MANIERE GENERALE

De trouver une infinité de lignes Courbes nouvelles, en faiſant parcourir une ligne quelconque donnée, par une des extremités d'une ligne droite donnée auſſi, & toûjours placée ſur un même point fixe.

PAR M. DE REAUMUR.

L'Examen d'une Courbe que M. Carré a donné dans les Memoires de 1705, décrite par l'une des extremitez du diametre d'un cercle, pendant que l'autre parcourt ſa demi-circonference, me fit naître l'idée d'en chercher de nouvelles par une ſemblable voïe. Je fis pour cela gliſſer ſur differentes Lignes courbes, ou des portions de ces lignes lorſqu'elles ſont infinies, une des extremitez d'une ligne droite priſe à volonté, & toûjours poſée ſur un point fixe du même plan, & je cherchai les Courbes décrites par l'autre extremité. Mais ne voyant pas même pour borne à cette recherche le nombre infini des Lignes courbes qui exiſtent, n'y en ayant aucune qui n'en puiſſe produire une infinité de differentes, en changeant la ſituation du point fixe; je crus qu'il falloit avoir recours à la Solution d'un Problême general, qui comprenant toutes les Courbes poſſibles, & les diverſes poſitions du point fixe imaginables, donneroit toûjours la nouvelle Courbe qu'on voudroit avoir. Voici, ce me ſemble, comme on peut le propoſer & le réſoudre. 1708. 19. Mai.

PROBLEME GENERAL.

Une ligne quelconque droite ou courbe, & un point fixe ſitué où l'on voudra étant donnés, ſi l'on conçoit qu'une des extremités d'une ligne droite donnée auſſi & placée ſur ce point parcourre la ligne donnée, ou une portion de cette ligne lorſ-

qu'elle est infinie, l'autre extremité de la ligne droite décrira pendant ce tems une Courbe dont il faut trouver l'équation.

SOLUTION.

FIG. I. Soit *AMH* une ligne droite ou courbe donnée. Soit de plus *CB* une autre ligne droite donnée aussi. Soit enfin le point *F* pris pour point fixe. Si l'on fait parcourir par l'extremité *C* de la ligne *CB*, toûjours posée sur le point fixe *F* la ligne *AMH*, il est clair que pendant ce tems-là son autre extremité *B* décrira la Courbe *OND*. Si l'on veut s'imaginer la ligne *CB* dans une position quelconque *MFN*, & qu'on nomme la donnée *CB*, *MN*, m; les inconnuës *MF*, r; *FN*, z il est évident qu'on aura toûjours $MN\ (m) - MF\ (r) = FM\ (z)$, c'est-à-dire, $m - r = z$ pour équation générale de la Courbe *DNO*, qu'elle que soit la generatrice *AMH*, & qu'en substituant pour *MF* (r) sa valeur tirée de l'équation de la Courbe donnée *AMH*, on aura alors celle de l'engendrée *DNO*.

Si la generatrice *AMH* est geometrique, il est évident que la Courbe *DNO* le sera aussi, & il sera aisé d'avoir une équation qui exprime le rapport de ses abscisses à ses appliquées, en menant par le point donné *F* une ligne droite *CFQ*, parallele ou perpendiculaire à la génératrice *AMH* si elle est droite, ou à son axe si elle est courbe. Car si on abaisse des points quelconques *M*, *N*, les perpendiculaires *MP*, *NQ*, sur la droite *CFQ*, on formera les triangles rectangles semblables *MPF*, *FNQ*, par le moyen desquels on pourra facilement chasser l'inconnuë qu'a donnée la génératrice *AMH*; & mettant pour *FN* sa valeur $\sqrt{FQ^2 + QN^2}$, on aura enfin une équation qui ne contiendra d'inconnuës que les abscisses *FQ*, & les appliquées *QN* de la Courbe *DNO*; ce qui va devenir clair par les Exemples.

EXEMPLE I.

FIG. II. Soit la ligne droite *AMT* donnée de position, le long de laquelle l'extremité *C* de la droite *BC* donnée de grandeur toûjours placée sur le point immobile *F* doit glisser. Il faut trouver l'équation de la Courbe BNF décrite par l'extremité B, pendant que l'autre C parcourt CA. Si l'on conçoit que BC, d'abord perpendiculaire sur CA, soit arrivée dans une situation quelconque MN, & qu'après avoir tiré par le point donné F une parallele à AT indéfiniment prolongée de part & d'autre de F, on abaisse sur cette ligne les perpendiculaires MP, NQ, on formera les triangles rectangles semblables MPF, FNQ. Après quoi si on nomme les données $BC\,(MN)\,a$, $FC\,(MP)\,b$; les inconnuës $FP\,(MC)\,x$; $FQ\,(KN)$, u; $QN\,(FK)\,s$; l'on aura $FM\,(r) = \sqrt{xx+bb}$, $FN\,(z) = \sqrt{uu+ss}$, & l'équation générale $m-r=z$ deviendra (en mettant pour m,r,z, leurs valeurs) $a-\sqrt{xx+bb} = \sqrt{uu+ss}$. Mais les triangles semblables FMP, FNQ, donneront $MP\,(b) : PF\,(x) :: NQ\,(s) : QF\,(u)$, d'où l'on tire $x = \frac{bu}{s}$; & mettant cette valeur d'x dans l'équation précédente, on aura $a - \frac{b}{s}\sqrt{uu+ss} = \sqrt{uu+ss}$, qui se réduit à celle-ci $\frac{as}{b+s} = \sqrt{uu+ss}$ pour équation de la Courbe BNF, qui ne contient d'autres inconnuës que les abscisses & les appliquées de cette Courbe.

1°. Si on fait dans cette équation $NQ\,(s) = 0$ on aura aussi $FQ\,(u) = 0$; & si l'on fait $FQ\,(u) = 0$, on aura $s = 0$, & $s = a - b = BF$. Ce qu'on voit aussi aisément par la génération de la Courbe.

2°. L'équation $\frac{as}{b+s} = \sqrt{uu+ss}$ donne cette propriété de la Courbe $a\,(BC)$. $\sqrt{uu+ss}\,(NF) :: b+s, (CK)$. s, FK.

3°. Si on fait u négative dans cette équation, c'est-à-dire, si on prend FQ de l'autre côté, elle reste toûjours la même; d'où on voit que cette Courbe a une autre branche BGF semblable à la premiere. Si l'on fait à present dans l'une & l'autre supposition d'u positive; ou negative, s, NQ negative, FC, b, la devient aussi necessairement, & l'équation sera $\frac{-as}{-b-s} = \sqrt{uu+ss}$, qui est la même que la précédente; puisqu'on a seulement changé tous les signes du numerateur & du dénominateur du premier membre; ce qui fait encore voir que la Courbe a deux autres branches de l'autre côté d'F par rapport à B, FSI, FMI, semblables aux deux premieres, qui tous ensemble composent la Courbe entiere $FNBGFSIMF$.

4°. Il est visible que la Courbe coupe son axe BI aux points B & I à angles droits; mais ceux qu'elle fait au point F avec PQ, sont de 45 degrez lorsque $FC = AC$, (le point A est supposé le plus éloigné que BC puisse toucher) moindre que 45 degrez lorsque FC moindre que AC, & plus grand que 45^d lorsque FC plus grande que AC.

5°. Si on veut avoir la tangente du cette Courbe, on aura pour expression de la soûtangente $\frac{sdu}{ds}$; mais l'équation de la Courbe differentiée donne $ds = \frac{ssudu + bsudu}{buu - s^3}$, laquelle valeur de ds sustituée, on a $\frac{sdu}{ds} = \frac{buu - s^3}{su + bu}$.

6°. Pour avoir les plus grandes appliquées de cette Courbe, si on fait dans l'équation differentielle $\frac{ds}{du} = \frac{ssu + bsu}{buu - s^3}$, $ds = 0$, & $ds = \infty$, la premiere supposition donne $ssu + bsu = 0$, d'où on tire $u = 0$, laquelle substituée dans l'équation $\frac{as}{b+s} = \sqrt{uu + ss}$ la réduira à $as - bs = ss$, d'où résulte $s = a - b = FB$, & $-s = -a + b = -FB = FI$ qui sont les plus grandes hauteurs, & la seconde supposition rend $buu - s^3 = 0$, & $uu = \frac{s^3}{b}$, $u = s\sqrt{\frac{s}{b}} = FQ$, & $-u$ (FP ou MC) $= -s\sqrt{\frac{s}{b}}$ laquelle substituée aussi dans la précédente équation, on a s (FK) $= -b + \sqrt[3]{aab}$, & $-s$ (FC) $= b - \sqrt[3]{aab}$, qui donnent les plus grandes largeurs KN, KG, CM, CS.

7°. Pour connoître la grandeur de l'espace borné par cette Courbe, on peut concevoir la ligne MN dans une autre position mn infiniment proche de la premiere; après

après quoi si du centre F on décrit les petits arcs mR, NO, on aura les secteurs semblables FmR, FNO, & la somme des derniers est égale à l'espace renfermé par la branche BNF, & la droite BF pour l'avoir, Mm(Pp étant $=dx$) & $MR=\frac{xdx}{\sqrt{xx+bb}}$, on aura $mR=\sqrt{Mm^2-MR^2}$ $=\frac{bdx}{\sqrt{xx+bb}}$, & les secteurs semblables donnent cette analogie FM ($\sqrt{xx+bb}$). FN ($a-\sqrt{xx+bb}$) : : mR $\left(\frac{bdx}{\sqrt{xx+bb}}\right)$. $NO=\frac{abdx-bdx\sqrt{xx+bb}}{xx+bb}$, & $FNO=NO\times\frac{1}{2}FN$ $=\frac{aabdx+bxxdx+b^3dx-2abdx\sqrt{xx+bb}}{2xx+2bb}$ (en supposant $b=\frac{1}{3}a$) $=\frac{9b^3dx+bxxdx+b^3dx-6bbdx\sqrt{xx+bb}}{2xx+2bb}$, l'intégrale des deux termes $\frac{bxxdx+b^3dx}{2xx+2bb}=\frac{1}{2}bx$ pour avoir celle du premier $\frac{9b^3dx}{2xx+bb}$, on décrira du centre F & du rayon $FN=\frac{3}{2}b$ le quart de cercle LNH, & $4FNO=$ à la quantité differentielle $\frac{9b^3dx}{2xx+bb}$. Car à cause des secteurs semblables FmR, FNO, on aura FM ($\sqrt{xx+bb}$). FN ($\frac{3}{2}b$) : : mR $\left(\frac{bdx}{\sqrt{xx+bb}}\right)$. $NO=\frac{3bbdx}{2xx+2bb}$, & le secteur $=NO\times\frac{1}{2}FN$ $=\frac{9b^3dx}{8xx+bb}$. Ainsi quelque portion que FN renferme de la Courbe, le quadruple du secteur de cercle qu'elle formera sera l'intégrale de $\frac{9b^3dx}{2xx+bb}$, celle du dernier terme $-\frac{6bbdx\sqrt{xx+bb}}{2xx+2bb}=\frac{6bbdx}{2\sqrt{xx+bb}}$ dépend de la quadrature d'une hyperbole équilatere FVZ dont F est le sommet, C le centre, $FC=b$ le demi-axe, & PF (x) l'appliquée; d'où l'on voit que la quadrature de cette Courbe dépend de celle du cercle & de l'hyperbole, & que l'espace $FNnF=$ $4FHN+\frac{1}{2}bx-\int\frac{6bbdx}{2\sqrt{xx+bb}}=FMP+4FNH-6CFV$; & si on fait $x=2b\sqrt{2}=AC$, & qu'on substituë cette valeur dans l'intégrale précédente, on aura l'espace

FNnBF (qui eſt le quart de celui que renferme la Courbe *FNBGFSIMF*) $= 4FHL + AC \times \frac{1}{2}FC - 6CFZ$.

EXEMPLE II.

FIG. III. Soit donnée pour génératrice une parabole *AMH*, dont *A* eſt le ſommet, *AB* l'axe, & dont l'équation $ax = yy$ (AP, x; PM, y). Si ayant pris un point fixe quelconque *F* ſur l'axe de la parabole, ou ſur cet axe prolongé par delà le ſommet *A* l'on fait courir par l'extrémité *A* d'une droite donnée *AB* toûjours placée ſur le point fixe *F* la portion de parabole *AMH*, l'autre extremité *B* de la ligne *AB* décrira pendant ce tems une autre Courbe *BNF*. Pour avoir l'équation qui en exprime la nature, ſoit imaginée la ligne *AB* en *MN*, & des points *M*, *N* ſoient abaiſſées les perpendiculaires *MP*, *NQ*, ſur l'axe *AB*, ayant nommé les données AB, b; AF, q; les inconnuës FQ, u; QN, s; $FN, z = \sqrt{uu + ss}$, *FP* ſera $= q \pm x$ ($AF \pm AP$), & par conſéquent $FM (r) = \sqrt{ax + qq \pm 2qx + xx}$, & l'équation générale $m - r = z$ ſe changera en $b - \sqrt{ax + qq \pm 2qx + xx} = \sqrt{uu + ss}$, qui eſt auſſi une équation générale pour trouver la Courbe engendrée par la parabole en quelque endroit de l'axe que le point *F* ſoit donné. Si l'on veut que $AF (q) = \frac{1}{4}a$, c'eſt-à-dire, que le point *F* ſoit le foyer de la parabole donnée, l'équation précédente deviendra en ſubſtituant pour *q* cette valeur $b - x - \frac{1}{4}a = \sqrt{uu + ss}$. Mais les triangles rectangles *PMF*, *FNQ* donneront cette analogie $FQ (u)$. $FN (b - x - \frac{1}{4}a) :: PF (\frac{1}{4}a - x)$. $FM (x + \frac{1}{4}a)$, d'où on tire $x = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}u + \sqrt{\frac{1}{4}au - \frac{1}{4}ab + \frac{1}{16}aa + \frac{1}{4}uu + \frac{1}{2}bu + \frac{1}{4}bb}$, laquelle ſubſtituée dans la derniere équation, on a enfin pour celle de la Courbe *BNTF* après les réductions ordinaires.

$$\begin{aligned} s^4 + abss = {} & au^3 - abuu + \tfrac{1}{4}aauu. \\ & - \tfrac{1}{4}aass \\ & - auss \\ & - bbss \\ & + uuss \end{aligned}$$

1°. Si dans la 1^e^ équation $b - x - \frac{1}{4}a = \sqrt{uu + ss} = z$ on fait $z (FN) = 0$, on aura $x = b - \frac{1}{4}a$, c'eſt-à-dire *AI* (*FD* étant priſe $= AB$) $= AB - AF$, mais $AI = AB$

$-BI$, d'où il est évident en comparant ces deux valeurs d'AI que $BI = AF$; & ainsi si du point D le plus éloigné du foyer que la ligne AB puisse toucher on abaisse une perpendiculaire DI à l'axe, le point I sera toûjours éloigné du point B où la Courbe va rencontrer son axe du quart du parametre.

2°. Si du centre F & du rayon FN on décrit un arc de de cercle qui coupe l'axe AB en L il sera toûjours coupé de maniere que $BL = AP$; car $BL = BF - FN = BF - AB + AF + AP$), en mettant pour FN sa valeur $AB - AF - AP$, & par conséquent $BL = AP$, puisque $BF + AF = AB$. C. Q. F. D.

3°. Si dans l'équation de la Courbe on fait $NQ\,(s) = 0$, on a $FQ\,(u) = 0$, & $FQ = FB\,(b - \frac{1}{4}a)$; & si on fait $u\,(QF) = 0$, on trouve $s\,(NQ) = 0$ & $s = b - \frac{1}{2}a\,(FT$, ce qui est visible par la génération de la Courbe.

4°. Si dans la même équation on fait $s\,(NQ)$ négative, elle ne reçoit pour cela aucun changement ; ce qui fait voir que la Courbe a une autre branche qui est semblable & égale à la premiere, puisqu'elle seroit engendrée par l'autre portion de la parabole semblable & égale à la donnée.

5°. Si on suppose la ligne donnée $AB =$ à l'axe de la parabole, c'est-à-dire, infinie, tous les termes où b n'a qu'une dimension, ou qui sont multipliez par a s'évanoüiront étant nuls par rapport aux autres, & l'équation se réduira à $s^4 - bbss + uuss = 0$, ou $bb = uu + ss$, qui est une équation au cercle dont le rayon est infini ; ainsi la ligne engendrée seroit alors droite, sa courbure étant infiniment petite.

6°. Si on veut que $AB\,(b) = a$, on aura en mettant pour b cette valeur

$$\begin{aligned} s^4 - \tfrac{1}{4}aass &= au^3 - \tfrac{3}{4}aauu. \\ - auss & \\ + uuss & \end{aligned}$$

7°. Si on differentie cette derniere équation, on trouvera $ds = \frac{3auudu - \frac{3}{2}aaudu - 2ssudu + assdu}{4s^3 - \frac{1}{2}aas - 2aus + 2uus}$; & substituant cette valeur de ds dans la formule générale des soûtangentes $\frac{sdu}{ds}$, on aura pour expression de la soûtangente de cette Courbe $\frac{8s^4 - 2ass - 4auss + 4uuss}{6auu - 3aau - 4ssu + ass}$

8°. Il est évident que cette Courbe coupe son axe au point B à angles droits, puisque la parabole coupe de même le sien au sommet A. Mais l'angle qu'elle fait avec lui au point F dépend de la grandeur de FI, lorsque $FI = DI$ (D est le point le plus éloigné que la donnée puisse toucher) l'angle est de 45 degrez, lorsqu'elle est moindre que DI l'angle est plus grand que 45 degrez, & enfin lorsqu'elle est $= 0$ l'angle est droit.

9°. Si dans l'équation differentielle $\frac{ds}{du} = \frac{3auu - \frac{3}{4}aau + ass - 2uss}{4s^3 - \frac{1}{2}aas - 2aus + 2uus}$ on fait $ds = 0$, on aura $3auu - \frac{3}{2}aau + ass - 2uss = 0$, ce qui donne $u = \frac{2ss}{3a}$, laquelle valeur d'u substituée dans l'équation donnera pour plus grande appliquée $\pm s$ (GK) $= a\sqrt{-\frac{9}{4} + \frac{3}{2}\sqrt{3}}$, & u (FK) $= \frac{2ss}{3a}$ alors $= -\frac{3}{2}a + a\sqrt{3}$. Et si on fait $ds = \infty$, on trouvera $4s^3 - \frac{1}{2}aas - 2aus + 2uus = 0$, ce qui donne s (NQ) $= 0$, laquelle substituée dans l'équation, on a $u = \frac{3}{4}a$ — (FB) pour la plus grande des abscisses.

10°. Pour avoir l'espace renfermé par cette Courbe, si on suppose mn infiniment près de MN, & que du centre F on décrive les arcs MV, nO, ils formeront les secteurs semblables FMV, FnO, & la somme des derniers est égale à l'espace renfermé par la Courbe. Pour l'avoir soient tirées mp parallele à MP & MR à AP, on aura $MV = Rm = \frac{adx}{2\sqrt{ax}}$. Car les triangles rectangles MRm, mVM, ont l'hypotheneuse Mm commune, & de plus les côtez MR, mV égaux, puisque mV difference de MF ($\frac{1}{4}a + x$) $= dx = Pp = MR$, ainsi les deux autres côtez Rm, MV seront aussi égaux. Mais les secteurs FMV, FnO donnent cette analogie. FM ($\frac{1}{4}a + x$). FN ($\frac{3}{4}a - x$) :: MV

$\left(\frac{adx}{2\sqrt{xx}}\right)$. $nO = \frac{3aadx - 4axdx}{\overline{a+4x} \times 2\sqrt{ax}}$, & $FnO = nO \times \frac{1}{2} FN$ $= \frac{9a^3dx - 24aaxdx + 16axxdx}{\overline{a+4x} \times 16\sqrt{ax}} =$ (en diviſant par $a+4x$) $\frac{axdx}{4\sqrt{ax}} - \frac{7aadx}{16\sqrt{ax}} + \frac{a^3dx}{\overline{a+4x}\sqrt{ax}}$ l'intégrale des deux premiers termes $= \frac{1}{6}x\sqrt{ax} - \frac{7}{8}a\sqrt{ax}$. Pour avoir celle du dernier on décrira du centre F & du rayon $Fs = AB$ (a) un arc de ce cercle $sYyX$, & le ſecteur $FYy = \frac{a^3dx}{\overline{a+4x}\sqrt{ax}}$; car à cauſe des ſecteurs ſemblables FnO, FYy, on a FN ($\frac{3}{4}a - x$). FY (a) :: nO $\left(\frac{3aadx - 4axdx}{\overline{a+4x} \times 2\sqrt{ax}}\right)$. $Yy = \frac{2aadx}{\overline{a+4x} \times \sqrt{ax}}$, & partant $FYy = Yy \times \frac{1}{2} FY = \frac{a^3dx}{\overline{a+4x}\sqrt{ax}}$; mais la ſomme des ſecteurs ſemblables FnO, FYy étant neceſſairement renfermée dans l'angle XFs formé par l'axe AB & la droite FD prolongée, & MN étant en FD, x (AP) devenant $= \frac{3}{4}a$ (AI) cette valeur ſubſtituée dans $\frac{1}{6}x - \frac{7}{8}a \sqrt{ax}$) l'eſpace borné par FB & la Courbe $FTGNB$ ſera $=$ au ſecteur $FsYyX - \frac{3}{8}AB^2\sqrt{3}$ ($\frac{3}{8}aa\sqrt{3}$); d'où on voit que la quadrature de cette Courbe dépend de celle du cercle. Mais l'eſpace $XFTGNBsYyX$ renfermé par le rayon FX, la Courbe $FTNB$, la droite Bs, & l'arc $sYyX$ eſt abſolument quarrable, & il eſt $= \frac{3}{8}AB^2\sqrt{3}$ ($\frac{3}{8}aa\sqrt{3}$) ; car il eſt $= XFsYyX - XFsYyX + \frac{3}{8}AB^2\sqrt{3}$ ($-$ l'eſpace borné par la Courbe) & par conſéquent $=$ $\frac{3}{8}AB^2\sqrt{3}$. *C. Q. F. D.*

EXEMPLE III.

Soit donnée la demi-Ellipſe AMB, & un point fixe quelconque F ſur ſon grand axe AB prolongée, ſi l'on veut ; ſi l'on fait parcourir par l'extrémité A de l'axe AB la demi-Ellipſe AMB dans le même tems, ſon autre extremité B décrira une Courbe FNH. Pour en avoir l'équation, ſi on nomme les données AB, $2b$; le petit axe $2c$; BF, q ; les inconnuës BP, x ; PM ; $y = \frac{c}{b}\sqrt{2bx - xx}$, FN : z ; FM, r ; FP ($BP \pm BF$) $x \pm q$, on aura FM (r) FIG. IV.

$= \frac{\sqrt{2bccx - ccxx + bbxx \pm 2bbqx + bbqq}}{b}$, & l'équation générale $m - r = z$ se changera $2b - \frac{\sqrt{2bccx - ccxx + bbxx \pm 2bbqx + bbqq}}{b} = z$, qui eſt une autre équation générale pour les Courbes engendrées par des Ellipſes, en quelque endroit de leur axe que le point F ſoit donné. Si l'on veut que BF $(q) = o$, le point F tombera en B, & elle ſe réduira à $2b - \frac{\sqrt{2bccx - ccxx + bbxx}}{b} = z$, & ſi on veut avoir la Courbe engendrée dans ce cas, ayant tiré BH perpendiculaire à AB : & de plus la ligne AB étant imaginée en NBM, ſi on abaiſſe les perpendiculaires NQ ſur BH, & MP ſur AB, & qu'on nomme BQ, u; QN, s; on aura $BN(z) = \sqrt{uu + ss}\ (\sqrt{BQ^2 + QN^2})$, & à cauſe des triangles ſemblables BNQ, BMP, $BP(x) . PM\left(\frac{c}{b}\sqrt{2bx - xx}\right) ::$ $NQ(s) . BQ(u)$, d'où l'on tire $x = \frac{2bccss}{bbuu + ccss}$, leſquelles valeurs d'$x$ & de z ſubſtituées dans l'équation précédente, on aura pour celle de la Courbe $\frac{2b^3uu + 2bccss}{\sqrt{uu + ss}} = bbuu + ccss + 2bccs$.

1°. Si on fait $BQ(u) = o$, on voit que $NQ(s) = o$; & ſi on fait $NQ(s) = o$, on a $BQ(u) = o$, & $= 2b = BH$.

2°. Si dans l'équation on fait $BQ(u)$ négative, elle n'en reçoit aucun changement dans les ſignes; d'où il eſt viſible que la Courbe a encore une autre branche rebrouſſante de B vers T, qui pourroit être engendrée par la demi-Ellipſe qui n'eſt point décrite.

3°. La Courbe HNB coupe ſon axe au point B à angles droits; mais au point H elle rencontre ſous un angle dont le ſinus eſt au ſinus de ſon complément à l'angle droit, comme le double du quarré du grand axe de l'Ellipſe, eſt au quarré du petit axe.

4°. Si on differentie l'équation de la Courbe, on a $ds = \frac{2b^3ssu - 2bccsu - 2bbu \times \overline{uu + ss}\sqrt{uu + ss} \times du}{2b^3uus - 2bccuus + 2ccs \pm 2bccxuu \pm ss\sqrt{uu \pm ss}}$; & mettant cette valeur dans $\frac{sdu}{ds}$, on a pour expression de la soûtangente $\frac{2b^3s^3u - 2bccs^3u - 2bbsu\times\overline{uu+ss}\sqrt{uu+ss}}{2b^3uus - 2bccuus + \overline{2ccs + 2bcc\times uu+ss}\sqrt{uu+ss}}$.

5°. Si l'on cherche la quadrature de cette Courbe, on trouvera qu'elle dépend de celle du cercle. Car si MN étant posée infiniment près en mn, on décrit du centre B les arcs mV, NO, & qu'on tire les paralleles mP à MP, mR à AB, on aura mR, dx; $RM\,(dy) = \frac{bcdx - cxdx}{b\sqrt{2bx-xx}}$, $MV = \frac{bccdx + bbxdx - ccxdx}{b\sqrt{2bccx + bbxx - ccxx}}$, & $mV = \sqrt{Mm^2 - MV^2}$ $= \frac{bcxdx}{\sqrt{2bx+xx}\times\sqrt{2bccx + bbxx - ccxx}}$. Mais les secteurs semblables BNO, BmV donnent cette analogie $BM\left(\frac{\sqrt{2bccx + bbxx - ccxx}}{b}\right)$. BN, $2b - \frac{\sqrt{2bccx + bbxx - ccxx}}{b} :: mV\left(\frac{cbxdx}{\sqrt{2bx-xx}\times\sqrt{2bccx + bbxx - ccxx}}\right)$, $NO = \frac{bcxdx\times 2bb - \sqrt{2bccx + bbxx - ccxx}}{\overline{2bccx + bbxx - ccxx}\times\sqrt{2bx-xx}}$, & partant $BNO = NO\times\frac{1}{2}BN = \frac{cxdx\times 4b^4 - 4bb\sqrt{2bccx + bbxx - ccxx} + 2bccx + bbxx - ccxx}{\overline{2bccx + bbxx - ccxx}\times 2\sqrt{2bx-xx}}$, les trois derniers termes ... $\frac{cdx\times\overline{2bccx + bbxx - ccxx}}{\overline{2bccx + bbxx - ccxx}\times\sqrt{2bx-xx}} = \frac{cxdx}{2\sqrt{2bx-xx}} = BmV$, dont la somme, lorsque $x = 2b = AB$ (& si l'on conçoit que ce soit le point B qui parcourre l'Ellipse, & que H décrive la Courbe) est la demi-Ellipse $BMAB$, le second $\frac{2b^4cxdx}{\overline{2bccx + bbxx - ccxx}\times\sqrt{2bx-xx}} =$ au secteur de cercle BKK décrit du centre B & du rayon $BH\,(2b)$; car les secteurs semblables BNO, BKK donnent $BN\left(\frac{2b - \sqrt{2bccx + bbxx - ccxx}}{b}\right)$ $BK\,(2b) :: NO\left(\frac{bcxdx\times 2bb - \sqrt{2bccx + bbxx - ccxx}}{\overline{2bccx + bbxx - ccxx}\times\sqrt{2bx-xx}}\right)$. $KK = \frac{2b^3cxdx}{\overline{2bccx + bbxx - ccxx}\times\sqrt{2bx-xx}}$, & partant le secteur $BKK = \frac{2b^4cxdx}{\overline{2bccx + bbxx}\times cc\,xx\times\sqrt{2bx-xx}}$, dont la somme, lorfque $x\ (BP) = 2b = AB$, est le quart de cercle $BHKKL$. Le dernier terme $\frac{-4bb\sqrt{2bccx + bbxx - ccxxx} \times cx\,dx}{2bccx + bbxx - ccxxx \times 2\sqrt{2bx - xx}}$ $= \frac{2bbcx\,dx}{\sqrt{2bccx + bbxx - ccxxx} \times \sqrt{2bx - xx}} = -mV \times AB$: de sorte que l'espace renfermé par la Courbe BNH, & la droite $BH = BMAB + BHKKL - \int mV \times AB$.

6°. Si dans l'équation $\frac{2b^3uu + 2bccss}{\sqrt{uu + ss}} = bbuu + bcss + 2bccs$ on fait $c = b$, & qu'on substituë cette valeur de c dans l'équation comme on changera l'Ellipse en cercle, aussi changera-t-on la Courbe BNF en celle qu'a donné M. Carré, & on aura pour son équation $2b \times \sqrt{uu + ss} = uu + ss + 2bs$, & quarrant chaque membre & transposant $s^4 + 4bs^3 + 2uuss + 4bsuu - 4bbuu + u^4 = 0$, qui est l'équation qui exprime la nature de la Cycloïde géometrique engendrée par deux cercles égaux dont le diametre $= 2b$. D'où il est aisé de voir que la Courbe BNH n'est point nouvelle comme on la crû, puisqu'elle est seulement un arc de celle-ci. Ce qui apprend une maniere bien simple de décrire cette portion de Cycloïde géometrique lorsqu'on en aura besoin.

EXEMPLE IV.

Soit donnée pour géneratrice l'hyperbole MAM, & le point C sommet de l'angle droit de ses asymptotes CH, CH le point fixe donné, & que la ligne donnée soit AB. Lorsqu'on aura fait parcourir à l'extremité A, AM, l'extremité B aura décrit BN, desquels points M & N si on abaisse les perpendiculaires MP, NQ sur CH prolongée (que l'on regarde ici comme l'axe de la Courbe donnée) on formera les triangles semblables PMC, CNQ; & nommant la donnée AB, b; les inconnuës CP, x; PM, $y = \frac{aa}{x}$ (l'équation de la Courbe étant $xy = aa$) CN, $z = \sqrt{uu + ss}$, CM, $r = \frac{\sqrt{x^4 + a^4}}{x}$, l'équation générale $m - r = z$ deviendra $b - \frac{\sqrt{x^4 + a^4}}{x} = \sqrt{uu + ss}$. Mais CP

$(x). PM\left(\frac{aa}{x}\right) :: CQ(u). QN(s)$, d'où on tire $xx = \frac{aau}{s}$ (d'où on peut remarquer que $s. u :: aa. xx$) ; & ſubſtituant cette valeur d'xx dans l'équation précédente, on aura celle de la courbe BMC qui ne contiendra que ſes abſciſſes & ſes appliquées $b - a\sqrt{\frac{uu+ss}{us}} = \sqrt{uu+ss}$.

1°. Si on fait $NQ(s) = o$, on a auſſi $CQ(u) = o$; & ſi on fait $CQ(u) = o$, on trouve de même $NQ(s) = o$.

2°. Il eſt évident que cette Courbe eſt diviſée en deux parties égales & ſemblables lorſque AB diviſe également l'angle des aſymptotes, & qu'alors CB eſt la plus grande des CN ; AC étant la moindre des CM.

3°. Si on veut que la ligne mobile donnée ſoit l'aſymptote, c'eſt-à-dire, ſi on fait $b\ (AB) = \infty$, on aura pour équation de la Courbe, effaçant les termes multipliez par a, $b = \sqrt{uu+ss}$ qui eſt une équation au cercle dont le rayon eſt infini, ou une ligne droite qui ſera l'aſymptote Ch de l'hyperbole oppoſée, puiſque HC paſſe neceſſairement par le point C.

4°. Il eſt évident que la Courbe $CNBmC$ coupe ſon axe PCQ au point C, de maniere que BNC fait avec lui un angle dont le ſinus eſt au ſinus de ſon complément à l'angle droit :: Hf (f eſt le dernier point que l'extremité A de la donnée AB puiſſe toucher) eſt à CH, & BmC fait un angle égal au complément à l'angle droit de celui que fait BNC.

5°. Il eſt clair que ſi on avoit donné de plus l'hyperbole mam oppoſée à la premiere, elle auroit engendré la Courbe $CnnC$ oppoſée auſſi à $CNBC$, & que ſi on eût donné encore les deux hyperboles LL, II conjuguées aux deux premieres, elles euſſent produit les Courbes $CIIC$, $CLLC$ conjuguées auſſi aux premieres. Il n'eſt pas moins clair que ſi les hyperboles oppoſées II, LL ſont égales aux hyperboles MAM, mam, qu'auſſi les differentes branches de Courbes ſeront égales ; mais lorſqu'elles ſeront plus grandes ou moindres, les rameaux $CLLC$, $CIIC$ ſeront plus grandes, ou moindres que $CNBO$, $CnnC$.

6°. Si on veut differentier l'équation on aura l'égalité $ds = \frac{asuudu - as^3du + 2suudu \times \sqrt{us}}{au^3 - auss - 2uss \times \sqrt{us}}$, & la formule des soûtangentes $\frac{sdu}{ds} = \frac{au^3 - auss - 2uss \times \sqrt{us}}{auu - ass + 2uu \times \sqrt{us}}$

7°. Pour avoir l'espace borné par cette Courbe, on regardera MN comme infiniment près d'AB; & ayant décrit du centre C les petits arcs AV, NO, & tiré les paralleles AP à MP & MR à CP, on aura $RM = dx$ $AR = -dy = \frac{aadx}{xx}$, $MV = \frac{x^4dx - a^4dx}{xx\sqrt{x^4 + a^4}}$, $AV = \sqrt{AM^2 - MV^2} = \frac{2aadx}{\sqrt{x^4 + a^4}}$, & les secteurs semblables CAV, CNO donnent $CM\left(\frac{\sqrt{x^4 + a^4}}{x}\right) . CN\left(b - \frac{\sqrt{x^4 + a^4}}{x}\right) :: AV\left(\frac{2aadx}{\sqrt{x^4 + a^4}}\right) . NO = \frac{2aabxdx}{x^4 + a^4} - \frac{2aadx}{\sqrt{x^4 + a^4}}$, & enfin $CNO = NO \times \frac{1}{2}CN = \frac{aadx}{x} + \frac{aabbxdx}{x^4 + a^4} - \frac{2aabdx}{\sqrt{x^4 + a^4}}$. D'où il est aisé de voir que la quadrature de cette Courbe dépend de celle du cercle & de l'hyperbole donnée; car $\frac{aadx}{x} =$ au secteur hyperbolique CAM, & $\frac{-2aabdx}{\sqrt{x^4 + a^4}} = -AV \times AB$, & $\frac{aabbxdx}{x^4 + a^4} =$ à un secteur du cercle CKk décrit du centre C & du rayon $CK = AB$ (b); car les secteurs semblables CAV, CKk donnent CV (CM) $\left(\frac{\sqrt{x^4 + a^4}}{x}\right) . CK\,(b) :: AV\left(\frac{2aadx}{\sqrt{x^4 + a^4}}\right) . Kk = \frac{2aabxdx}{x^4 + a^4}$, & partant $CKk = \frac{aabbxdx}{x^4 + a^4}$; mais CP (x) devenant $= CH$, ce qui arrive lorsque AB est en CS, la somme des secteurs CAV (CAM) & celles de leurs semblables CKk est necessairement renfermée dans l'angle ACS; d'où il est clair que l'espace renfermé par $CBNmC$ (moitié de celui que borne $CmBNmC$) est égal $KACSK + ACSA - \int AV \times AB$.

EXEMPLE V.

Soit donnée pour Courbe generatrice le premier tour d'une Spirale quelconque $ANMB$ dont l'équation soit

$c^m y^n = a^n x^m$ (*BQDPB*, c; *BQDP*, x; *AB*, a; *AM*, y).
Si l'on conçoit que l'extremité *B* du rayon *AB* du cercle generateur parcoure la Spirale *BMNA*, la ligne *AB* restant toûjours placée sur le centre *A*, l'autre extremité *A* du rayon décrira aussi pendant ce tems une Courbe. Pour en avoir l'équation, soit imaginée *AB* dans une position quelconque *MN*, & soient nommées les inconnuës *AM*, r; *aN*, z; l'équation generale $m - r = z$ se changera en $a - y = z$, puisque $r = y$; mais à cause de la Spirale donnée $y = \frac{ax^{\frac{m}{n}}}{c^{\frac{m}{n}}}$, laquelle valeur d'$y$ substituée dans l'équation, on aura $\frac{a - ax^{\frac{m}{n}}}{c^{\frac{m}{n}}} = z$; & mettant en la place de z, $a - y$, on aura $- a^n x^m = - c^m y^n =$, ou $a^n x^m = c^m y^n$, qui est l'équation de la Spirale donnée: d'où il est clair que toutes les Spirales quelque nombre pair ou impair que m & n expriment se reproduisent. Il arrive seulement qu'elles sont placées dans une situation opposée à la premiere.

Pour ne pas trop grossir ce Memoire, on se borne au petit nombre d'exemple que l'on vient de donner. Il suffit pour faire connoître la facilité avec laquelle on peut par cette methode trouver une infinité de Courbes. Ceux qui le jugeront à propos en pourront faire une plus ample application. On les avertit seulement qu'ils ne doivent point craindre que des Courbes dont les équations sont déja composées leur en donnent de plus composées, il arrive souvent que l'équation de la Courbe engendrée est plus simple que celle de la generatrice. Il suffit pour les en convaincre de leur faire remarquer que si on cherchoit la Courbe décrite par l'extremité *A*, de la ligne FIG. III.
AB posée sur le point fixe *F*, pendant que l'autre extremité *B* parcourt la Courbe *BNTF*, dont l'équation est du quatriéme degré, comme on la vû dans l'Exemple second, la Courbe décrite par le point *B* seroit un arc de parabole.

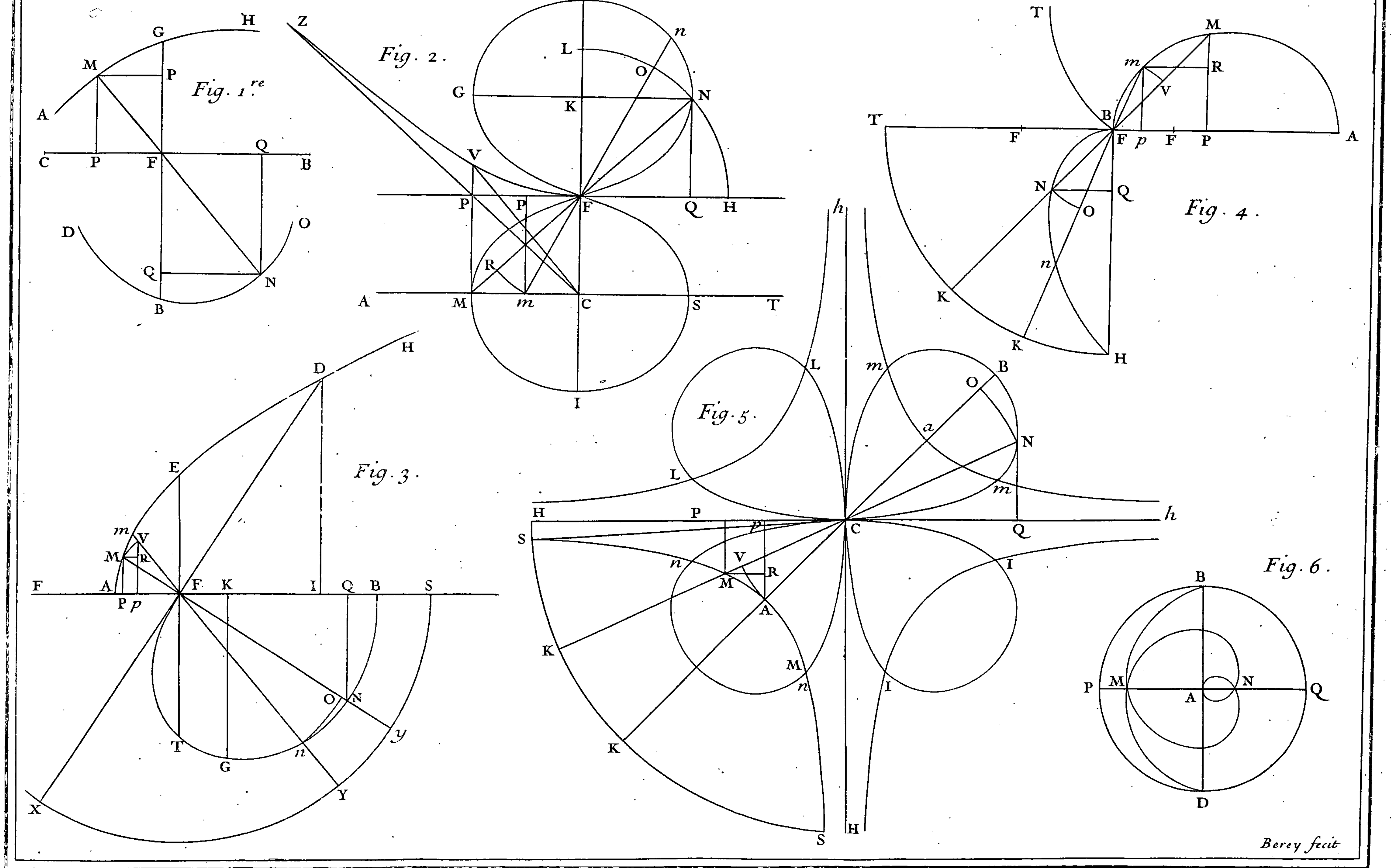
Fig. 1.re
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Berey fecit