FORMULES GENERALES

Pour déterminer le point d'interſection de deux lignes droites infiniment proches, qui rencontrent une Courbe quelconque vers le même côté ſous des angles égaux.

PAR M. DE REAUMUR.

JE lûs le 4 Mai un Memoire dans lequel je démontrai une Méthode pour déterminer le point d'interſection de deux lignes droites indéfiniment proches qui rencontrent une Courbe quelconque, vers le même côté, ſous des angles égaux moindres ou plus grands qu'un droit. J'exceptois ainſi l'angle droit, parce que mon deſſein étoit de donner ſeulement des choſes nouvelles, & que de célebres Géometres ont trouvé pluſieurs Formules très-commodes pour déterminer la longueur des raïons oſculateurs, ou, ce qui eſt la même choſe, pour avoir le point d'interſection de deux lignes droites infiniment proches qui rencontrent une Courbe ſous un angle droit. Je me ſervis de leurs découvertes pour arriver à ce que je cherchois; je ſuppoſai leurs Formules pour donner la mienne; mais le juſte goût où l'on eſt à preſent pour les généralitez, & la facilité qu'on a d'y parvenir avec le ſecours des nouvelles Méthodes, firent que le R. P. Goüie propoſa de réſoudre ce Problême univerſellement ſans en excepter l'angle droit, & ſans ſuppoſer les Formules déja trouvées. Voici une des manieres dont on le peut faire.

1709. 4. Juin.

PROBLÈME.

Une Courbe quelconque AMmG *étant donnée, il faut trouver le point d'interſection* N *des droites* FM, fm, *infiniment proches qui font avec cette Courbe vers le même côté les angles* FMA, fmA *égaux, ſans rien ſuppoſer de conſtant que ces angles.*

SOLUTION.

Soient menées les ordonnées infiniment proches *BM*, *Bm* de la Courbe *AMmG*, qu'on ſuppoſe ici concourir au point *B*; & de ce point ſoient tirées les perpendiculaires *BF*, *Bf*, ſur *FM*, *fm*: la 2^{e} de ces perpendiculaires *Bf*, *M* coupera *FM* en *I*. Soient enfin abaiſſées les perpendiculaires *mR* (*fig.* 1.) ſur *MN*, *MS* ſur *Bm*, & (*fig.* 2.) *MR* ſur *mN*, *MS* ſur *Bm*.

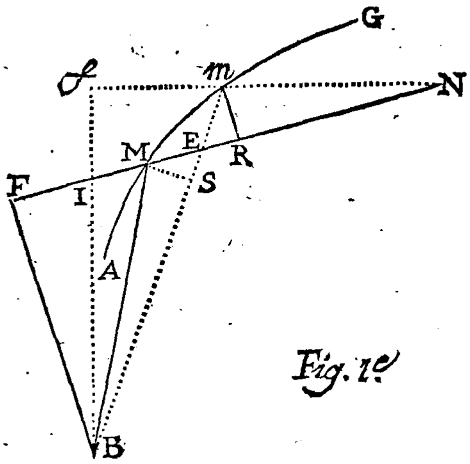

Fig. 1.

La ſeule vûë des figures fait appercevoir deux cas differens. 1°, ou les droites *FM*, *fm*, (*fig.* 1.) font avec la partie convexe de la Courbe les angles *FMA*, *fmA* plus petits que les angles *BMG*, *BmG* : 2°, ou (*fig.* 2.) les droites *FM*, *fm* font avec la partie convexe de la Courbe les angles *AMT*, *Amt* plus grands que les angles *BMG*, *BmG*. Il eſt évident que dans le 1^{r} cas (*fig.* 1.) le point d'interſection *N* ſera placé par delà *BM* par rapport à *A*; & dans

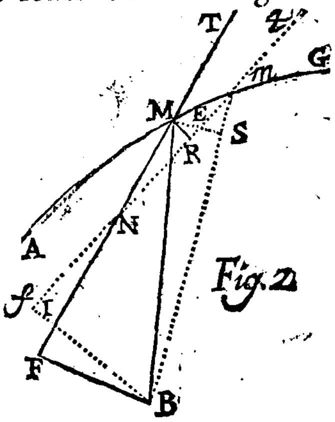

Fig. 2.

le 2^d cas (*fig.* 2.) ce même point sera entre AM & BM ; ce qui apporte quelque changement aux figures. C'eſt pourquoi je conſidererai les deux cas ſéparément.

Cas I. On nommera le ſinus de l'angle donné (*fig.* 1.) mMR, n ; celui de l'angle MmR (qui eſt donné auſſi, l'angle mRM étant droit) m ; le ſinus total, ou de l'angle droit mRM, a ; MN, ou mN, z ; BM, ou Bm, y ; Mm, ds ; mS, dy ; MS, dx ; ME, du ; ES, dt : D'où on aura $MR = \frac{mds}{a}$, en faiſant $a . m :: ds\,(Mm) . MR$; & par un ſemblable raiſonnement $mR = \frac{nds}{a}$; par conſéquent $ER = MR - ME = \frac{mds}{a} - du$; $Em = mS - ES = dy - dt$. Les triangles rectangles ſemblables MES, mER, donnent les analogies ſuivantes $ME\,(du) . ES\,(dt) :: Em . (dy - dt) . ER\,\left(\frac{mds}{a} - du\right)$; d'où on tire (après avoir ſubſtitué pour du^2 ſa valeur $dt^2 + dx^2$) $dt = \frac{mdsdu - adx^2}{ady}$, & $mR\left(\frac{nds}{a}\right) . Em\,(dy - dt) :: MS\,(dx) . ME\,(du)$, ce qui donne $dt = \frac{adydx - ndsdu}{adx}$; or comparant ces deux valeurs de dt, on en tire $du = \frac{adxdy^2 + adx^3}{mdxds + ndsdy} =$ (après avoir ſubſtitué pour dx^2 ſa valeur $ds^2 - dy^2$) $\frac{adxds}{mdx + ndy}$: & ſubſtituant cette valeur de du en une des précedentes de dt, on aura (les operations neceſſaires étant faites) $dt = \frac{mdxdy - ndx^2}{mdx + ndy}$. Il eſt de plus viſible que les triangles rectangles MBF, MES, ſont ſemblables ; car ſi des angles SEM, EMS, égaux à un droit, & des angles BMF, EMS pareillement égaux à un droit, on ôte le même angle EMS, les angles reſtans SEM, BMF ſont auſſi égaux. On a donc les analogies ſuivantes : . . .
$ME\left(du = \frac{adxds}{mdx + ndy}\right) . ES\left(dt = \frac{mdxdy - ndx^2}{mdx + ndy}\right) :: BM\,(y) . FM = \frac{mydy - nydx}{ads}$; & $ME\left(\frac{adxds}{mdx + ndy}\right) . MS\,(dx) :: BM\,(y) . BF = \frac{mydx + nydy}{ads}$. Si on prend à preſent la difference de BF, en regardant toutes les quantitez comme

variables, on aura la valeur de . . . .

$$If = \frac{mydsddx + nydsddy - mydxdds + mdsdxdy + ndsdy^2 - nydydds}{ads^2};$$

mais on a enfin (à cause des triangles semblables) IfN, NmR, $NI = MN + MF = z \frac{+mydy - nydx}{ads}$.

$$If = \frac{mydsddx + nydsddy - mydxdds + mdsdxdy + ndsdy^2 - nydydds}{ads^2} :: Nm\,(z).$$

$mR = \frac{nds}{a}$; d'où l'on tire . . . .

$$z\,(MN) = \frac{mnydyds^2 - nnydxds^2}{amydsddx + anydsddy - amydxdds - andsdx^2 - anydydds + amdsdxdy},$$

après avoir substitué dans le dénominateur de la fraction pour ds^2, sa valeur $dx^2 + dy^2$ Si on multiplie à present le haut & le bas de la fraction qui exprime la valeur de z (MN). par $\frac{ndx}{mndy - nndx}$, on la changera en celle-cy : . . .

$$z = \frac{nydxds^2}{\frac{amnydsdxddx + annydsdxddy - amnydx^2dds - anndx^3ds - annydxdydds + amndx^2dsdy}{mndy - nndx}};$$

après quoi substituant pour $dxddx$, sa valeur $dsdds - dyddy$, & dans le terme où l'on trouvera ds^2 (après cette operation) mettant sa valeur $dx^2 = dy^2$, le dénominateur de cette fraction se réduira (la division qui devient par-là possible étant faite) à $aydydds - aydsddy + adsdx^2$, par conséquent on aura $z = \frac{nydxds^2}{adsdx^2 + aydydds - aydsddy}$. *Ce qu'il falloit trouver.*

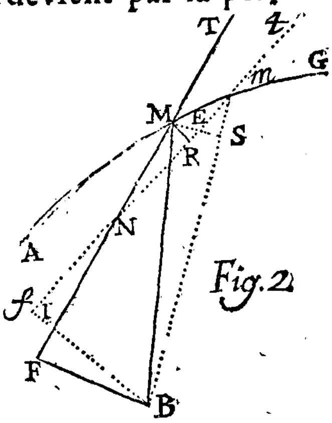

Fig. 2.

2. *Cas.* Un chemin assez semblable à celui qu'on a suivi dans le cas précedent, conduira à trouver la même Formule pour déterminer le point d'intersection N ; mais on nommera dans ce cas-cy le sinus de l'angle MmR, n, (*fig.* 2.) parce qu'il represente le sinus de l'angle mMR de la

fig. 1re, & le sinus de mMR, sera nommé m; on nommera de plus mE, du; ES, dt; & le reste comme dans le cas précedent; ainsi on aura $MR = \frac{nds}{a}$; $mR = \frac{mds}{a}$; $RE = mR - mE = \frac{mds}{a} - du$; $ME = MS - ES = dx - dt$. Les triangles rectangles semblables MER, mES, donnent encore ici ces deux analogies: $mE\,(du) . ES\,(dt) :: ME\,(dx - dt) . ER\,\left(\frac{mds}{a} - du\right)$; & $MR\,\left(\frac{nds}{a}\right) . ME\,(dx - dt) :: mS\,(dy) . mE\,(du)$. On tire de la 1re (après avoir substitué pour dt^2 sa valeur $du^2 - dy^2$) $dt = \frac{mdsdu - ady^2}{adx}$; & de la 2e, $dt = \frac{adxdy - ndsdu}{ady}$. Or la comparaison de ces deux valeurs de dt en fournit une de $du = \frac{adyds}{mdy + ndx}$, & substituant cette valeur de du en une de celles de dt, on trouve $dt = \frac{mdxdy - ndy^2}{mdy + ndx}$. Il sera à present aisé d'avoir les expressions algébriques de FM, BF, & fI difference de BF, par le moyen des triangles rectangles semblables mES, MBF. Après quoi faisant de la proportion que donnent les secteurs fNI, MNR, une égalité, on en tirera comme dans le cas précedent, une valeur de $MN\,(z)$, & des préparations semblables à celles du même cas précédent, rendront aussi cette valeur la même qu'on a trouvée cy-dessus; car on aura $z\,(MN) = \frac{nydxds^2}{adsdx^2 + aydydds - aydsddy}$.

COROLLAIRE I.

Si dans la Formule generale des points d'intersection $z = \frac{nydxds^2}{adsdx^2 + aydydds - aydsddy}$, on substituë en la place de dds sa valeur $\frac{dxddx + dyddy}{ds}$, & après cette substitution on met dans le terme du dénominateur où l'on trouvera ds^2 sa valeur $dx^2 + dy^2$, cette 1re Formule se changera en une 2e $z = \frac{nyds^3}{ads^2dx + aydyddx - aydxddy}$. Ou si l'on substituë dans la 1re Formule de valeur de $ddy = \frac{dsdds - dxddx}{dy}$, & en la place de dy^2 (que cette substitution fera trouver dans le dénominat.)

$ds^2 - dx^2$, on aura une 3e Formule $z = \frac{nydyds^2}{adydxds + aydsddx - aydxdds}$.

COROLLAIRE II.

Lorsque les droites FM, fm, feront avec la Courbe $AMmG$ des angles droits, l'angle mMR (*fig.* 1.) deviendra égal à l'angle mRM, & (*fig.* 2.) l'angle MmR aussi égal à l'angle mRM; de sorte que le sinus n de ces angles sera alors égal au sinus total a. Ce qui changera les trois expressions précedentes en celles-cy : . . . .
1re. $z = \frac{ydxds^2}{dsdx^2 + ydydds - ydsddy}$: 2e. $z = \frac{yds^3}{ds^2dx + ydyddx - ydxddy}$:
3e. $z = \frac{ydyds^2}{dydxds + ydsddx - ydxdds}$: qui sont autant de Formules du raïon de la Dévelopée. Ce sont aussi celles que M. Varignon a démontrées dans les Memoires de 1701, pag. 27, & dans ceux de 1707, pag. 503, de tant de manieres très differentes, mais encore plus ingenieuses. M. Varignon a aussi trouvé les trois Formules du Corollaire précedent par des chemins differens de celui que je viens de donner ; mais comme il attend une autre occasion pour les faire connoître au public, j'ai crû devoir montrer celui que j'ai suivi pour y arriver.

COROLLAIRE III.

Il suit du Corollaire précedent, que si on nomme le raïon de la developée, r, on aura 1°. $r = \frac{ydxds^2}{dsdx^2 + ydydds - ydsddy}$:
2°. $r = \frac{yds^3}{ds^2dx + ydyddx - ydxddy}$: 3°. $r = \frac{ydyds^2}{dydxds + ydsddx - ydxdds}$.
Si l'on substituë r dans les Formules 1re, 2e, & 3e, en la place de sa 1re, 2e & 3e valeur (*Corol.* 1.) ces trois Formules se changeront en celle-cy $z = \frac{nr}{a}$, qui est aussi celle que j'ai démontrée le 4. Mai, avec cette seule difference que je nommai alors m, ce qui est ici appellé n, & que je mis dans la Formule en la place de a sa valeur $\sqrt{mm - nn}$.

COROLLAIRE IV.

Le point de concours B, des ordonnées BM, Bm, étant pris infiniment éloigné de la Courbe $AMmG$, ces ordonnées deviendront alors paralleles, & tous les termes qui

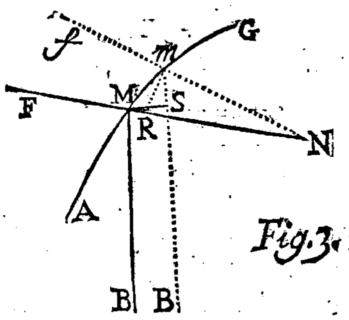

Fig. 3.

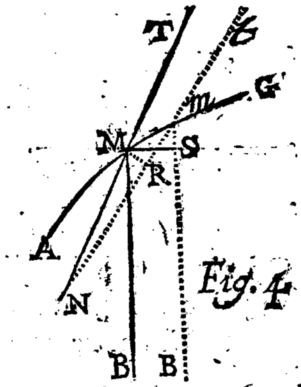

Fig. 4.

ne ſont pas multipliez par y (BM) dans les Formules du Corol. 1. s'évanoüiſſant, ces trois Formules ſe changeront en celles-cy : 1re, $z = \frac{ndxds^2}{adydds - adsddy}$: 2e, $z = \frac{nds^3}{adyddx - adxddy}$: 3e, $z = \frac{ndyds^2}{dsddx - dxdds}$: Ces trois Formules ſerviront à déterminer le point d'interſection N des droites FM, fm, dans le cas des ordonnées paralleles entr'elles.

COROLLAIRE V.

Les Formules des Corol. 1 & 4, deviendront plus ſimples dans l'application ; car on ſera obligé alors de regarder la difference d'une des variables comme conſtante : d'où il arrivera que la difference 2e de cette variable ſera zero. En faiſant ces differentes ſuppoſitions on changera les trois Formules du Corol. 1, dans les ſix qu'on voit cy-deſſous, dans la 1re colonne ; comme auſſi dans les ſix autres qu'on voit dans l'autre colonne les trois du 4 Corol.

Formules qui naiſſent de celles du Corollaire 1.	*Formules qui naiſſent de celles du Corollaire 4.*
	ds conſtante, ou $dds = 0$.
$z = \frac{nydxds}{adsdx - ayddy}$.	$z = \frac{ndxds}{-addy}$
$z = \frac{nydyds}{adydx \pm ayddx}$.	$z = \frac{ndyds}{addx}$

dy conſtante, ou $ddy = 0$.

$$z = \frac{nydxds^2}{adxds^2 + aydydds}. \qquad z = \frac{ndxds^2}{adydds}.$$

$$z = \frac{nyds^3}{ads^2dx + aydyddx}. \qquad z = \frac{nds^3}{adyddx}.$$

dx conſtante, ou $ddx = 0$.

$$z = \frac{nyds^3}{ads^2dx - aydxddy}. \qquad z = \frac{nds^3}{-adxddy}.$$

$$z = \frac{nydyds^2}{adydxds - aydxdds}. \qquad z = \frac{ndyds^2}{-adxdds}.$$

On alongeroit inutilement ce Memoire ſi l'on appliquoit ici ces Formules génerales à des cas particuliers. Il n'eſt beſoin pour cela que de calcul. Comme il arriveroit même qu'on trouveroit toûjours l'expreſſion du raïon oſculateur multipliée par la fraction conſtante $\frac{n}{a}$, il eſt auſſi commode dans les cas particuliers de chercher d'abord ce raïon, après quoi on déterminera aiſément le point d'interſection *N*, en ſuivant la méthode du Corollaire 2, art. 1, du 4 Mai. Je ne repeterai pas non plus ici ces choſes qu'on trouve dans les Corollaires du même Memoire, quoiqu'on en pût déduire la plus grande partie de cette derniere Solution.