tout avec franchiſe, lorſqu'ils l'avoient pénétré: mais ſi quelques-uns de ces hommes qui louent uniquement pour faire croire qu'ils entendent, vantoient dans ſes Ouvrages des choſes qui n'y étoient point, il rioit de leur mépriſe & ne les en tiroit pas.

Les Géomètres ont un grand avantage: leur gloire ne dépend que d'un petit nombre de juges dignes de l'être. Le ſuffrage de ces juges leur ſuffit, & la voix de la multitude ne pourroit les en dédommager; auſſi ont-ils ce bonheur que les petits moyens leur ſont inutiles, & que les découvertes ſont le ſeul qui puiſſe les mener à la gloire. Si même l'injuſtice de leurs rivaux venoit à la leur refuser, presque sûrs par eux-mêmes du degré du mérite de leurs travaux, ils attendroient sans trouble le moment de la justice. Ainsi, les Géomètres ne doivent point regretter ces jouissances brillantes réservées aux succès dans des genres plus agréables ; ils savent combien ces jouissances peuvent être troublées par le refus des suffrages mêmes qu'on méprise le plus; car dans les principes mobiles & incertains des Arts, le Littérateur ne peut rien trouver qui le rassure contre la crainte secrète que l'envie n'ait été juste.

On auroit pu croire que M. Fontaine avoit même une sorte d'indifférence pour la gloire. Content d'avoir montré, & sur-tout de s'être prouvé à lui-même qu'il étoit peut-être égal en talent aux plus célèbres Géomètres; il ne chercha pas à égaler leur réputation par ses Ouvrages. Il n'y a point d'hommes de génie qui n'éprouvent le besoin de faire partager aux autres le sentiment qu'ils ont de leurs forces; mais souvent ils n'ont pas cette avidité sans cesse renaissante qui jouit chaque jour du succès de la veille, en préparant celui du lendemain, qui veut maîtriser l'opinion publique, mais qui nous en fait dépendre; sentiment qu'on devroit peut-être appeler une foiblesse, si ce n'étoit pas à cette foiblesse qu'on doit tout ce qui a été fait d'utile aux hommes. Cette passion pour la gloire étoit presque un ridicule aux yeux de M. Fontaine; aussi n'a-t-on de lui que des essais. Le Calcul intégral est le seul objet qui l'ait occupé long-temps; & peu de Géomètres y ont fait d'aussi grands pas.

On sent que M. Fontaine devoit dédaigner les louanges, sur-tout celles qui tirent tout le prix du rang de celui qui les donne; il étoit même insensible aux honneurs littéraires. La seule chose qui ait paru le flatter a été son entrée à l'Académie des Sciences; peut-être parce que cet évènement ayant précédé ses plus belles recherches, il étoit alors moins sûr de ce qu'il valoit. Il aimoit à parler du bruit qu'avoit fait sa première méthode du Calcul intégral, *dont on avoit parlé*, disoit-il, *dans les Cafés;* mais on ne savoit ce qui l'avoit le plus frappé, ou le grand effet de ses découvertes, ou le ridicule de ceux qui le célébroient sans l'entendre. Loin qu'il cherchât à se rendre l'objet de l'attention & des discours du Public, l'espèce d'amour propre qui s'occupe de ce ſoin, les petites fineſſes qu'il emploie, étoient un des défauts que M. Fontaine obſervoit avec le plus de plaiſir. Un jour un homme célèbre, mais avide de l'opinion, lui parloit avec un mépris trop ſérieux de cette curioſité pour l'Ambaſſadeur Turc qui étoit devenue l'unique occupation d'une ville entière. M. Fontaine crut entrevoir un peu d'humeur dans ce mépris: *que vous fait l'Ambaſſadeur Turc*, lui dit-il, *eſt-ce que vous en ſeriez jaloux!*

L'importance attachée à de petites choſes, étoit un autre ridicule que M. Fontaine ne pardonnoit pas. Quelqu'un diſſertoit longuement devant lui ſur le prix commun de pluſieurs denrées, & ſur les ſoins qu'il avoit pris pour le déterminer avec exactitude, *voilà*, dit M. Fontaine, *un homme qui ſait le prix de tout, excepté le prix du temps.*

Il faut diſculper ici M. Fontaine d'un reproche grave qu'on pourroit lui faire avec quelque apparence de juſtice, celui de n'avoir pas cité, avec aſſez de ſoin, ce qu'il a emprunté des autres Géomètres. En effet, Nicolas Bernoulli avoit donné avant lui, une équation de condition pour les équations du premier ordre à trois variables. M. Euler eſt le premier auteur du théorème ſur l'intégration des fonctions homogènes, par lequel M. Fontaine commence ſon Ouvrage ſur le Calcul intégral. Enfin, tout ſon travail eſt fondé ſur la méthode de différencier ſous le ſigne; & cette méthode ſouvent attribuée à Jean Bernoulli, ſe trouve dans les Lettres de Léibnitz qui, content de mériter la gloire, & trop grand pour s'en occuper, négligeoit de revendiquer ſes découvertes, & ſe contentoit de la conſcience de ſon génie & du ſuffrage de Bernoulli.

M. Fontaine a cependant mêlé toutes ces découvertes avec les ſiennes, & les a également données comme de lui. C'eſt qu'il les avoit réellement faites, c'eſt que jamais Géomètre n'avoit moins lû de livres de Géométrie, il étoit même en Géométrie d'une ignorance ſingulière; c'eſt la ſeule Science où cette ignorance puiſſe ſubſiſter avec de grandes découvertes, parce que c'eſt la ſeule Science où l'eſprit tire tout de ſon propre fonds. L'ignorance ne ſert même alors qu'à lui donner plus d'originalité & plus de hardieſſe. C'eſt ce qu'on remarque dans les Ouvrages de M. Fontaine,

Fontaine, & on voit qu'il lui en coûtoit moins pour affronter les plus grandes difficultés, que pour se plier à une marche étrangère. Il n'étoit donc point plagiaire, & jamais il n'eût voulu l'être; il savoit que s'approprier la découverte d'un autre, c'est convenir de sa supériorité.

Heureux par l'étude, ayant dans la Géométrie & dans la culture de sa terre, un remède sûr contre l'ennui, M. Fontaine n'avoit besoin, ni des services, ni malheureusement pour lui de l'amitié de personne. Il ne cherchoit point à plaire, & dédaignoit de se faire craindre; il observoit les hommes sans autre intérêt que celui de les connoître, & les observoit avec cette profondeur & cette finesse qui l'avoient si bien servi contre les difficultés les plus épineuses de l'analyse. Mené par M. de Maupertuis dans ces sociétés de gens oisifs qu'on appelle le monde, il vit bientôt que des hommes qui le composent, la plupart sans passions, sans vertus & sans vices, n'ont qu'un seul sentiment, la vanité plus ou moins déguisée. Mais il vit aussi que les hommes vains n'attachent tant de prix à des choses indifférentes en elles-mêmes, que parce que les autres en sont privés; il vit que ce sentiment à la fois puéril & cruel, blesse en secret, lors même qu'il fait rire ceux à qui la fortune a refusé les avantages dont la vanité se pare. M. Fontaine crut donc que la vanité ne méritoit aucun égard, & il la traita sans pitié. On lui demandoit un jour ce qu'il faisoit dans le monde, où il gardoit souvent le silence comme ceux qui ne prononcent des mots que lorsqu'ils ont des idées; *j'observe*, dit-il, *la vanité des hommes pour la blesser dans l'occasion.* Ce mot n'étoit pas en lui l'expression de la méchanceté, c'est qu'il croyoit que choquer la vanité lorsqu'elle se montre, ce n'est que repousser une attaque injuste. Si l'on entend par méchant, non celui qui méprise les hommes & qui ne s'en cache point, mais celui qui cherche à leur nuire, M. Fontaine ne pouvoit être méchant; il avoit trop bien calculé les peines que coûte la méchanceté, & les petits plaisirs qu'elle procure. Cependant il n'avoit point pour elle la haine vigoureuse de la vertu, mais il la méprisoit & s'en moquoit. La méchanceté n'étoit à ses yeux qu'une sotise aussi ridicule que beaucoup d'autres.

Jamais il n'entra dans ces brigues ſourdes, dans ces intrigues deshonorantes pour les ſociétés littéraires. Il n'y a point d'avantage d'amour propre, ou d'intérêt auquel un homme dominé par un grand talent puiſſe ſacrifier le plaiſir de ſe livrer à une idée qui le maîtriſe. Auſſi a-t-on toujours vu ces intrigues être l'ouvrage de ces hommes que pourſuit le ſentiment de leur impuiſſance; qui cherchent à faire du bruit parce qu'ils ne peuvent mériter la gloire; qui, n'ayant aucun droit à la réputation, voudroient détruire toute réputation méritée, & fatiguent par des petites méchancetés, l'homme de génie qui les accable du poids de ſa renommée.

Bien que M. Fontaine, en qualité de Penſionnaire, fût obligé à la réſidence par le règlement de l'Académie, il a fait preſque tous ſes Ouvrages à la campagne. Les grandes théories qui l'occupoient, avoient beſoin d'être ſuivies ſans diſtraction, & il diſoit qu'une découverte valoit mieux que dix ans d'aſſiduité à l'Académie. La haute idée que ſes premiers travaux avoient donnée de lui, les grandes eſpérances qu'on avoit de ceux qu'il annonçoit, empêchèrent qu'on ne ſe plaignît de cette infraction des règlemens. D'ailleurs comme, à l'exception de l'analyſe pure, tous les autres objets dont l'Académie s'occupe, lui étoient étrangers & ſur-tout indifférens, & que les hommes qui ſavent bien une choſe, ne parlent jamais de celles qu'ils ignorent, à peine pouvoit-on s'apercevoir de ſon abſence. Sa vie à la campagne étoit ſolitaire & ſimple; tout ce que ſes travaux & les ſoins de l'Agriculture lui laiſſoient de temps, il l'employoit à obſerver les gens de la campagne; & comme nous leur avons tout donné de nos vices hors l'art de les cacher, il y voyoit à découvert ces retours ſecrets & humilians d'intérêt & d'amour propre, que l'homme poli oſe à peine s'avouer à lui-même, & qu'il dérobe ſi ſcrupuleuſement aux autres. Revenu dans le monde, M. Fontaine y retrouvoit les mêmes foibleſſes & les mêmes vices, & il avoit le plaiſir de les ſurprendre & de les pénétrer malgré le voile dont on ſait ſi bien les couvrir. C'eſt ainſi qu'à force de deſſiner le nud, le Sculpteur apprend à démêler & à faire ſentir les effets des muſcles, même au travers des plis d'une draperie.

M. Fontaine avoit lû preſque tous les bons livres de notre Littérature; mais il ne reliſoit que Tacite & Racine. Cette même profondeur d'aviliſſement & de perverſité qu'il avoit obſervée chez ſes contemporains, il la retrouvoit dans Tacite, mais agiſſant ſur de plus grands objets & placée dans des ames plus fortes: & Racine qui peint les paſſions, moins par les traits qui leur échappent, que par le développement des ſentimens qui les forment; Racine qui, lorſqu'il exprime l'égarement des paſſions, ne s'écarte jamais de cette logique qu'elles ſuivent à l'inſu même de ceux qui les éprouvent; Racine ne doit pas moins plaire au Philoſophe qui y revoit ce qu'il a obſervé, qu'à l'ame ſenſible qui y retrouve ſes mouvemens avec des nuances qu'elle-même n'auroit pas ſû ſi bien démêler.

Le goût pour l'Agriculture, les ſoins qu'il prenoit de ſa terre d'Anel, n'avoient pu diminuer dans M. Fontaine ſon averſion naturelle pour les affaires. Le haſard lui ſuſcita un procès dans les premières années de ſa poſſeſſion, il en chargea un Avocat qui ſe crut obligé de lui rendre compte de ſes démarches. Un jour qu'il lui en parloit, *Monſieur*, lui dit le Géomètre, après l'avoir écouté pendant quelques inſtans, *croyez-vous que j'aie le temps de m'occuper de votre affaire!* On peut juger quelle fut la ſurpriſe de l'Avocat, & quelle idée cette réponſe dut lui donner de la Géométrie & des Géomètres.

Lorſque de jeunes Mathématiciens recherchoient les conſeils & la ſociété de M. Fontaine, qu'ils lui parloient de leurs travaux & de leurs idées, on le voyoit les encourager, & en cauſer avec eux, tantôt ſuivre les mêmes routes, tantôt leur en propoſer de nouvelles; mais ils n'étoient pour lui qu'une occaſion de s'occuper de Géométrie, il les oublioit dès qu'ils travailloient ſeuls; ce qu'il avoit fait, ce qu'il ſe ſentoit capable de faire, le préſervoit de toute jalouſie à leur égard; mais il avoit le courage d'en avouer quelquefois les premiers mouvemens: *j'ai cru un moment qu'il valoit mieux que moi*, diſoit-il un jour d'un jeune Géomètre; *j'en étois jaloux, mais il m'a raſſuré depuis* *.

* Ce jeune homme eſt l'Auteur de cet Éloge.

Tel étoit cet homme auſſi original, peut-être par ſon caractère, que par ſon génie, que la ſociété n'avoit ni corrompu, ni poli; qui y porta tous les goûts de la Nature, & qui les ſuivit ſans contrainte, & ſans jamais connoître les paſſions violentes, qui ne ſont l'ouvrage que de la ſociété. S'il fit peu de bien à ſes ſemblables, du moins ne leur fit-il jamais de mal; & c'eſt un éloge que peu d'hommes encore peuvent mériter.

La vente de ſa terre d'Anel, l'acquiſition d'une autre, ſa négligence & ſon peu de capacité pour les affaires; enfin des procès qu'on lui ſuſcita, l'enlevèrent à la Géométrie & auroient pu tourmenter les dernières années de ſa vie; mais ſon indifférence étoit une reſſource plus ſûre que le courage.

En 1765, il ſe retira à Cuiſeaux, petite ville du comté de Bourgogne, dont il avoit acheté la ſeigneurie. En quittant Paris, il vendit tout ce qu'il avoit de Livres; c'eſt peut-être la première fois qu'on a vu un Savant renoncer à ſes Livres, dans un moment où la ſolitude devoit les lui rendre plus néceſſaires. Mais M. Fontaine n'avoit jamais eu de goût que pour la Géométrie & pour l'étude de l'homme; il y avoit long-temps que ſur ces deux objets il ne trouvoit plus rien à apprendre dans les Livres; & il ne vit alors dans les ſiens que l'embarras de les tranſporter.

Il mourut à Cuiſeaux le 21 Août 1771, d'une maladie cruelle que la force de ſon tempérament lui fit négliger dans les commencemens, & qu'il ſupporta avec ce calme qu'aucun évènement de ſa vie n'a pu altérer. Il avoit toujours regardé la douleur & la mort comme une ſuite néceſſaire des loix générales de la Nature, dont il ſeroit abſurde de ſe plaindre.

En mourant, il a nommé légataire univerſel M. de Borda Fermier général, qui ſait connoître & ſervir le mérite, & à qui M. Fontaine avoit des obligations. M. de Borda a rendu cette ſucceſſion aux héritiers naturels.

La place de Penſionnaire-Géomètre qu'avoit M. Fontaine, a été remplie par M. le Chevalier de Borda, déjà Aſſocié dans la même claſſe.

Nota. *Les Notes suivantes sont le fruit des réflexions qui se sont offertes à moi, en écrivant l'Histoire de l'Académie & l'Éloge de M. Fontaine. Je crois qu'elles pourront intéresser les Mathématiciens, & je les prie de les recevoir avec indulgence, comme de simples esquisses que je n'ai pas eu le temps de développer.*

(*I*). Voyez cette Histoire, *p. 57 & suiv.*

SOIT une équation entre y, ses différences jusqu'à $d^n y$, & la différence constante dx, que cette équation soit ordonnée par rapport à y & ses différences, qu'aucun rang ne manque, que le terme constant n'y soit pas, & que $d^n y$ n'y soit qu'un premier degré: que je la multiplie par une série de y & de ses différences jusqu'à $d^{n-1} y$, tous les termes de cette fonction ayant un coëfficient constant multiplié par e^{fx}, & que je suppose qu'elle est devenue par-là une différentielle exacte. Il est clair que j'aurai f par une équation du degré n, & par conséquent n différentielles exactes, qui me donneront autant d'intégrales différentes. Soit $V = 0$ une de ces intégrales dV sa différentielle, telle que faisant $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{ddy}{dx^2} = q$, $\frac{d^3y}{dx^3} = r$ ... &c. j'aie $dV = Adx + Bdy + Cdp + Ddq + Rdr$, &c. j'aurai $\Delta V = dV + \frac{d^2 V}{2} + \frac{d^3 V}{1.2.3}$ &c. en supposant que j'aie mis Δx pour dx, Δy pour dy, Δp pour dp, &c. dans dV, dans ddV, &c. & que dans ddV, $dddV$, &c. je n'aie fait varier ni dy, ni dp. Cela posé, il est clair que si je suppose $V = XY$, X étant e^{fx}, & Y étant la fonction en y, p, q, &c. j'aurai $\Delta V = (X + \Delta X) . (Y + \Delta Y) - XY$, $X + \Delta X = e^{fx} e^{f\Delta x}$, $Y + \Delta Y = Y + dY + \frac{d^2 Y}{2}$ &c. Donc, divisant cette fonction ΔV par e^{fx}, j'aurai $e^{f\Delta x}(Y + \Delta Y) - Y = (e^{f\Delta x} - 1)Y + e^{f\Delta x} dY + \frac{e^{f\Delta x} d^2 Y}{2}$ &c. $= 0$, équation où il n'y a point de terme sans y, où la fonction Y contient $y, dy \ldots\ldots d^{n-1} y$ Δy, $d\Delta y \ldots\ldots d^{n-1} \Delta y$; le nombre des valeurs de f, de V & de Y étant n, j'aurai donc n équations entre les $y, dy \ldots . d^{n-1} y$, Δy e $d\Delta y \ldots . d^{n-1} \Delta y$.

Je regarderai Δy comme une nouvelle variable y', & comme on sait que si l'on a deux équations en $y, dy \ldots d^{n-1} y, y', dy' \ldots d^{n-1} y'$, on peut toujours les intégrer, je prendrai à volonté deux des équations $e^f (Y + \Delta Y) - Y = 0$. Ainsi, comme elles sont au nombre de n, je pourrai faire $n-1$ combinaisons différentes en les prenant deux à deux.

Prenant donc deux de ces équations & les traitant comme des équations de l'ordre $n - 1$ entre les variables y, y' & x, où x ne se trouve point, & où dx est supposé constant, je remarque si les $d^{n-1}y, d^{n-1}y'$, n'y sont pas sous une forme linéaire. Ces équations étant en séries, on peut toujours les transformer en des équations où les différences les plus hautes ne soient qu'au premier degré.

En effet, supposant d'abord qu'il n'y a qu'une seule équation entre y & x où x manque, & dx est constant, qui n'a point de termes sans y, & à qui il ne manque point de rang. Dans ce cas, je fais $d^{n-1}y$ égal à une fonction sans terme constant de $y, dy \ldots d^{n-2}y$; je substitue cette valeur de $d^{n-1}y$ dans l'équation en série où je suppose que $d^{n-1}y$ est à différentes puissances. Cela posé, & l'équation étant ordonnée par rapport aux puissances de y & de ses différences; il est clair que si j'y substitue la valeur $d^{n-1}y$ sans terme constant, il en résultera une fonction de $y, dy \ldots d^{n-2}y$ qui doit être nulle identiquement; maintenant le premier rang de cette fonction, après la substitution contiendra tous les coëfficiens du même rang de la valeur de $d^{n-1}y$. Le second rang de la fonction qui doit être nulle identiquement, contiendra les coëfficiens du second rang de la valeur de $d^{n-1}y$, & ainsi de suite. D'un autre côté, les coëfficiens du premier rang de l'équation proposée entreront seuls dans le premier rang de l'équation qui doit être identiquement nulle; les coëfficiens du premier & du second de la proposée, entreront seuls dans le second rang de l'équation identiquement nulle. Ceux des trois premiers rangs de la proposée, entreront seuls dans le troisième de l'équation identiquement nulle, & ainsi de suite.

Donc 1.° pour déterminer les coëfficiens de chaque rang de la valeur qu'on a supposée pour $d^{n-1}y$, on n'aura qu'autant d'équations que d'indéterminées.

2.° Les équations ne contiendront que des fonctions finies des coëfficiens de la proposée, donc on aura la valeur de $d^{n-1}y$, & par conséquent une nouvelle équation en série où $d^{n-1}y$ est sous une forme linéaire.

Supposons maintenant deux équations entre les trois variables y, y', x où dx manque, dx est constant; & où les $d^{n-1}y, d^{n-1}y'$ montent à des puissances supérieures à l'unité.

Faisons $d^{n-1}y$ égal à une fonction sans terme constant de y jusqu'à $d^{n-2}y$, & de y' jusqu'à $d^{n-2}y'$, & de même $d^{n-1}y'$ égal à une semblable fonction, nous trouverons par le même raisonnement que ci-dessus, que si on substitue ces valeurs de $d^{n-1}y$, $d^{n-1}y'$ dans les deux équations, on aura deux fonctions qui devront être nulles identiquement, & que comme elles contiennent y jusqu'à $d^{n-2}y$ & y' jusqu'à $d^{n-2}y'$ de même que les valeurs de $d^{n-1}y$, $d^{n-1}y'$, on n'aura qu'autant d'équations que de coëfficiens indéterminés; que les équations seront en termes finis, & le terme connu ne manquera point dans toutes à la fois, lorsque les proposées auront tous leurs rangs.

Nous aurons donc toujours deux équations du degré $n - 1$. en séries

& de la forme convenable entre x, y & y'. Appliquant donc à ces deux équations la méthode que j'ai développée *(Mémoires de 1770)*, j'aurai f par une équation du degré $2n-2$, & traitant chaque différentielle exacte, comme j'ai traité dV, j'aurai, en les appelant dZ, dZ', &c. $2n-2$ différentielles exactes. Si $n=2$, Z & Z' ne contiendront que y & y'. Donc puisqu'on a deux de ces équations, que y & y' sont deux quantités très-petites & dont on peut négliger une puissance m; il est clair que, ne prenant les équations $Z=0$, $Z'=0$ que jusqu'au degré m, & éliminant y', on aura y sans avoir rien négligé que des puissances m de quantités nécessairement très-petites, si $n>2$ divisant ΔZ, $\Delta Z'$ par e^{fx}, $e^{f'x}$, &c. on aura des équations en séries, qui contiendront

$$y, dy, + d^2 y \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; d^{n-2} y.$$
$$y' dy' + d^2 y' \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; d^{n-2} y'$$
$$\Delta y + d\Delta y \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; d^{n-2} \Delta y$$
$$\Delta y' + d\Delta y' \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; d^{n-2} \Delta y'$$

& en y faisant $\Delta y = y'$ & $\Delta y' = y''$, on aura $2n-2$ équations qui contiendront $y \ldots\ldots d^{n-2}y$, $y' \ldots\ldots d^{n-2}y'$, $y'' \ldots\ldots d^{n-2}y''$. Prenant trois de ces équations, il suit de ce que j'ai dit ci-dessus, qu'on pourra en avoir trois autres aussi en séries, où ces $d^{n-2}y$, $d^{n-2}y'$, $d^{n-2}y''$ ne seront que sous une forme linéaire; & si je cherche à les intégrer, alors j'aurai f par une équation du degré $3n-6$, & $3n-6$ différentielles exactes dS. dS', dS'', &c. Si $n=3$, comme ces équations ne contiennent en général que $d^{n-2}y$, $d^{n-2}y'$, $d^{n-2}y''$, elles ne seront dans ce cas que du premier ordre: donc leurs intégrales seront finies; & comme on en a $3n-6$ différentes, on en aura trois lorsque $n=3$. Or ces trois équations S, S', S'', contiennent y, y', y'', quantités dont on peut négliger la même puissance; donc ne prenant ces équations que jusqu'au degré m, & éliminant y' & y'', on aura y.

Si $n>3$, on prendra ΔS, $\Delta S'$, $\Delta S''$, &c. & on aura des équations qui contiendront $y \ldots d^{n-3}y$, $y' \ldots d^{n-3}y'$, $y'' \ldots d^{n-3}y''$, $y''' \ldots d^{n-3}y'''$, $y''' = \Delta y''$. Prenant quatre de ces équations, les mettant sous une forme convenable, & cherchant à les intégrer, on aura f par une équation du degré $4n-12$; donc si $n=4$, on aura, en intégrant, quatre intégrales finies entre y, y', y'' & y''' desquels on tirera y.

Si $n>4$, on recommencera les mêmes opérations jusqu'à ce qu'on parvienne aux équations entre y, y', $y'' \ldots y''' \ldots {}^{n-1}$, qui ne contiennent que dy, dy', dy''''^{-n-1} & où f soit donné par une équation du degré n.

Jusqu'ici j'ai supposé que les racines étoient toutes inégales, ou du moins qu'il y en avoit autant d'inégales que de variables plus une, sans cela les opérations que j'ai indiquées ne pourroient s'exécuter. Supposons maintenant que l'équation en f ait des racines égales, & d'abord qu'il y en ait deux; si la proprosée est du deuxième ordre, en la multipliant, elle devient $d^2 V$, & par conséquent on a immédiatement l'intégrale sans différences; ſi elle eſt d'un ordre ſupérieur on a d'abord $n - 1$ équations en y & y', à cauſe des $n - 1$ valeurs de f & une équation qui contient x; mais par la méthode ci-deſſus il ſuffit d'avoir deux équations différentes. S'il y a trois racines égales, & que l'équation fût du troiſième ordre, elle s'intègre immédiatement en termes finis, & ſi l'équation eſt plus élevée, on aura toujours deux équations différentes, ce qui eſt ſuffiſant ici. La même réflexion peut s'appliquer aux équations qui ont plus d'une variable. En effet, dans ce cas, ſi n eſt l'ordre de l'équation, & m le nombre des y & des équations; le nombre des racines égales ne peut être plus grand que $n - 1$, à moins que ces équations ne ſoient pas réellement différentes entre elles; ce qui ne peut avoir lieu ici, puiſque les équations ſont toutes des intégrales ſuppoſées différentes. Ainſi lorſque chaque racine en aura $n - 1$ qui lui ſeront égales, on aura une intégrale finie; & quand elle en aura moins, il reſtera un nombre d'équations différentes & ſans x, plus grand que $m + 1$, & il ſuffit d'en avoir $m + 1$.

Ainſi l'on voit que ce ne ſera jamais qu'à la dernière intégration que l'on pourra être obligé dans cette méthode d'avoir des x, & ce ne ſera que par l'inſpection du premier rang de cette dernière équation, qu'on pourra juger ſi la méthode propoſée ici, donne ou ne donne pas d'équation ſéculaire.

(11).

Il eſt aiſé de conclure de la ſuite des formules de M. Fontaine, que ſi on a $Pdx + Qdy = 0$, P & Q étant des fonctions rationnelles & entières du degré m; la formule $\dfrac{A^p B^q C^r \ldots\ldots}{A'^{p'} B'^{q'} C'^{r'} \ldots}= N$ où p, q, r, &c. p' q' r', &c. ſont des nombres quelconques; A, B, C, &c. A' B' C', &c. des fonctions rationnelles & entières, & N l'arbitraire repréſentera toutes celles de M. Fontaine; & que ſi m' eſt le degré de A, m'' celui de B, m''' celui de C; & que $m_1{}^{\mathrm{I}}$, ſoit celui de A', $m_1{}^{\mathrm{II}}$, celui de B', $m_1{}^{\mathrm{III}}$, celui de C', &c. on aura $m' + m'' + m''' \ldots\ldots\ldots = \text{ou} < m + 1$, & de même $m_1{}^{\mathrm{I}}, + m_1{}^{\mathrm{II}}, + m_1{}^{\mathrm{III}}, \ldots\ldots = < m + 1$. Or, l'on voit que m étant un nombre fini, le nombre tant des A, B, C, &c. A', B', C', &c. que de leurs différentes combinaiſons ſera auſſi fini.

J'ai obſervé ailleurs que cet abaiſſement des formules intégrales avoit deux cauſes; l'une que le numérateur de la différentielle ait des facteurs; c'eſt le cas que je viens d'examiner; l'autre, que les rangs ſupérieurs du même numérateur ſe détruiſent par des valeurs particulières de coëfficiens. Pour voir ce que cette ſeconde cauſe peut produire, j'obſerverai que ſoit $\dfrac{A + B + C \ldots\ldots + F}{A' + B' + C' \ldots\ldots + F'}$ une intégrale où A, B, C, D, E, &c. F, A', B', C', D' …… F', expriment les différens rangs de ces fonctions, A étant le rang le plus élevé, & F, F', des conſtantes, la différentielle ſera,

sera, après avoir négligé le dénominateur, & l'avoir ordonnée par rapport au degré des variables; elle sera, dis-je, de la forme

$$(A' dA - A dA') + (A' dB + B' dA - A dB' - B dA') + (A' dC + C' dA - A dC' - C dA' + B' dB - B dB'), \text{ \&c.}$$

Or, pour que le premier rang disparoisse, il faut que $\frac{dA}{A} = \frac{dA'}{A'}$ ou $A = nA'$; pour que le second disparoisse, il faut qu'y faisant $A = nA'$, $\frac{dA'}{A'} = \frac{dB - n\,dB'}{B - nB'}$ ou $NA' = B - nB'$; or, A' ne peut être du même degré que B par l'hypothèse. Donc $N = 0$, $B = nB'$; on trouvera de même $C = nC'$, & ainsi de suite; donc, si on va jusqu'au terme $F' dA - F dA'$, on trouvera $F = nF'$; or, cela ne peut avoir lieu sans que l'intégrale proposée se réduise à une constante; donc, la différence ne peut s'abaisser à un degré plus bas que celui qui est inférieur d'une unité à celui de A; donc, si m est le degré de la différentielle, celui de A ne pourra être plus grand que $m + 1$; donc, le nombre des formules d'intégrales est fini pour chaque degré de l'équation différentielle.

(III).

I. Soit $V = 0$ une équation différentielle que, pour plus de simplicité, je supposerai du second ordre, & soient B & B' deux de ses intégrales du premier ordre; il est clair que la forme générale de l'intégrale de cette équation sera $F\,B\,B'$; donc sa différentielle sera

$$\left(\frac{dF}{dB}\frac{dB}{ddy} + \frac{dF}{dB'}\frac{dB'}{ddy}\right) ddy + \left(\frac{dF}{dB}\frac{dB}{dy} + \frac{dF}{dB'}\frac{dB'}{dy}\right) dy, \text{ \&c.}$$

Donc, si $V = 0$ est de la forme $ddy + A$, & qu'on veuille chercher, comme M. Fontaine, à le mettre sous la forme $d\left(\frac{dy}{dx}\right) + A' dy + B' dx \ldots$ en regardant $\frac{dy}{dx}$, x, y, &c. comme des variables différentes, on aura $A' = \dfrac{\frac{dF}{dB}\frac{dB}{dy} + \frac{dF}{dB'}\frac{dy}{dB'}}{\frac{dF}{dB}\frac{dB}{ddy} + \frac{dF}{dB'}\frac{dB'}{ddy}}$ pour la valeur générale de A'; par conséquent, en cherchant A' en général par l'élimination des équations de condition, comme M. Fontaine le propose, on ne parviendra pas à avoir finalement A' égal à une fonction sans arbitraires. On voit que cette valeur de A' sera d'autant plus compliquée que $V = 0$ pourra avoir plus d'intégrales différentes.

II. Ainſi, la première méthode de M. Fontaine ne pourra ſervir à trouver en général les coëfficiens des différences des variables dans la forme qu'il donne aux propoſées, ni par conſéquent réduire les équations ſupérieures à celles du premier ordre.

III. On voit cependant que cette méthode peut réuſſir dans pluſieurs cas. En effet, ſoit une équation d'un ordre ſupérieur au premier, telle que la multipliant par un facteur ſans différences, elle devienne une différentielle exacte; il eſt clair que ſi le facteur eſt unique, tant le facteur que les coëfficiens des différentielles qui y répondent ſeront uniques & donnés, les coëfficiens par une équation finie, & le facteur par une équation de la forme $\frac{dp}{p} = R\,dy + S\,dx$. Ainſi l'on réduira toujours dans ce cas la propoſée aux quadratures, ſoit qu'on cherche d'abord les coëfficiens pour la réduire à une équation du premier ordre qu'il faille intégrer, ſoit qu'on cherche immédiatement le facteur qui la rend une différentielle exacte.

IV. Si l'équation propoſée d'un ordre ſupérieur au premier, admet deux facteurs de cette eſpèce, il eſt clair que la valeur générale des coëfficiens ſera, dans ce cas, de la forme $\frac{nAM + mA'M'}{nA + mA'}$, où A & A' ſont les deux facteurs, M & M', la valeur du coëfficient, & n & m, qui ſe réduiſent à la ſeule $\frac{m}{n}$, des conſtantes arbitraires. On voit donc que dans ce cas la valeur des coëfficiens pourra être donnée par une équation ordinaire du premier ordre, & celle du facteur, par une équation du ſecond ordre, réductible à deux du premier. Ainſi, ce ſera donc en général, dans ce cas, deux équations du premier ordre, que l'on aura à intégrer, & ainſi de ſuite, pour ceux où l'on auroit un plus grand nombre de facteurs.

V. Si l'équation eſt au-deſſus du ſecond ordre, & qu'on ait un facteur en x, y $\frac{dy}{dx}$, ſans autres différences, on aura ce facteur par une équation du premier ordre, & les coëfficiens par une équation finie, comme dans l'article III ci-deſſus; & il en ſera de même en général pour les facteurs des ordres ſucceſſifs, juſqu'à $m - 2$, ſeulement l'ordre de la propoſée étant m, parce que les intégrales renfermant les différences juſqu'à $m - 1$, les fonctions de ces intégrales ne peuvent entrer dans les facteurs.

VI. Soit une équation au-deſſus du premier ordre, & dans laquelle aucune différentielle ne ſoit ſuppoſée conſtante. Suppoſons de plus, qu'elle ſoit telle que ſon intégrale contienne une nouvelle arbitraire que la différentiation ait fait diſparoître, j'aurai pour intégrale $B + ax + b = 0$

a & b étant des constantes arbitraires, & x, cette variable qui avoit disparu; il répondra donc à cette intégrale deux facteurs, dont l'un rendra la proposée V de la forme de B, & ne contiendra pas x; l'autre, la rendra de la forme $x\,ddB$, & contiendra x; la valeur générale du premier facteur sans x sera, si $AV = ddB, FdB.A$; mais il faut que FdB soit une constante si on veut que $FdBAV$ soit une double différentielle exacte. Donc, dans cette dernière hypothèse, la forme générale du facteur est nA, n étant une constante arbitraire; donc, on aura dans ce cas le facteur comme dans l'article II ci-dessus, c'est-à-dire, par une équation différentielle linéaire & du premier ordre; dans ce même cas, on aura pour les coëfficiens cherchés à la manière de M. Fontaine une équation finie.

VII. *Si l'équation est au-dessus du second ordre, & qu'elle soit susceptible de la forme* d^3B, *si elle est du troisième;* d^4B, *si elle est du quatrième*, la remarque de l'article précédent est vraie en général; mais si cela n'a point lieu, supposant qu'elle ait les deux intégrales $B + ax + b$, $B' + a'x + b'$; & soit $AV = ddB$ & $A'V = ddB'$, la forme générale du facteur sera $(FdB, dB'.A + F'dB, dB'A')$, F & F' étant tels que $\frac{dFdB.dB'}{d.dB'} = \frac{d.F'dBdB'}{d.dB}$; & soit M le coëfficient cherché à la manière de M. Fontaine dans V & M', le même coëfficient dans V'; la valeur générale du coëfficient sera dans ce cas $\frac{FA.M + F'A'.M'}{FA + FA'}$; donc, on ne peut se servir *immédiatement* de cette méthode pour avoir les coëfficiens; mais si on cherche le facteur dans l'hypothèse que la proposée admette une double différentielle, on aura l'intégrale générale $F''dB$, dB', qui devra être une différentielle exacte. Donc, il faudra que F'' soit égal à $mdB + ndB'$; donc, la valeur générale du facteur sera $mA + mA'$; donc il sera donné par une équation linéaire du second ordre.

VIII. Les résultats de l'article précédent, sont indépendans de l'hypothèse que la proposée renferme ou ne renferme pas une différentielle constante, & que la variable que l'intégration introduit avec cette condition, soit déjà dans la proposée, ou ne s'y rencontre pas; mais lorsqu'aucune différentielle n'est supposée constante, on peut s'assurer *à priori*, si l'intégrale est ou n'est pas susceptible de la forme de $dd\,B = 0$; au lieu que s'il y a une différence constante, on ne peut le savoir que par l'examen des équations de condition. En effet, dans le premier cas, soit l'équation entre y & y', où aucune des deux différences n'est constante, je suppose que dy le soit, c'est-à-dire, que je fais d^2y, d^3y, &c. $= 0$; ensuite je fais l'opération ordinaire pour compléter la proposée mise sous cette forme, c'est-à-dire, que je mets $d.\frac{dy'}{dy}$ en faisant tout varier; au lieu de $\frac{ddy'}{dy}$, ſi je retrouve exactement la propoſée, alors ſon intégrale ne contient pas de nouvelle variable, ſinon elle en contient.

On ne peut appliquer la même règle aux équations qui contiennent une différence conſtante. En effet, dans le premier cas il eſt queſtion de voir ſi l'on a différentié ou $A + Cdx^m$, C étant une conſtante arbitraire, & x la nouvelle variable, ou ſi c'eſt $A + C$; mais dans le cas où A contient x, il eſt clair que ces deux cas ſe confondent, puiſque A & $\frac{A}{dx^m}$ ſont des fonctions de la même nature.

IX. La méthode de M. Fontaine ne peut s'appliquer, non plus que celle où l'on chercheroit le facteur par les équations de condition, au cas où ce facteur eſt ſans différence, lorſque la propoſée n'eſt qu'entre deux variables dont l'une a ſa différentielle conſtante, ni dans celui où *(art. précéd.)* l'intégrale ne doit pas contenir de nouvelle variable; & par conſéquent ſi on avoit une équation entre deux variables dont une des différences ſeroit conſtante, on ne pourroit la rendre réſoluble par cette méthode, en y rendant toutes ces différentielles variables. La raiſon en eſt que, ſoit dans ce cas $AV = dB$ la propoſée, on aura une ſeule équation pour déterminer A, ſi une différentielle eſt ſuppoſée conſtante; & que ſi elle ne l'eſt pas, on aura *(Mémoires de Turin, tome II, page 182* faiſant $\frac{dAV}{dx} = N$. $\frac{dAV}{d.dx} = P$, &c. $d\frac{AV}{dy} = N'$ $d\frac{AV}{d.dy} = P'$, &c. $(N - dP + ddQ \ldots) dx + (N' - dP' + d^2Q' \ldots) dy = 0$; donc les deux équations de condition pour déterminer A ſe réduiront à une, mais le coëfficient que cherche M. Fontaine, eſt, ſi on cherche celui de dx. $\frac{P - dQ + \ldots}{A}$ donc il ſera auſſi donné par une ſeule équation; donc on ne pourra le trouver par l'élimination. L'équation

$$(N - dP + ddQ \ldots) dx + (N' + dP' + d^2Q' \text{ &c.}) dy = 0$$

eſt même identique quel que ſoit A; en effet dès que A eſt d'une dimenſion de différences nulles, ſi cette équation eſt identique pour une valeur de A, elle le ſera pour toutes les autres. Il eſt aiſé de voir que cette équation ne contient pas de différences partielles de A, & qu'ainſi elle le donneroit immédiatement par une équation linéaire d'un ordre égal à celui de la propoſée.

Le même inconvénient pourra auſſi ſe rencontrer pour les équations entre plus de deux variables qui ſe trouvent dans le cas d'avoir une de leurs différences conſtantes, ou de ne pas contenir de nouvelles variables dans leurs intégrales, car le nombre des équations de condition est aussi diminué d'une unité.

X. Cette dernière conclusion du n.° IX, paroît contredire les principes des articles précédens, puisque A se trouve donné par une équation aux différences partielles, quoique la valeur générale assignée ci-dessus, soit telle qu'une équation aux différences ordinaires puisse la donner. Mais il faut observer que, ce qui dans l'équation en A, devient nul par la supposition de $A = F\,x, y$ est de la forme

$$P_{1} \frac{dA}{d.dy} + P_{11} \frac{dA}{d.dx} \text{\&c.} + Q_{1}\, d.\, \frac{dA}{d.dx} + Q_{11}\, d.\, \frac{dA}{d.dy} \text{\&c.}$$

dont il arrive dans ce cas que $A = F\,x, y$, ne soit qu'une solution particulière.

Je m'arrête à cette dernière réflexion qui prouve combien la méthode qui emploie les équations de condition à la recherche des coëfficiens ou des facteurs, est incertaine & limitée.

(IV).

Sur la méthode de résoudre les Équations.

Cette note demande qu'on ait sous les yeux le Mémoire de M. Fontaine, inséré dans le volume de 1747, & réimprimé dans ses Œuvres.

La méthode de M. Fontaine suppose deux choses; 1.° lorsqu'on a un système de facteurs contenant un certain nombre de quantités $a, b, c \ldots$ & que supposant deux de ces quantités égales entr'elles, ou une d'elles, o; le système change de forme, & a une condition telle qu'une fonction donnée des coëfficiens de l'équation proposée soit égale à zéro, il arrive nécessairement que si cette fonction est > o, ou < o, dans un exemple numérique proposé, elle le sera pour tous les cas du même système de facteurs.

L'autre, si deux systèmes se trouvent retomber dans un système commun, en faisant dans chacun une supposition différente, il y aura toujours une fonction des coëfficiens égale à zéro dans ce système commun, & qui sera < o dans un des deux premiers, & o dans l'autre.

Il n'a démontré aucune de ces deux suppositions, que je vais successivement examiner.

I. Puisqu'en supposant égales deux des quantités qui entrent dans un système à facteurs, on retombe dans un système dont la condition est $P = 0$, P étant une fonction des coëfficiens, on a la valeur de P dans le premier système de la forme $(a - b)^m (b - c)^n (c - d)^p$, &c. V; $a = b$, $b = c$, $c = d$ étant les différentes suppositions qui font retomber le système proposé dans celui où ceux où $P = 0$, & V étant une fonction qui ne peut devenir o sans supposer une des quantités a, b, c, &c. ou imaginaire ou négative au lieu de positive, ou d'un ordre de grandeur différent de celui qu'elle doit avoir; donc, quelque valeur renfermée entre les limites du ſyſtème qu'on donne aux a, b, c, &c. V ne changera pas de ſigne; mais $a - b$, $b - c$, $c - d$, &c. n'en changeront pas non plus; donc P conſervera pour toutes les valeurs contenues entre ces limites un même ſigne.

Si c'étoit la ſuppoſition d'une des lettres a, b, c, &c. égale à zéro qui faiſoit retomber le ſyſtème propoſé dans celui de $P = 0$, on auroit P de la forme $Va^{1m}\, b^{1n}\, c^{1p}$, &c. V étant comme ci-deſſus, & a, b, c, &c. étant toutes les lettres qui étant égalées à zéro feroit tomber le ſyſtème propoſé dans celui où $p = 0$. Si dans le ſyſtème de facteur, la lettre égalée à zéro multiplioit $\sqrt{-1}$ m, n, p, &c. feroient pairs; cela poſé, on voit encore que P doit conſerver toujours le même ſigne pour toutes les valeurs contenues dans les limites du ſyſtème propoſé. Or, ceci ſuffit pour aſſurer la légitimité de la méthode de M. Fontaine, toutes les fois que pour deux ſyſtèmes de facteurs qui ſe rappellent à un ſyſtème commun, qui a pour condition $P = 0$; on a $P > 0$ dans un de ces ſyſtèmes, & $P < 0$, dans l'autre, pour un exemple particulier.

II. Maintenant, il faudroit prouver que lorſque deux ſyſtèmes de facteurs ſe réduiſent à un ſyſtème commun, & que $P = 0$; $Q = 0$ équation de condition du ſyſtème commun, ne ſont pas telles que $P > 0$ & < 0, ou $Q > 0$ & $Q < 0$; dans ces deux ſyſtèmes il y a toujours une autre fonction R égale à 0, dans le ſyſtème commun, > 0 dans un des deux ſyſtèmes, & < 0 dans l'autre. Pour ſavoir ſi une telle fonction exiſte néceſſairement, je prendrai pour exemple le cas où l'on compare deux ſyſtèmes de facteurs qui ne diffèrent qu'en ce qu'au lieu de facteurs $x - b$, d'un des ſyſtèmes, l'autre a des facteurs $x - c$; & réciproquement, il faut pour cela que le nombre des facteurs $x - b$ étant m, dans l'une des équations, le nombre des facteurs $x - c$ y ſoit m' différent de m. Cela poſé, ſoit $m > m'$, je différencie la propoſée au moins un nombre m' de fois & ſous cette forme, & j'aurai le diviſeur commun de cette équation, & de la propoſée qui ſera $x + a \ldots\ldots (x + b)^{m''}$, $m'' < (m - m')$, a étant une racine répétée dans la propoſée plus que m' fois; donc le dernier terme ſera $A \cdot b^{m''}$. Maintenant ſoit X la propoſée, qu'on ait $\frac{dX}{dx}$, que X' ſoit leur commun diviſeur. $\frac{X}{X'}$ contiendra $x - b$, $x - c$, $x - a \ldots$ $x - a$ étant des facteurs de X autres que c & b; le dernier terme ſera donc $A'bc$, A' ainſi que A ne changeant point lorſque b devient c, & réciproquement, & je parviendrai ainſi à des équations dont les derniers termes feront $bb^{1}b^{11}$, $cc^{1}c^{11}$, b^{1}, b^{11} étant les racines qui ſe trouvent entrer dans l'équation en même nombre que b, c^{1}, c^{11} étant les racines en même nombre que c; donc, s'il n'y a pas de ces racines, nous aurons b & c rationnels, & la fonction cherchée; mais, s'il y en a, comme toute formule rationnelle sera commune à tous les b ou à tous les c, puisqu'ils entrent semblablement dans la proposée, nous ne pourrons avoir d'expression particulière en b & en c. Il suit de-là que la méthode de M. Fontaine n'est pas générale, dans ce sens, que la supposition de $b > c$ doive produire une condition toujours la même; mais cela n'affecte ni l'égalité, ni le signe, ni la réalité des racines qui sont les objets les plus essentiels.

III. Ceci bien entendu, si on connoît pour chaque équation le système de facteur qui lui convient, & qu'on veuille chercher par approximation les valeurs de a, b, c, qu'on sait être des quantités réelles & positives, il faut d'abord distinguer deux cas; celui où n étant le degré de l'équation; & ayant n équations entre a, b, c, &c. le nombre des a, b, c est $c > n$, & celui où le nombre des a, b, c, est égal à n. Dans le premier cas, si a est la seule quantité qui soit répétée plus d'une fois dans le système de facteurs, on aura, en éliminant de ces équations en a, b, c, &c. une valeur exacte rationnelle de a, si a & b sont toutes deux répetées; mais un nombre inégal de fois, on aura une valeur exacte & rationnelle de a & de b; si c'est un nombre égal de fois, on aura a & b par une équation rationnelle du deuxième degré, & ainsi de suite. Cela posé, on pourra regarder comme connues les quantités a, b, & cela rabaissera le degré des équations qui doivent servir à déterminer les autres lettres.

Supposons maintenant que le nombre des lettres est égal à celui des équations, d'abord nous les éliminerons toutes, hors une que nous supposerons être a; soit cherchée une valeur approchée de a que nous savons être positive & réelle, il faudra distinguer deux cas; 1.° celui où l'on auroit les b, c, &c. égaux à des fonctions données de a; 2.° ceux où la proposée seroit telle que dans les équations du second degré, qui donnent b ou c, &c. en a ne se réduisent pas à une seule équation, la valeur de a étant substituée dans ces équations. Cela ne peut se vérifier immédiatement & rigoureusement avec la valeur approchée de a; mais on peut le faire par la comparaison des coëfficiens de l'équation du second degré en b, c, &c. avec la proposée. Lorsque cela a lieu, il vaudra souvent mieux chercher a dans l'équation en a, b positif, & $< a$ dans l'équation pour b, &c. parce qu'autrement il faudroit un nouvel examen pour savoir si ces valeurs de a qui reviennent à une b, deux équations où b sont réelles ou non, &c. Quant à la difficulté de l'article II ci-dessus, elle ne peut être incommode, parce que dans ce cas on a une équation en b & en c à part.

(V).

LA Méthode de M. Fontaine donne, pour les équations littérales,

les conditions qui apprennent à en diſtinguer les différentes formes; mais cette méthode ne donne les règles que ſucceſſivement pour chaque degré, & exige pour chacun une conſtruction de Tables dont le travail ſeroit immenſe. C'eſt ce qui me fait préférer la méthode de M. de la Grange, qui donne, pour les mêmes conditions des formules communes à tous les ordres. Comme cet illuſtre Analyſte n'a pas développé ces formules, j'ai cru devoir les placer ici.

I. Soit $x^n + a'x^{n-1} + bx^{n-2} \ldots\ldots\ldots + q = 0 \;(A)$ la propoſée.

Et l'équation,

$$u^{\frac{n.n-1}{2}} + a'u^{\frac{n.n-1}{2}-1} \ldots\ldots\ldots + q' = 0 \;(B)$$

l'équation; donc, les racines ſont les quarrés des différences des racines de la propoſée, on aura $a'\ b' \ldots\ldots\ q'$ en $a,\ b \ldots\ldots\ q$ pour un ordre quelconque. (Voyez le Mémoire de M. de la Grange, Mémoires de Berlin, *Tome XXIII*).

II. Comme je cherche ici des formules générales, je me contenterai de ſuppoſer ſeulement que le ſigne de $a,\ b,\ c \ldots\ldots\ q$ eſt connu.

Cela poſé, je dis que la propoſée ne peut avoir de racine poſitive plus grande que $a + b + c \ldots\ldots\ q$, étant tous pris avec le ſigne poſitif, ni de négative plus grande que la même quantité priſe avec le ſigne contraire; on pourroit dire auſſi que la plus grande racine poſitive ne peut être plus grande que le plus grand coëfficient, ou même que le plus grand coëfficient négatif, & que la plus grande négative ne peut non plus être plus grande que le plus grand coëfficient ou le plus grand poſitif, mais que cela demanderoit une trop grande ſubdiviſion dans les formules que nous cherchons.

III. Par la même raiſon $\frac{1 + a' + b' \ldots}{q'}$, tout étant pris poſitivement dans le numérateur eſt la plus grande limite de $\frac{1}{\Delta^2}$, Δ^2 étant le quarré des différences; ce qui donne $\Delta^2 < \frac{q'}{1 + a' + b' \ldots}$.

IV. Suppoſons que la propoſée ait été $z^n \pm A z^{n-1} \ldots \pm Q = 0$; $z = A + B + C + \ldots + Q$; donc faiſant $z = (A + B + C \ldots + Q)x$, nous aurons $x^n \pm ax^{n-1} \ldots \pm q$, où $a + b \ldots + q$ limite de x eſt < 1; donc la différence $\Delta < 2$; donc on peut prendre également pour limite $\sqrt{\left(\frac{q'}{1 + a' + b' \ldots}\right)}$ ou $\frac{q'}{2 \times (1 + a' + b' \ldots)}$

V. Cela poſé, il y a autant de racines réelles, poſitives, inégales ou en nombre impair, que l'on peut avoir de fois

$$m^n \left(\frac{q'}{2.1+a'+b'\ldots}\right)^n \pm a m^{n-1} \left(\frac{q'}{2.1+a'+b'\ldots}\right)^{n-1}\ldots + q <> 0.$$

$$\&\ (m+1)^n \left(\frac{q'}{2.1+a'+b'\ldots}\right)^n \pm a (m+1)^{n-1} \left(\frac{q'}{2.1+a'+b'\ldots}\right)^{n-1}\ldots + q >< 0.$$

où m désigne un nombre entier tel que $m \dfrac{q'}{2.1+a'+b'\ldots\ldots}$ $< a+b+c+\ldots.$ Or, quel que soit le signe de ces fonctions, si elles sont de signes différens, nous aurons leur produit négatif. Donc la proposée aura autant de racines positives, réelles, inégales ou égales en nombre impair, que l'on pourra avoir de fois

$$\left[m^n\left(\frac{q'}{2.1+a'+b'\ldots}\right)^n\ldots+q\right]\left[(m+1)^n\left(\frac{q'}{2.1+a'+b'\ldots}\right)+\ldots+q\right]<0.$$

VI. Il sera aisé, d'après les conditions connues pour les racines égales & les racines imaginaires composées, qui donnent des racines négatives dans l'équation en Δ^2, d'avoir une semblable formule pour tous les cas.

VII. Maintenant, les formules pourront être regardées comme aussi complettes qu'aucune autre qui contiendra des loix, telles $M > 0$, M étant une fonction des coëfficiens. En effet, tout ce qu'on peut exiger d'une semblable loi, c'est que ayant n équations entre les n coëfficiens de la proposée, qui ne désignent ici que des rapports, on ait la condition sans avoir résolu ces équations.

(VI).

J'AI cru devoir justifier ici le jugement que j'ai porté des Principes de M. d'Alembert & de M. Fontaine. Les voici l'un & l'autre.

Principe de M. d'Alembert, tel qu'il l'a donné en 1743.

Soient A, B, C, &c. les corps qui composent un systême quelconque, & supposons qu'on leur ait imprimé les mouvemens a, b, c, &c. qu'ils soient forcés de changer à cause de leur action mutuelle en $A\,B\,C$. Il est clair qu'on peut regarder le mouvement imprimé au corps A comme composé du mouvement A qu'il a pris, & d'un autre mouvement α; qu'on peut de même regarder les mouvemens b & c, comme composés des mouvemens B & β, C & $\varkappa$, &c. d'où il suit que le mouvement des corps A, B, C, &c. auroit été le même, si au lieu de leur imprimer les mouvemens a, b, c, &c. on leur eut donné à la fois ces doubles impulsions A & α, B & β, C & $\varkappa$; or, par la supposition, les corps A, B, C, &c. ont pris d'eux-mêmes les mouvemens $A\,B\,C$, &c. Donc, les mouvemens α, β, $\varkappa$, &c. doivent être tels qu'ils ne dérangent rien dans les mouvemens $A\,B\,C$, &c. c'est-à-dire, que si les corps n'avoient reçu que les mouvemens α, β, $\varkappa$, &c. ces mouvemens auroient dû se détruire & le système demeurer en repos.

Or, on voit que dans ce Principe il n'entre que des quantités susceptibles d'une expression analytique, & entre lesquelles l'etat de repos de chaque point doit donner un nombre d'équations égal à celui des directions auquel le mouvement de chaque point peut être rapporté.

Le reste de l'Ouvrage de M. d'Alembert contient des applications de ce principe général; on y voit qu'il n'y a aucun genre de Problème de Dynamique dont ce principe ne donne les équations. M. d'Alembert l'a appliqué depuis à la Théorie des Fluides.

Enfin, si on suppose ou un nombre de corps quelconques animés de forces quelconques, ou un système de corps liés entr'eux, & qu'on cherche les équations de leur mouvement; par le principe de M. d'Alembert, on trouvera des formules générales, qui seront les mêmes que celles que le Principe de la moindre action, & celui de la conservation des forces vives, combinés ensemble, ont données à M. de la Grange; & on déduira de ces formules les équations définitives de chaque Problème d'une manière semblable.

De ces mêmes formules, déduites du Principe de M. d'Alembert, c'est-à-dire, d'un principe vraiment mécanique, & fondé sur la nature même des corps & de mouvement; il est aisé de déduire l'existence du principe de la conservation des forces vives, & de celui de la moindre action, qui par-là cessent d'être des principes métaphysiques.

Une autre observation à faire, c'est que le principe de M. d'Alembert suffit seul pour résoudre tous les Problèmes; au lieu que tous les autres principes ont besoin, pour parvenir au même but, d'être combinés deux à deux. *Voyez* sur tous ces objets, le Mémoire de M. de la Grange, sur le Principe de la moindre Action *(Mémoires de Turin, tome II)*; la Pièce du même, qui a remporté le Prix en 1764, sur la Libration de la Lune; & un Essai que j'ai publié sous le titre de *Problème des Trois-corps.*

Voici maintenant le Principe de M. Fontaine, tel qu'il l'a publié plus de vingt ans après M. d'Alembert.

« Si plusieurs corps se choquent, ou plus généralement, si les états » de plusieurs corps, dans l'espace, se trouvent être incompatibles en» semble; les changemens qui leur arriveront seront tels que les forces » qu'avoient les corps pour s'y refuser, se seront vaincues mutuellement, ou auront été en équilibre. »