METHODE GENERALE

Pour déterminer le point d'intersection de deux Lignes droites infiniment proches, qui rencontrent une Courbe quelconque vers le même côté sous des angles égaux moindres, ou plus grands qu'un droit: Et pour connoître la nature de la Courbe décrite par une infinité de tels points d'intersection.

PAR M. DE REAUMUR.

D'Illustres Géometres ont donné, avec le secours des nouvelles Méthodes, des formules pour trouver les raïons des Dévelopées; ou, ce qui revient au même, ils nous ont appris des expressions générales, par le moïen desquelles il est aisé de déterminer le point d'intersection de deux lignes droites infiniment proches, qui rencontrent une Courbe quelconque sous un angle droit. Ils ont aussi trouvé la nature des Courbes décrites par une infinité de telles intersections; mais je ne sçai personne, qui ait cherché à déterminer le point d'intersection de deux lignes droites infiniment proches qui rencontrent une Courbe quelconque vers le même côté sous des angles égaux, moindres, ou plus grands qu'un droit, & la nature des Courbes engendrées par une infinité de pareilles intersections, quoique ce Problême paroisse assez digne de la curiosité des Géometres, & qu'il surpasse autant par son étenduë celui des raïons des Dévelopées, qu'il est d'angles differens de l'angle droit: c'est en partie ce qui m'a excité à en chercher la Solution que je vais donner.

1709. 4 May.

PROBLÊME GENERAL.

FIG. I. *Une Courbe quelconque* AMmG *étant donnée, si l'on conçoit qu'une infinité de Lignes droites* FM, fm, *rencontrent cette Courbe en* M, m, *en faisant avec les Tangentes en ces points les angles* FMT, fmt *égaux à un angle quelconque donné* IOL *moindre ou plus grand qu'un droit; il est clair que les droites* FM, fm *se couperont quelque part en* N. *Or on demande 1°, ce point d'intersection* N *de ces deux lignes indéfiniment proches* FM, fm: *2°, la nature de la Courbe* BNK *décrite par une infinité de semblables intersections.*

SOLUTION.

I. Aïant pris l'arc *Mm* infiniment petit, soient menez aux points *M*, *m* les raïons *MC*, *mC* de la Developée de la Courbe *AMG*, lesquels se rencontrent au point *C*; & soient de plus tirées les droites *MT*, *mt* perpendiculaires en *M*, *m*, aux raïons *CM*, *Cm*, ou tengentes de la Courbe en ces points. Si l'on suppose à présent que les droites *FM*, *fm*, qui font avec la Courbe les angles constans *FMT*, *fmt*, se croisent en *N*; & que du centre *N*, du raïon *Nm* on décrive le petit arc *mR*, on formera le secteur *NmR* semblable au secteur *CMm*; ce qu'il est aisé de voir, puisque les triangles *MSC*, *NmS* sont semblables, aïant les angles *MSC*, *mSN* égaux, & aussi les angles *CMS*, *SmN*; car si des angles *NMT*, *Nmt*, égaux par la supposition (puisqu'ils sont les complemens à deux droits des angles égaux *FMT*, *fmt*) on ôte les angles droits *CMT*, *Cmt*, les angles restans *CMS*, *SmN* seront égaux; par conséquent l'angle *MCm* est égal à l'angle *mNM*, & les secteurs *MCm*, *mNR* sont semblables.

On abaissera encore les perpendiculaires *MP*, *mp* sur l'axe *AP*, & on lui tirera la parallele *MV*; après quoi aïant nommé *MC*, r; *MN*, z; *Mm*, ds; les secteurs semblables *MCm*, *m NR* donneront l'analogie suivante,

$MC\,(r) \,.\, MN\,(z) :: Mm\,(ds) \,.\, mR = \frac{zds}{r}$. Mais il eſt clair que tous les angles du triangle infiniment petit MmR ſont donnez, l'angle mMR étant égal à l'angle donné FMT, & l'angle mRM droit. Ainſi nommant le ſinus de l'angle donné mMR, m; celui de l'angle MmR, n; on aura cette autre analogie; $m \,.\, n :: mR \left(\frac{zds}{r}\right) \,.\, MR = \frac{nzds}{mr}$. On a encore $MR = \sqrt{Mm^2 - mR^2} = \frac{ds\sqrt{rr-zz}}{r}$. Ces deux valeurs étant comparées, donnent l'égalité ſuivante, $\frac{nzds}{mr} = \frac{ds\sqrt{rr-zz}}{r}$, ou $nz = m\sqrt{rr-zz}$; & après avoir quarré, tranſpoſé $mmzz + nnzz = mmrr$; ce qui donne enfin $z = \frac{\pm mr}{\sqrt{mm+nn}}$. De ſorte que pour déterminer le point N, il faut prendre MN 4^e^ proportionelle au ſinus total, au ſinus de l'angle donné, & au raïon de la Dévelopée. Car on aura $\sqrt{mm+nn} \,.\, m :: r \,.\, z = \frac{mr}{\sqrt{mm+nn}}$. On ſeroit arrivé par un chemin ſemblable à la même expreſſion de MN, ſi on eut pris l'angle FMT obtus, au lieu qu'on l'a fait aigu. C'eſt pourquoi il ſeroit inutile de repeter ici la même analyſe, & une autre figure pour ce 2^e^ cas. *Ce qu'il falloit trouver.*

COROLLAIRE I.

L'équation $z = \frac{\pm mr}{\sqrt{mm+nn}}$ apprend, que ſi on joint le point d'interſection C des raïons de la Dévelopée, & le point d'interſection N des droites FM, fm par une droite NC, cette ligne ſera perpendiculaire ſur FMN. Car ſoit élevée une perpendiculaire au point N, je dis qu'elle rencontrera le raïon de la Dévelopée en C. Ce qui eſt viſible, ces triangles MmR, CMN, étant ſemblables, aïant l'un & l'autre un angle droit, & les angles CMN, MmR égaux. Car l'angle CMT étant droit, les angles FMT, CMN pris enſemble, ſont auſſi égaux à un droit: de même que les angles RMm, & MmR. L'on a donc $FMT + CMN = RMm + MmR$; d'où ôtant d'un côté l'angle FMT, & de l'autre son égal RMm, on aura $CMN = MmR$. Partant ces deux triangles rectangles sont semblables, & leurs angles ont les mêmes sinus. D'où l'on tirera l'analogie suivante : le sinus (m) de l'angle MCN, est au sinus ($\sqrt{mm+nn}$) de l'angle droit : : MN (z). $MC = \frac{z\sqrt{mm+nn}}{m} = r$. Par conséquent la ligne MC est le raïon de la Dévelopée ; & la ligne CN qui joint les points C & N, est perpendiculaire sur FM en N. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE II.

On tire du Corollaire précédent une maniere bien simple de déterminer le point N, puisqu'on n'aura qu'à tirer du point C une perpendiculaire sur FM prolongée, elle la rencontrera au point cherché N ; ou, ce qui revient au même, on décrira sur le diametre MC, un demi-cercle MNC, qui sera rencontré par FM prolongée au point cherché N.

COROLLAIRE III.

Il est évident que le cercle $MNCDM$, décrit sur le raïon MC de la Dévelopée pour diametre, est le lieu qui contient tous les points d'intersection de deux droites FM, fm infiniment proches, qui font avec le même arc infiniment petit Mm de la Courbe AMG les angles égaux FMT, fmt, quels qu'ils soient : ou, ce qui est la même chose, que si l'on faisoit mouvoir les droites FM, fm, sur les points M & m pris pour poles, de maniere que l'angle FMT fut toûjours égal à l'angle fmt ; leur point d'intersection N décriroit un cercle $MNCDM$, qui a le raïon MC de la Dévelopée pour diametre.

COROLLAIRE IV.

D'où il suit 1°, que le point N d'intersection est toujours du côté concave de la Courbe, c'est-à-dire, du même

côté

côté que le raïon de la Dévelopée. 2°, Que lorsque l'angle FMT sera aigu, le point d'intersection doit se trouver par de-là MC par rapport à T. 3°. Que lorsque l'angle FMT sera obtus, que le point N sera placé en deçà de MC par rapport à T. 4°. Que lorsque l'angle FMT sera droit, alors le point d'intersection N deviendra le point C qui est celui où se croisent les raïons de la Dévelopée.

COROLLAIRE V.

On voit encore par les Corollaires précédens, que MN est toûjours moindre que MC; ce qui est aussi visible par l'équation $z = \frac{\pm mr}{\sqrt{mm+nn}}$, qui sert aussi à faire voir que lorsque MC (r) sera nul ou infini, z sera aussi nul ou infini.

COROLLAIRE VI.

L'équation $z = \frac{\pm mr}{\sqrt{mm+nn}}$ détermine non seulement le point d'intersection N; mais encore un autre point F, f, posé de l'autre côté de la Courbe, qui sera aussi éloigné du point M, que l'est le point N.

COROLLAIRE VII.

Deux de ces trois choses étant données, l'angle FMT, le raïon CM de la dévelopée, & la ligne MN, il sera toûjours facile de trouver la 3^e. 1°. L'angle FMT & le raïon MC de la dévelopée étant donnés, on trouve (*Corol.* 1. & 2.) la grandeur de MN. 2°. L'angle FMT, & la droite NM étant données, il sera aisé d'avoir le raïon de la dévelopée MC, il n'y aura qu'à prendre l'angle NMC égal au complement à l'angle droit de l'angle FMT, & élever au point N la perpendiculaire NC, elle ira rencontrer MC en C; de maniére que CM sera le raïon de la dévelopée, ce qui est évident, (*Corol.* 1. & 2.) 3°. La grandeur des lignes MC, MN étant donnée, on trouvera aisément celle de l'angle FMT, puisqu'on sçait que l'angle MNC est droit, il n'y aura donc qu'à faire cette proportion : Comme $MC . MN$, ainſi le ſinus de l'angle droit eſt au ſinus de l'angle MCN, ou de ſon égal FMT. *Ce qu'il falloit trouver.*

Equation de la Courbe formée par une infinité de points d'interſections N.

II. Pour avoir à préſent une équation qui exprime la nature de la Courbe BNK, formée par une infinité de points d'interſection tels que le point N, on tirera les perpendiculaires NQ ſur l'axe AQ de la Courbe donnée AMG, & TF ſur FM. On joindra les points, T, N, par la droite TN. On menera enfin par le point N une parallele à l'axe AQ qui rencontrera MP en E. Cette préparation faite, tout reſtant nommé comme art. 1. on nommera de plus les indéterminées de la Courbe AMG, AP, x; PM, y; celles de la Courbe BNK, AQ, u; QN, s; la ſoûtangente TP, p; la tangente TM, t; d'où on aura $PQ = NE = AQ - AP = u - x$; $ME = PM - PE = y - s$. Or $MN^2 = ME^2 + NE^2$, ce qui étant exprimé algébriquement donne l'équation $(A)\ zz = yy - 2sy + ss + uu - 2ux + xx = \frac{mmrr}{mm+nn}$ (*art.* 1.). On a encore $NT^2 = QT^2 + QN^2 = TF^2 + FN^2$; ce qui donnera une autre équation algébrique, après qu'on aura trouvé les expreſſions des lignes FM, FT; ce qui eſt facile, l'angle TFM étant droit, l'angle FMT donné, & par conſéquent les triangles FMT, RMm ſemblables. Ainſi leurs angles ont les mêmes ſinus ; ce qui donnera les deux analogies ſuivantes (*art.* 1.) Le ſinus de l'angle droit $(\sqrt{mm+nn})$. au ſinus de l'angle $FTM\ (n) :: TM\ (t) . FM = \frac{nt}{\sqrt{mm+nn}}$. Et le ſinus de l'angle droit $(\sqrt{mm+nn})$. au ſinus de l'angle $FMT\ (m) :: TM\ (t) . TF = \frac{mt}{\sqrt{mm+nn}}$. Partant $FN = FM + MN = \frac{nt+mr}{\sqrt{mm+nn}}$. On a auſſi $QT = PT + PQ = p + u - x$. On a donc $QT^2 + QN^2 = pp + 2pu + uu - 2ux$

$-2px+xx+ss$; & $FT^2+FN^2=\frac{nntt+2mntr+mmrr+mmtt}{mm+nn}$ ce qui donne l'équation $(B)\ tt+\frac{mmrr+2mntr}{mm+nn}=ss+pp+2pu+uu-2px-2ux+xx$: De ſorte que ſouſtraïant le premier membre de l'équation A de ce membre de l'équation B, & l'autre de l'autre, on aura l'équation $(C)\ \frac{2mntr}{mm+nn}=pp-tt+2pu-2px-yy+2sy$, dans laquelle ſubſtituant pour $pp-tt$ ſa valeur $-yy$, on a enfin l'équation $(D)\ \frac{mntr}{mm+nn}=pu+sy-px-yy$, qui avec l'équation $(A)\ \frac{mmrr}{mm+nn}=yy-2sy+ss+uu-2ux+xx$, & celle de la Courbe $AMmG$, ſeront ſuffiſantes pour en trouver un 4ᵉ qui ne contiendra que les coordonnées u, s de la Courbe BNK. *Ce qu'il falloit trouver.*

COROLLAIRE I.

Il eſt clair que la Courbe d'interſection BNK ſera géometrique, lorſque la Courbe génératrice $AMmG$ le ſera.

COROLLAIRE II.

Il ſuit de la génération de la Courbe BNK que MN eſt la Tangente en N de cette Courbe. Car 1°, il eſt évident, qu'avant de la rencontrer en N comme en S, elle eſt hors de cette Courbe, puiſque ſi elle la rencontroit en S, il faudroit qu'elle s'y croiſât avec une ligne infiniment proche mS, (car on peut toujours mener du point S une droite mS ſur un petit arc Mm, qui faſſe avec lui un angle égal à FMT); & alors le point N ſeroit en S contre la ſuppoſition. 2°. Elle ne la rencontre pas par-delà le point N (ce qu'on apperçoit aiſément en tirant une droite GK, avec les conditions requiſes par le Problême) infiniment près de mN, leur point d'interſection K devant déterminer un de ceux de la Courbe : Mais il eſt viſible que GK coupe MN prolongée en H, avant de couper mN en K; d'où il ſuit que le point H eſt hors de la Courbe BNK; & à plus forte raiſon les autres points de MN en sont aussi dehors ; par conséquent elle rencontre la Courbe au seul point N, où est sa Tangente en ce point.

COROLLAIRE III.

Il suit du Corollaire précédent, que CN est perpendiculaire à la Courbe BNK, puisque (*art.* 1. *Corol.* 1.) elle est perpendiculaire à NM Tangente de cette Courbe.

COROLLAIRE IV.

On pourroit regarder la Courbe BNK comme une espece de Caustique par refraction dont on n'a point encore parlé, formée par l'intersection des raïons infiniment proches qui rencontreroient $AMmG$ sous un même angle : car si on imagine que l'espace renfermé par cette Courbe, est un verre éclairé par une infinité de points lumineux Z, Y, &c. il est clair que tous les raïons ZM, YM qui rencontreront cette surface sous des angles ZMT, Ymt égaux continuëront leur route après la réfraction sous les angles égaux FMT, fmt ; par conséquent ils se couperont en N, & par une infinité de pareilles intersections la Caustique BNK sera décrite.

COROLLAIRE V.

L'espace renfermé entre la Courbe $AMmG$, & la Courbe BNK, est à l'espace renfermé entre la Courbe $AMmG$ & sa Dévelopée dans le rapport de $mm . mm + nn$: car la somme infinie des Secteurs mRN remplira ce 1^r espace, celle des Secteurs MmC le 2^e ; or ces sommes contiendront chacune un égal nombre de Secteurs, chaque NmR aïant un CMm qui lui correspond ; comme aussi chaque CMm, un NmR. Mais ces Secteurs sont entr'eux dans le rapport constant de $mm . mm + nn$, leurs sommes sont donc aussi entr'elles dans le même rapport. Il est aisé de démontrer que le Secteur NmR, est au Secteur CMm : : $mm . mm + nn$. NmR étant $= mR \times \frac{1}{2} NM =$ (*art.* 1.)

$\frac{zds}{r} \times \frac{1}{2} z = \frac{mmrds}{2 \times \overline{mm+nn}}$, & $CMm = Mm \times \frac{1}{2} CM = \frac{rds}{2}$. Partant $NmR . CMm :: \frac{mmrds}{2 \times \overline{mm+nn}} . \frac{rds}{2} :: mm . mm + nn$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

EXEMPLE I.

Soit la Courbe donnée un quart de cercle $AMmG$, qui est rencontré par une infinité de droites Fm, fm, qui font avec lui des angles FMT, fmt, égaux à un même angle donné. Si on veut avoir l'équation qui exprime la nature de la Courbe décrite par une infinité d'interfections, semblables à celle des droites FM, fm, infiniment proches; on aura (tout restant nommé comme art. 1. & 2.) & nommant de plus le raïon du cercle donné a; $x = a - \sqrt{aa - yy}$; le raïon de la dévelopée (r) sera aussi $= a$, la dévelopée de cette Courbe étant son centre C; l'expression de la soûtangente (p) deviendra $= \frac{yy}{\sqrt{aa-yy}}$; & celle de la Tangente $(t) = \frac{ay}{\sqrt{aa-yy}}$: lesquelles valeurs de x, r, p, t, substituées dans les deux équations générales $(A)\ \frac{mmrr}{mm+nn} = yy - 2sy + ss + uu - 2ux + xx$: $(D)\ \frac{mntr}{mm+nn} = pu + sy - px - yy$; elles se changeront en celles-cy : . . . . . .

$$(E)\ \sqrt{aa-yy} = \frac{ss - 2sy + uu - 2au + 2aa - \frac{mmaa}{mm+nn}}{2a - 2u},$$

$$(F)\ \sqrt{aa-yy} = \frac{ay - uy - \frac{mnaa}{mm+nn}}{s}$$

: égalant le 2e membre de l'équation E au 2e membre de l'équation F, on en tirera,

$$y = \frac{s^3 + 2aas - 2aus + suu + \frac{-mmaas - 2mnaau + 2mna^3}{mm+nn}}{2aa - 4au + 2uu + 2ss},$$

On tirera aussi l'équation F par les voïes ordinaires,

$$y = \frac{\frac{mna^3 - mnaau}{mm+nn} \pm \sqrt{aas^4 \begin{matrix} + a^4ss \\ - 2a^3uss \\ + aauuss \end{matrix} - \frac{mmnna^4ss}{\overline{mm+nn}^2}}}{aa - 2au + uu + ss}.$$

& après avoir égalé les deux valeurs d'y quarré, transposé, effacé les termes qui se détruisent, on aura l'équation suivante, qui ne contient que des u, & des s,

$$u^4 - 4au^3 \begin{matrix} +4aauu \\ +2uuss \\ \hline -\frac{2mmaauu}{mm+nn} \end{matrix} \begin{matrix} -4assu \\ +\frac{4mma^3u}{mm+nn} \end{matrix} - \frac{2mmaass}{mm+nn} + s^4 - \frac{3m^4a^4}{\overline{mm+nn}^2} = 0.$$

Si on divise cette derniere équation par l'équation (G) $uu - 2au + ss - \frac{3mmaa}{mm+nn} = 0$, on aura pour quotient l'équation (H) $uu - 2au + ss + \frac{mmaa}{mm+nn} = 0$, qui exprime la nature de la Courbe d'intersection BNK, qui est aussi un quart de cercle dont le raïon $BC = \frac{na}{\sqrt{mm+nn}}$; il est visible que l'équation G est aussi une équation au cercle ; mais il reste à sçavoir de quels points ce cercle est le lieu ; ce qu'on trouvera aisément pour peu qu'on se souvienne que (*art.* 1. *corol.* 6.) l'équation $z = \pm \frac{mr}{\sqrt{mm+nn}}$ donne non-seulement le point d'intersection N des droites FM, fm, mais encore les points F, f, aussi éloignez des points M, m, où elles rencontrent la Courbe, que l'est celui d'intersection des mêmes point M, m, & comme la premiere équation générale A, contient le quarré de $z = \frac{mmrr}{mm+nn}$, il suit qu'on doit non-seulement trouver par le moïen de ces deux équations, celle qui exprime la nature de la Courbe décrite par les points d'intersections N ; mais encore une autre qui donnera l'équation d'une Courbe qui contient tous les points F tels que $FM = MN$. Aussi est-ce ce que donne l'équation (G) $uu - 2au + ss - \frac{3mmaa}{mm+nn} = 0$, qui est un cercle, dont le raïon $CH = a\sqrt{\frac{4mm+nn}{mm+nn}}$.

La seule analyse de l'article 1[r] suffit pour faire voir, que la Courbe d'intersection BNK est un cercle. Car la dévelopée de la Courbe $AMmG$ étant le point C, il est évident que toutes les lignes CN qui joignent les points d'intersections N, & les extrémitez des raïons de le dévelopée se termineront au point C ; il n'est pas moins clair que la grandeur de *CN* eſt conſtante, puiſqu-(*art.* 1.& *corol.* 1.) *CM* eſt à *MN* dans un rapport conſtant, & que tous les angles du Triangle rectangle *CMN* ſont conſtans. On voit avec la même facilité que le lieu des points *F* pris tels que $\overline{FM = NM}$ eſt auſſi un cercle, puiſque la droite $FC = \sqrt{FN^2 + NC^2}$ eſt de grandeur conſtante. Le ſeul article 1. ſuffira auſſi dans l'Exemple qui ſuit, pour faire trouver la nature de la Courbe d'interſection *N*.

EXEMPLE II.

Soit la Courbe donnée *AOMG* une Logarithmique ſpirale, dont la proprieté eſt que ſi du point *A* (qu'elle environne par une infinité de tours) on lui mene une appliquée quelconque *AM*; & au point *M*, la Tangente *MT*, qui rencontre en *T* la Soûtangente *AT* perpendiculaire à *AM*, le rapport de *AM* à *AT* eſt conſtant; ou, ce qui eſt la même choſe, l'angle *AMT* eſt toujours le même. Si l'on conçoit que deux lignes infiniment proches *FM*, *fm*, font avec cette Courbe des angles *FMT*, *fmt*, égaux à un angle donné, on déterminera aiſément le point d'interſection *N* de ces deux lignes, en décrivant le cercle *MNC* ſur le raïon *MC* de ſa dévelopée pris pour diametre, *FM* prolongée rencontrera ce cercle en *N* qui eſt le point d'interſection des droites *FM*, *fm*, (*art.* 1. *corol.* 1.) pour connoître la nature de la Courbe décrite par une infinité de points d'interſections ſemblables au point *N*, on décrira la dévelopée *ACR* de la Logarithmique *AMG*, qu'on ſçait être la même Logarithmique miſe dans une poſition differente; après quoi on joindra les points *N*, *A*, par la droite *NA*; on menera de plus ſur *NA* la perpendiculaire *AF*, & on prolongera *MN* Tangente (*art.* 2. *corol.* 2.) de la Courbe cherchée, juſques à ce qu'elle rencontre *AF* au point *F*. Cette préparation ſuppoſée, il eſt aiſé de démontrer que la Courbe d'interſection *ANK* eſt elle-même une Logarithmique ſpirale, 1°, differente de la Logarithmique FIG. III.

AOMG, lorſque l'angle *ANF* eſt plus grand, ou moindre que l'angle *AMT*; 2°, qu'elle ſera la même Logarithmique ſpirale miſe dans une autre poſition lorſque l'angle *ANF* ſera égal à l'angle *AMT*. Pour le démontrer, il ne faut que faire voir que l'angle *ANF* eſt conſtant, ce qu'on peut faire de la maniere ſuivante : Dans le triangle *AMN*, l'angle *NMA* eſt conſtant ; car il eſt compoſé des angles conſtans *NMC* (complement à l'angle droit de l'angle donné *FMT*) & *CMA* (complement à l'angle droit de l'angle *AMT* conſtant par la proprieté de la ſpirale donnée). Or les côtez *AM*, *MN*, qui forment l'angle conſtant *AMN*, ſont entr'eux dans un rapport conſtant ; d'où il ſuit que les deux autres angles du même triangle, ſont auſſi conſtans. Il s'agit ſeulement de démontrer que *AM* eſt à *MN* dans un rapport conſtant, ce qui eſt viſible, puiſque *AM* eſt à *MC* dans un rapport conſtant par la proprieté de la Logarithmique *ACR*, & que *MC* eſt auſſi à *MN* dans un rapport conſtant (*art.* 1.) :: $\sqrt{mm+nn} . m$. Donc il eſt auſſi évident que *AM* eſt à *MN* dans un rapport conſtant ; par conſéquent les angles *MNA*, *MAN* ſont conſtans, & la Courbe d'interſection *ANK* eſt une Logarithmique ſpirale ; car l'angle *NAF* étant droit, *NA* ſera à *AF* dans un rapport conſtant, ce qui eſt la proprieté de cette Courbe. Auſſi ſemble-t-il que ce lui en ſoit une de ſe reproduire, puiſqu'outre toutes les manieres dont on a fait voir qu'elle ſe reproduiſoit, en voici encore une nouvelle. Car toutes les fois que l'angle *FNA* ſera égal à l'angle *TMA*, elle ſe reproduira elle-même.

COROLLAIRE I.

Pour faire l'angle *FNA*=*TMA*, ou pour avoir un angle *FMT* tel que la Courbe d'interſection *ANK*; ſoit la même Logarithmique ſpirale *AOMG* dans une poſition differente : on n'aura qu'à faire l'angle *FMT*= *TMA*; & on aura ce qu'on cherchoit. Pour le démontrer, ſoient joints les points *N*, *C*, par la droite *NC*; il eſt

eſt évident que l'angle *NCM* = *FMT* (puiſqu'étant joints l'un ou l'autre au même angle *NMC*, ils forment un angle droit) = (*hypot.*) *TMA* = *MCA*. D'où il ſuit que les triangles rectangles *MNC*, *CAM*, ſont ſemblables & égaux ; partant *NC* = *AC*, ou l'angle *CND* = l'angle *CAD*, & l'angle *NDC* = l'angle *CDA* ; par conſéquent les angles en *D* ſont droits. Or le triangle rectangle *NDC*, eſt ſemblable au triangle rectangle *MDN* ; d'où il ſuit enfin que l'angle *MND* = l'angle *NCD* = *FMT* = (*Conſt.*) *TMA*. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE II.

Il ſuit du Corollaire précedent, que la poſition de *AOMG*, lorſqu'elle deviendra la Courbe d'interſection *ANK*, ſera telle 1°, que menant par un point quelconque la Tangente *NF* à cette Courbe, elle coupera la Logarithmique *AOMG* en *M*, après quoi ſi on méne par le point *M*, une Tangente *MT*, à la Logarithmique *AOMG*, la Soûtangente *A F* de la Logarithmique *ANH*, ſera perpendiculaire à la Tangente *MT*, au point *B* où elles ſe rencontrent : 2°, que *AF* ſera parallele au raïon *MC* de la dévelopée de la Courbe *AOMG* ; car les angles *MDA*, *DAB*, *BMD*, étant droits, l'angle *MBA* ſera droit auſſi, & *MBAD* un parallelogramme rectangle : 3°, que les Appliquées *AN* de cette Logarithmique ſont paralleles aux Tangentes *MT* de la Logarithmique *AOMC* : 4°, que *MN* = *MA* ; ainſi pour conſtruire la Logarithmique d'interſection *ANH*, dans ce cas il ne faut que prendre ſur *FM* prolongée *MN* = *MA*, Appliquée de la Spirale donnée *AOMG*.

COROLLAIRE III.

Si l'angle donné *FMT* eſt égal au complement à deux droits de l'angle *AMT* ; c'eſt-à-dire, ſi on conçoit que les droites *HM* rencontrent la Logarithmique *AOMG* en *M*, de maniere que l'angle *HMT* = à l'angle *MTA* + l'angle *MAT*, la Courbe d'interſection deviendra le point *A*, auquel la Spirale logarithmique *GMO*, arrive après une infinité de tours; ce qui est évident, puisqu'alors *HM* est l'Appliqué *AM* prolongée, & que toutes les *AM* partent du point *A*. *Ce qu'il falloit démontrer.*

EXPERIENCES

SUR LES METAUX,

Faites avec le Verre ardent du Palais Royal.

PAR M. GEOFFROY.

8. Mai 1709.

COmme Monseigneur le Duc d'Orleans, par le zele qu'il a pour le progrez des Sciences, veut bien permettre à ceux de cette Academie qui ont quelques expériences à faire au feu du Soleil, de se servir de son verre ardent, j'ai profité de cet avantage pour examiner les différens changemens qui arrivent aux Métaux exposez au foyer de ce verre, dont l'ardeur & l'efficace surpassent de beaucoup la force de nos feux ordinaires.

Lorsque j'avançai dans mon Mémoire du 21 Mai 1707, que tous les Métaux ou leurs cendres exposées à un feu violent tel que le feu du Soleil, se réduisoient en verre, je ne parlai point des différentes manieres dont les Métaux se vitrifioient, & des autres circonstances qui accompagnoient cette vitrification, parce que je n'avois pas encore examiné pour lors ces choses avec toute l'attention qu'elles méritoient; mais aïant eu occasion de le faire depuis, j'entrerai aujourd'hui dans le détail de ces expériences, & je rapporterai ce que j'ai observé sur les quatre métaux imparfaits, le Fer, le Cuivre, l'Etain & le Plomb, exposez au foyer du verre ardent. Je ne parlerai point encore ici ni de l'Or ni de l'Argent, parce que, comme leur analise m'a paru beaucoup plus difficile que celle des autres métaux, je me suis reservé d'y travailler lors-

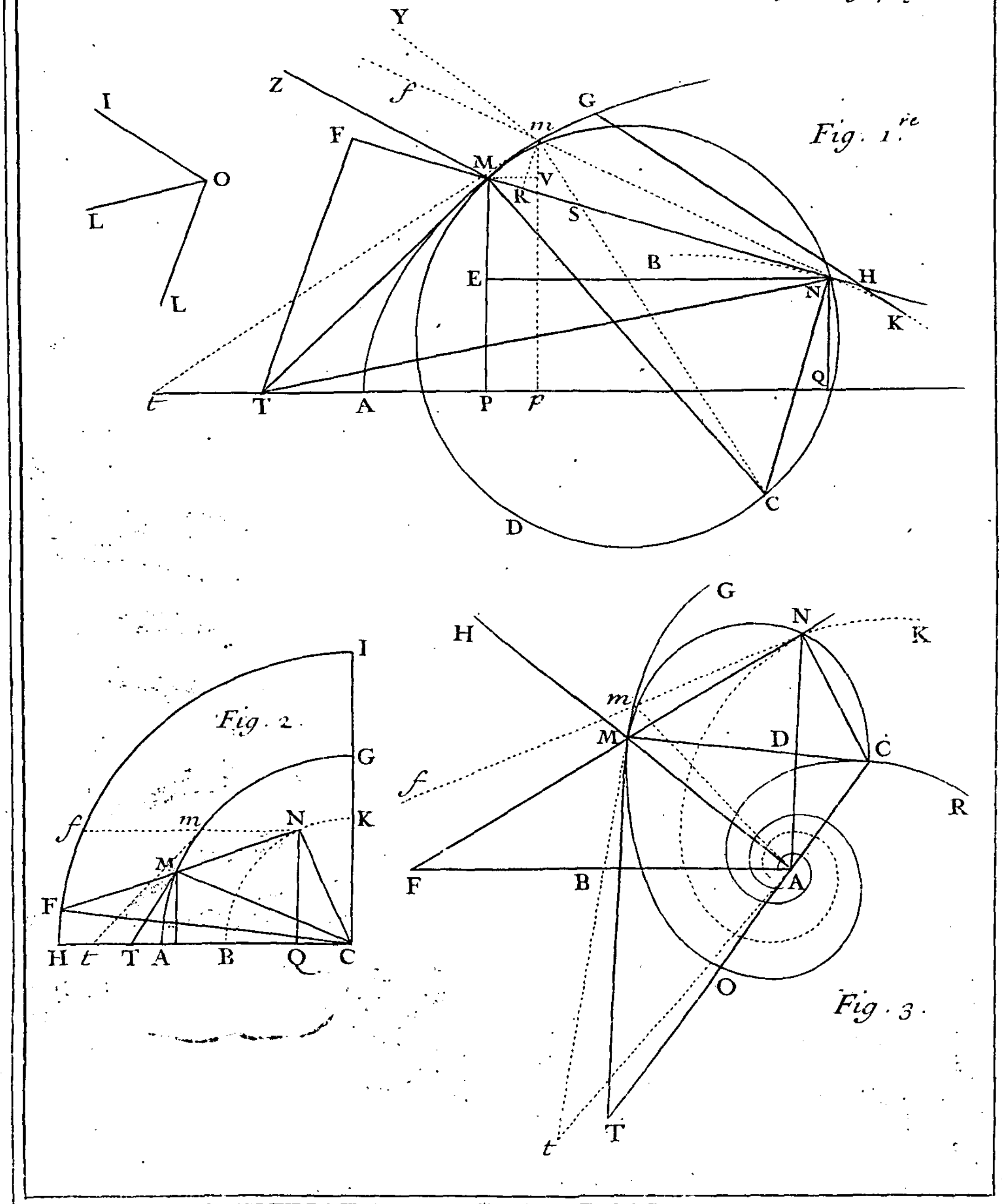
Fig. 1.re
Y
Z
f
G
m
I
O
L
L
F
M
V
R
S
B
E
H
N
K
Q
t
T
A
P
p
C
D
Fig. 2
I
G
K
N
m
f
M
F
H t T A B Q C
Fig. 3
G
N
K
H
m
M
D
C
f
R
F
B
A
O
t
T