vées trop incommodes dans l'éxécution, ou même impraticables, il a été obligé d'en chercher d'autres, qui ne rompissent point l'égalité, & cela lui a produit quelques Problêmes aussi difficiles à resoudre, que ceux qui avoient été son principal objet.

SUR UNE ESPECE IMPARFAITE DE DEVELOPEES.

* V. les M. p. 149. & 185. *p. 81. & 82.

L'Histoire de 1701.* a expliqué ce que c'est que les Développées & leurs Rayons. Delà il suit qu'une Courbe quelconque étant donnée, si du côté qu'elle est convexe on tire sur tous ses points des perpendiculaires, deux de ces perpendiculaires infiniment proches se couperont toûjours au-dedans de la Courbe à un point qui appartiendra à sa Développée, & en sera un côté infiniment petit, ou, ce qui revient au même, qu'elles seront deux Tangentes de la Développée infiniment proches, & enfin que toutes ces perpendiculaires formeront par leurs interfections tous les côtés infiniment petits de la Développée. On dit qu'elles en sont les *Rayons*, lors qu'on les prend depuis la premiere Courbe à laquelle ils sont perpendiculaires jusqu'à la Développée qu'ils touchent.

* p. 78. & 79.

Nous avons expliqué dans l'Histoire de 1704* ce qui détermine la differente longueur de ces Rayons, & à quoi elle a rapport.

Selon l'usage de la Geometrie d'aujourd'hui, M. de Reaumur a songé à étendre & à rendre plus général le Problême des Dévelopées. On n'avoit consideré que les perpendiculaires qui tomboient sur tous les points de la premiere Courbe du côté qu'elle est convexe, mais si de ce même côté il tomboit sur tous ses points d'autres lignes qui fissent avec elle un angle different du droit, & toûjous toûjours le même, qu'arriveroit-il ?

Il est clair d'abord qu'il arriveroit tout ce qui arrive dans le cas des perpendiculaires, & vient non de ce qu'elles sont perpendiculaires, mais de ce qu'elles font toutes le même angle. Ces lignes obliques se couperoient toutes au-dedans de la Courbe, & formeroient par leurs intersections les costés infiniment petits d'une Courbe nouvelle, dont elles seroient toutes autant de Tangentes. Cette Courbe seroit donc une espece de Dévelopée, qui auroit ses Rayons. Je la nomme *imparfaite*, parce que les Rayons de la vraye Dévelopée étant ses Tangentes, & en même temps perpendiculaires à la premiere Courbe, les rayons de celle-ci n'auroient que la proprieté d'être ses Tangentes, & ne pourroient par la supposition avoir l'autre proprieté. M. de Reaumur cherche comme l'on a fait pour la vraye Dévelopée, 1°, quelle seroit la longueur du Rayon de la Dévelopée imparfaite correspondant à un point quelconque de la premiere Courbe, ou, ce qui est la même chose, le point d'interfection de deux Obliques infiniment proches, 2°, quelle seroit en général la nature de la Dévelopée imparfaite. Il suppose le Rayon de la Dévelopée connu par les Methodes de M. de l'Hopital, ou de M. Varignon *.

* V. l'Hist. de 1701. p. 81. & suiv. & celle de 1706. p. 90. & suiv.

La longueur du Rayon de la Dévelopée étant donc connuë pour un point quelconque de la premiere Courbe, si l'on suppose que du côté qu'elle est convexe il tombe sur ce même point deux lignes obliques infiniment proches, qui fassent avec la Courbe un angle infiniment aigu, elles en seront Tangentes toutes deux, ne se couperont qu'au seul point d'attouchement, & n'entreront point dans la Courbe; par consequent le Rayon de la Dévelopée imparfaite sera alors nul, tandis que celui de la vraye sera une grandeur finie, d'où il suit que depuis la ligne qui tombe sur la Courbe sous un angle droit jusqu'à celle qui y tombe sous un angle infiniment aigu, le Rayon de la Dévelopée prise en général varie depuis une certaine grandeur déterminée jusqu'à Zero, ou, ce qui est le même, que pour un point quelconque de la Courbe tout Rayon de la Dévelopée imparfaite est plus petit que celui de la vraye Dévelopée, & d'autant plus petit que la ligne oblique qui est tombée sur la Courbe a été plus oblique. Reste à déterminer la proportion de cette diminution.

Elle est la même que si on comparoit un choc oblique à un choc perpendiculaire d'une même Force. Par les regles de la Mechani que l'impression du choc perpendiculaire seroit à celle du choc oblique, comme le sinus de l'angle droit, ou sinus total, au sinus de l'angle de l'obliquité. C'est cette proportion que M. de Reaumur trouve entre le Rayon de la Dévelopée & celui de la Dévelopée imparfaite, mais il la trouve par une autre voye purement geometrique, & c'eût été un défaut dans sa démonstration que d'y employer, quand même il l'auroit pû, une idée de Mechanique, plus composée que le sujet dont il s'agit. Aussi ne nous en sommes-nous servis que comme d'une espece d'exemple, qui rendoit la chose plus sensible. De ce que les lignes obliques tombent toûjours sous le même angle sur les differents points de la Courbe, il suit que la raison du sinus total au sinus de cet angle est constante, & que par conséquent celle du Rayon de la Dévelopée au Rayon de la Dévelopée imparfaite l'est aussi; & comme le Rayon de la Dévelopée varie à chaque point d'une Courbe, à moins qu'elle ne soit un Cercle, il faut que le Rayon de la Dévelopée imparfaite varie aussi de la même maniere, devienne ou plus grand ou plus petit, & même nul ou infini, si l'autre le devient; & quand ils sont tous deux ou nuls ou infinis, ils conservent encore entre eux la proportion des Sinus.

Puisque le Rayon de la Dévelopée est toûjours plus grand que celui de la Dévelopée imparfaite, il est necessaire que l'espace compris entre la Courbe & sa Dévelopée soit aussi plus grand que celui qui est compris entre la même Courbe, & sa Dévelopée imparfaite, & il se trouve par une espece de bonheur que le rapport de ces espaces est le même que celui des quarrès des Sinus, qui representoient le rapport des Rayons.

Cette Theorie de M. de Reaumur pourroit en quelque ſorte appartenir à la Dioptrique, & y ajoûter de nouvelles vûës. Nous avons dit dans l'Hiſt. de 1703 * ce que c'eſt que les *Cauſtiques par refraction.* On ne les a encore conſiderées que comme formées par des rayons qui étant partis d'un ſeul point lumineux tomboient ſur une ſurface courbe ſous differens angles, aprés quoi ils ſe rompoient. Si l'on conſideroit les rayons qui étant partis de differents points lumineux tombent ſur la ſurface courbe ſous le même angle, ce ſeroient d'autre Cauſtiques par refraction. Que cet angle commun à differents rayons ſoit le droit, il eſt viſible que la Cauſtique ſera la même courbe que la Dévelopée; pour tout autre angle, ce ſera quelqu'une des Dévelopées imparfaites de M. de Reaumur.

* p. 69. & ſuiv.

La détermination de la nature des Dévelopées imparfaites, ou leur Equation generale dépendante de la premiere Courbe ſur laquelle tombent les lignes obliques, eſt un pur calcul algebrique où nous n'entrerons point. M. de Reaumur applique ſa Theorie à deux exemples, en prenant la premiere Courbe, 1° pour un Cercle, 2° pour une Logarithmique Spirale.

Si c'eſt un Cercle, il n'a pour rayon de ſa Dévelopée que ſon propre rayon toûjours conſtant, & par conſequent celui de ſa Dévelopée imparfaite l'eſt auſſi, d'où il ſuit auſſitôt que cette Dévelopée imparfaite eſt auſſi un Cercle, mais moindre que le premier. On ſait que la Dévelopée d'un Cercle n'eſt que ſon centre même.

Si c'eſt une Logarithmique Spirale, comme ſa Dévelopée n'eſt qu'elle-même dans une poſition differente, ſa Dévelopée imparfaite ſera auſſi une Logarithmique Spirale, la même que la propoſée dans un cas, differente dans tous les autres. L'eſſence de cette Courbe conſiſte en ce que ſes Ordonnées font toûjours le même angle avec elle, & une Logarithmique Spirale eſt differente d'une autre, quand cet angle, conſtant pour chacune, eſt different. Si l'angle ſous lequel les lignes obliques rencontrent la Logarithmique Spirale eſt le même que celui que les

Ordonnées de cette Courbe font avec elle, elle se reproduit elle-même dans sa Dévelopée imparfaite, aussi-bien que dans la vraye; s'il est different, elle produit une autre Logarithmique Spirale. Feu M. Bernoulli eut encore plus de raison qu'il ne pensoit de faire graver cette Courbe sur son Tombeau*, car il ignoroit apparemment cette derniere maniere dont elle se reproduit, dûë à M. de Reaumur.

* V. l'Hist. de 1705. p. 145. & 148.

Dans le goût que l'on a presentement pour les Theories générales, on ne pouvoit s'empêcher de desirer que celle des Dévelopées imparfaites comprît aussi les vrayes, qui n'en sont proprement qu'un cas particulier. Aussi sur ce que l'Academie parut souhaiter la reünion de ces deux Theories, M. de Reaumur y travailla, & en vint à bout. Il a donc trouvé une Formule générale, que M. Varignon trouva aussi, pour les Rayons des Dévelopées quelconques, c'est à dire quel que soit l'angle constant sous lequel des lignes droites rencontrent une Courbe. Si cet angle est droit, la Formule se change aussitôt en celle, ou plûtôt en toutes celles qu'a données M. Varignon pour les Rayons des Dévelopées*. Ces Formules si générales sont des amas d'Infinis roulés, pour ainsi dire, les uns dans les autres, & qui se dévelopent successivement par les applications particulieres.

* V. l'Hist. de 1701. p. 81. & 82. & celle de 1706. p. 91. & suiv.

SUR LES COURBES
DE LA PLUS VISTE DESCENTE.

V. les M. p. 26. & 257.

M. Bernoulli, maintenant Professeur en Mathematique à Basle, demanda en 1696 à tous les Geometres de l'Europe, Quelle étoit la ligne que devoit décrire un Corps pesant pour aller, en tombant obliquement à l'Horison, d'un point donné à un autre aussi donné, le plus viste qu'il fût possible?

Si ces deux points avoient été dans une ligne verticale, il est évident que cette même ligne droite, la plus courte de toutes celles qui pouvoient être comprises entre eux, auroit été celle qu'on demandoit, mais comme on les prenoit dans une ligne oblique à l'Horison, la ligne droite comprise entre eux, quoique la plus courte de toutes, n'étoit point celle qui devoit être parcouruë en moins de temps. Voici la raison de ce Paradoxe, qui pourroit surprendre d'abord.

Quand un Corps tombe par une ligne droite, soit perpendiculaire, soit oblique à l'Horison, les augmentations de sa vitesse dans chaque temps égal sont toûjours égales, de sorte qu'à la moitié du temps total de sa chute, par ex. il a la moitié de la vitesse qu'il doit avoir à la fin. S'il pouvoit avoir acquis plûtôt cette moitié de sa vitesse finale, il est visible que ce qui lui resteroit d'espace à parcourir, seroit parcouru plus viste, ou en moins de temps, & par consequent aussi l'espace total, & en un mot, l'espace total sera parcouru d'autant plus viste que le Corps aura acquis plûtôt une plus grande partie de sa vitesse finale, qui sera toûjours la même. Il faudroit donc pour cela que le partage de cette vitesse entre differents temps égaux de la chute, fût inégal; or il ne peut l'être quand la chute se fait par une ligne droite, mais seulement quand elle se fait par une Courbe. Il est bien vrai que cette Courbe sera un plus grand espace à parcourir que la droite, mais ce qu'il faudroit de temps de plus pourra être non seulement recompensé, mais encore surpassé par une plus prompte acquisition de vitesse.

Cette Courbe aura pour Axe une ligne horisontale tirée par le point d'où le Corps commence à tomber, & pour derniere & plus grande Ordonnée une ligne verticale tirée du point le plus bas de la chute sur cette horisontale. Toutes les autres Ordonnées seront paralleles à celle-cy, & quand la Courbe sera trouvée & decrite, chacune déterminera la hauteur verticale d'où le Corps sera tombé à chaque instant, & par consequent la racine de chacune exprimera, comme l'on sait, la vitesse que le

Corps aura à cet instant, & avec laquelle il parcourra l'arc infiniment petit, où il se trouvera. Les racines des differences infiniment petites des Ordonnées representeront donc necessairement les augmentations de la vitesse à chaque instant.

On voit déja par ce qui a été dit que vers le commencement de la chute les augmentations que la vitesse prend à chaque instant, doivent être plus grandes que vers la fin, c'est-à-dire, que l'Axe de la Courbe étant conçû divisé en parties infiniment petites égales, qui representeront les instants, les differences des Ordonnées seront plus grandes vers l'origine de la Courbe, & iront en diminuant de cette extrémité vers l'autre. Delà il suit necessairement que vers l'origine de la Courbe ses côtés infiniment petits auront une direction plus approchante de la verticale, & iront toûjours vers l'autre extrémité en devenant plus horisontaux, & cela fait encore que ces mêmes côtés infiniment petits seront plus grands vers l'origine de la Courbe, & iront vers l'autre extrémité en diminuant. Cette premiere ébauche de la Courbe est déja telle que le Problême la demande, car au commencement de la chute où le Corps a de lui-même une moindre vitesse, il est plus aidé par la direction plus verticale de la Courbe, qui en même temps lui fait décrire de plus grands arcs, & le fait tomber de plus haut, de sorte que non-seulement il fait plus de chemin, mais il acquiert encore plus de vitesse pour celui qui lui reste à faire; & vers la fin de sa chute où il n'a plus tant de besoin d'être aidé par la direction de la Courbe, parce que sa vitesse est plus grande, & où il ne l'est plus tant en effet, il a encore l'avantage de n'avoir plus que de plus petits arcs à décrire. Voilà tout ce qu'on peut desirer pour accourcir la durée de sa chute.

Tout cela ensemble se réduit à ce seul point, que les côtés ou arcs infiniment petits de la Courbe soient plus grands, lorsque la vitesse du Corps sera par elle-même plus petite, & reciproquement, & rien ne peut être plus avantageux que quand la grandeur des uns suivra précisément la même raison que la petitesse de l'autre. Donc puisque la vitesse du Corps à chaque instant s'exprime par la racine de l'Ordonnée correspondante, la Courbe doit être telle que les arcs infiniment petits soient plus grands en même raison que les racines des Ordonnées correspondantes seront plus petites, & reciproquement. Or on trouve bien-tôt par le calcul que la Courbe à laquelle appartient cette proprieté, est la Cycloïde. Le diametre de son Cercle générateur sera la ligne qui mesure l'étenduë verticale de la chute du Corps, par consequent la Courbe de la plus viste descente sera une demi-Cycloïde qui aura pour origine & pour sommet les deux points extrêmes de cette chute. Ce Problême est celui pour lequel, ainsi que nous l'avons dit dans l'Hist. de 1704,* *l'Angleterre, l'Allemagne, la Suisse & la France fournirent chacune un Geometre.* * p. 128.

Feu M. Bernoulli frere de celui qui l'avoit proposé, en proposa un second, qui en étoit comme une suite, & n'avoit pas moins de difficulté. Il ne supposoit plus deux points déterminés entre lesquels se fît la chute, mais seulement un point qui en fût toûjours l'origine, & une ligne verticale où elle se devoit terminer à un point quelconque. De toutes les Cycloïdes qui pouvoient avoir leur origine à celle de la chute, & aller ensuite rencontrer la ligne verticale, il demandoit quelle étoit celle qui devoit être parcouruë en moins de temps?

Les deux illustres freres qui ont resolu ce Problême en ont caché l'Analise. M. Saurin a crû qu'elle meritoit bien d'être donnée au Public, avec une Solution nouvelle, & fort simple qu'il a trouvée.

Pour en prendre quelque idée sans Geometrie & sans calcul, il faut se representer le nombre infini de Cycloïdes, qui ayant leur origine commune au point déterminé peuvent rencontrer la verticale déterminée. La premiere de toutes celles qui la rencontrent est une Cycloïde entiere qui la touche, & ne passe point au-delà, de ſorte que dans l'eſpace déterminée elle a une moitié qui deſcend, & une autre moitié qui remonte également haut. Enſuite viennent d'autres Cycloïdes, qui paſſent toutes au-delà de la verticale, & y paſſent par une plus grande partie de leur moitié qui remonte, ſelon qu'elles ſont plus éloignées de la premiere Cycloïde. Il en vient donc une qui paſſe au-delà de la verticale par ſa moitié entieré qui remonte, & par conſequent elle rencontre à ſon ſommet la verticale, & la coupe à angles droits, aprés quoi toutes les autres ont au-delà de la verticale une partie de leur moitié deſcendante, & une partie toûjours plus grande, juſqu'à ce qu'enfin la derniere Cycloïde infiniment plus grande que la premiere ſoit toute entiere au-delà de la verticale, à cela prés qu'elle a en deçà ſon premier arc infiniment petit par rapport au reſte de la Courbe, & cet arc infiniment petit eſt cependant une ligne droite infinie, parallele, & égale à la verticale tirée à l'infini.

Tous les arcs Cycloïdaux compris entre l'origine de la chute & la verticale, au nombre deſquels il faut mettre la Cycloïde entiere, premier terme de toute cette *ſerie* ou ſuite, ſont les eſpaces que le corps aura à parcourir. Les verticales tirées juſqu'au ſommet de chaque Cycloïde ſont les plus grandes hauteurs d'où le Corps ſera tombé, & par conſequent leurs racines repreſenteront les plus grandes viteſſes acquiſes par le Corps. On cherche l'arc Cycloïdal parcouru en moins de temps.

Toute Cycloïde étant égale à 4 fois le diametre de ſon Cercle générateur, les Cycloïdes ſont entre-elles comme les diametres ou comme les circonferences de leurs Cercles, ou enfin comme leurs propres baſes, puiſque ces baſes ſont égales aux circonferences des Cercles générateurs. Il eſt évident que la Cycloïde qui coupe la verticale à angles droits, & qui a une de ſes moitiés en deçà, & l'autre au-delà, a une baſe double de celle de la premiere Cycloïde, qui eſt toute entiere en deça de la verticale. Donc cette Cycloïde entiere eſt égale à la moitié

moitié de l'autre. Donc ces deux espaces à parcourir sont égaux. D'un autre côté, le Corps qui parcourroit la Cycloïde entiere perdroit pendant la seconde moitié de la durée de son mouvement toute la vitesse qu'il auroit acquise pendant la premiere moitié, & s'il parcourt la demi-Cycloïde qui rencontre la verticale à angles droits, il ne perdra rien de sa vitesse acquise, & au contraire il en acquerra jusqu'au dernier instant. De plus il suit de la position de la Cycloïde entiere & de la demi-Cycloïde, que le Corps qui a parcouru la demi-Cycloïde est toûjours tombé dans tous les instants d'une plus grande hauteur que celui qui a parcouru la Cycloïde entiere, lors même qu'il tomboit, & par conséquent lors même qu'ils acqueroient tous deux de la vitesse l'un en acqueroit plus que l'autre. Ainsi les deux espaces étant égaux, & la vitesse de celui qui parcourt la demi-Cycloïde étant toûjours plus grande & de plus s'augmentant toûjours, quand l'autre n'en acquiert plus, le temps qu'il employe à sa chute doit être plus court. Et comme les arcs Cycloïdaux compris entre la Cycloïde entiere, & la demi-Cycloïde, participent tous aux défectuosités de la Cycloïde entiere, & y participent d'autant moins qu'ils sont plus éloignés d'elle, il s'ensuit que le temps employé à la parcourir sera plus long, & qu'ensuite il ira toûjours en diminuant jusqu'à la demi-Cycloïde, qui sera donc l'arc de la plus viste descente par rapport à tous les arcs précedents.

Reste à le comparet aux arcs suivants. Le dernier de ceux-là est comme nous l'avons dit, une ligne droite infinie, qui ne peut être parcouruë qu'en un temps infini. Le temps va donc en croissant vers la fin de la Serie des arcs Cycloïdaux, au lieu qu'il a été en diminuant au commencement de cette Serie jusqu'à la demi-Cycloïde, & si la demi-Cycloïde est précisément le terme où le temps commence à croistre, elle est sûrement l'arc de la plus viste descente pour la Serie entiere.

On peut remarquer que dans ces sortes de questions, où il s'agit de *plus Grands*, ou *plus Petits*, les Grandeurs qui en ont le caractere, ont aussi quelque proprieté geometrique qui n'apartient qu'à elles, & les rend en quelque sorte reconnoissables. Ainsi la plus grande Ordonnée du demi-Cercle & de la demi-Ellipse est celle dont la Tangente est paralelle à l'axe. Ici la demi-Cycloïde est le seul arc Cycloïdal qui coupe la verticale à angles droits. La premiere Cycloïde la touche, la derniere fait avec elle un angle aigu infiniment petit. Ces deux Termes extrêmes & celui du milieu étant posés, il est aisé d'imaginer les variations moyennes. La demi-Cycloïde est aussi la seule qui rencontre à son sommet la ligne verticale. Elle a donc, pour ainsi dire, beaucoup de présomptions geometriques qui lui sont favorables, & en effet c'est elle que le calcul détermine pour l'arc de la plus viste descente.

Feu M. Bernoulli, premier Inventeur de ce Problême, voulut encherir sur la difficulté de M. son frere, qui avoit encheri sur la sienne. Ce n'étoit plus une ligne verticale où se devoit terminer la chute, mais une ligne faisant avec l'Horisontale un angle aigu quelconque.

Il est essentiel pour la solution de remarquer de quel côté l'ouverture de cet angle aigu est tournée, si c'est du côté de l'origine de la chute, ou du côté opposé. Dans le premier cas, la ligne où le Corps doit arriver, & que j'appellerai *terminante*, va pour ainsi dire, au devant de lui, aussi trouve-t-on que l'arc Cycloïdal de la plus viste Descente est moindre qu'une demi-Cycloïde, au lieu qu'il en étoit une dans le cas de la verticale. Dans le second cas proposé, la terminante fuit le Corps, & l'arc Cycloïdal est plus d'une demi-Cycloïde. Il est vrai qu'alors il faut necessairement que le Corps pendant une partie de son mouvement remonte, & perde de sa vitesse acquise, mais en récompense l'arc Cycloïdal est fort petit.

Et pour donner de tout ceci une idée plus dévelopée, supposons que la ligne terminante ait sur l'horisontale tirée par l'origine de la chute une origine fixe, à un pié, par ex. de l'origine de la chute ; imaginons ensuite que la terminante ait l'ouverture de son angle aigu du côté opposé à cette origine, & qu'elle fasse d'abord cet angle infiniment aigu, c'est à dire qu'elle soit horisontale, & se confonde depuis son origine avec celle qui est toûjours & invariablement horisontale. Quel sera alors l'arc Cycloïdal que le Corps pourra décrire en moins de temps pour arriver jusqu'à elle ? Il est visible qu'il ne pourra y arriver plutôt que n'allant que jusqu'à son origine, & que pour y aller en décrivant un arc Cycloïdal il faudra qu'il remonte à la même hauteur d'où il sera descendu, puisque la terminante est horisontale, & par consequent il décrira une Cicloïde entiere dont la base sera une étenduë horisontale d'un pié. Si l'on imagine que la terminante se meuve circulairement sur le point de son origine pris pour centre, & que d'horisontale qu'elle étoit elle devienne verticale, nous avons vû que l'arc Cycloïdal de la plus viste Descente sera une demi-Cycloïde, & il est clair que cette demi-Cycloïde aura un pié pour base, & que par consequent la Cycloïde dont elle est la moitié en a deux. Delà il suit 1°. que dans tout le chemin que la terminante a fait pour devenir d'horisontale verticale, c'est à dire tant qu'elle a été oblique, & que son angle aigu a regardé le côté opposé à l'origine de la chute, les arcs Cycloïdaux de la plus viste Descente ont été moins que des Cycloïdes entieres, & plus que des demi-Cycloïdes, 2°. que les Cycloïdes dont ils ont été portions, ont été toûjours plus grandes, 3°. qu'ils ont été des portions d'autant plus petites de Cycloïdes, & en même temps des portions de Cycloïdes d'autant plus grandes que l'angle aigu de la terminante a été plus grand, 4°. que l'arc de la plus viste Descente rencontre toûjours la terminante à un point plus bas. Les deux positions *extrêmes* de la terminante ayant produit les effets que nous avions déterminés, les effets des positions *moyennes* n'ont pû être que ceux que nous venons de representer, car la nature des deux extrémités regle les variations qui se font entre deux.

De ce principe naist encore une consequence, mais par la raison des contraires. Une Cycloïde est perpendiculaire à sa base, donc dans la position horisontale de la terminante l'arc de la plus viste Descente lui étoit perpendiculaire, puisque c'étoit une Cycloïde entiere. Quand la terminante est verticale l'arc de la plus viste Descente qui est une demi-Cycloïde lui est encore perpendiculaire ; donc cet effet étant le même dans les deux positions extrêmes de la terminante, qui ont fait varier tout le reste, il n'y a point de variation à cet égard dans les positions moyennes, & quelque angle que fasse la terminante, l'arc de la plus viste Descente lui est toûjours perpendiculaire.

Maintenant si l'on veut que la terminante acheve un mouvement demi-circulaire, & que de verticale qu'elle étoit elle redevienne horisontale, & que par consequent dans tout ce mouvement elle tourne son angle aigu du côté de l'origine de la chute, il n'y a qu'à considerer ce qui arrivera quand elle sera redevenuë horisontale. Elle fera un angle infiniment aigu avec la ligne horisontale invariable & immobile, & par consequent l'arc Cycloïdal que le Corps doit parcourir dans le moindre temps pour aller de l'origine de la chute jusqu'à la terminante qui en est infiniment proche, ne peut être qu'infiniment petit, & il sera necessairement perpendiculaire à la terminante. Non-seulement cet arc Cycloïdal est infiniment petit, mais la Cycloïde dont il est portion peut être supposée aussi petite qu'on voudra, pourvû seulement qu'elle soit finie, car rien n'en détermine la grandeur. Nous avons déja vû quelle est l'autre position extrême de la terminante, & quels en sont les effets. Donc dans tout le chemin qu'elle fait pour devenir de verticale horisontale, & ayant son angle aigu du côté de l'origine de la chute, 1°. les arcs Cycloïdaux de la plus viste Descente sont moindres que des demi-Cycloïdes, 2°. ils sont des portions de Cycloïdes toûjours plus petites, 3°. ils ſont des portions d'autant plus petites de Cycloïdes, & en même temps des portions de Cycloïdes d'autant plus petites que l'angle de la terminale eſt plus petit, 4°. l'arc de la plus viſte Deſcente rencontre toûjours la terminante à un point plus haut, 5°. il lui eſt toûjours perpendiculaire.

Ainſi l'arc Cycloïdal perpendiculaire à la terminante eſt toujours parcouru en moins de temps que tous les autres arcs en nombre infini qui la rencontrent, & c'eſt-là la Solution geometrique du Problême.

En rejoignant enſemble les deux cas de l'angle aigu de la terminante, on trouve que l'arc de la plus viſte Deſcente ne la rencontre jamais en un point plus bas que quand elle eſt verticale, que dans une moitié de ſes poſitions le Corps acquiert toûjours une nouvelle viteſſe, & que dans l'autre moitié il perd une partie de ſa viteſſe acquiſe, quoiqu'il faſſe ſon chemin dans le moindre temps poſſible, &c.

L'idée que nous avons ſuivie nous fournit un moyen tres-facile de comparer les Temps en général. Chaque temps pendant lequel eſt parcouru un arc de plus viſte Deſcente pour une certaine poſition déterminée de la terminante, eſt le plus court qu'il ſe puiſſe; mais il s'agit de comparer les Temps de plus viſtes Deſcentes correſpondants à differentes poſitions de la terminante. Quand elle fait avec l'horiſontale immobile un angle infiniment aigu du côté de l'origine de la chute, le temps ne peut être qu'infiniment petit, cela eſt clair par ce qui a été dit ſur ce cas-là. Donc depuis cette poſition de la terminante juſqu'à ce qu'elle devienne verticale, auquel cas certainement le temps eſt fini, les Temps des plus viſtes Deſcentes n'ont pû aller qu'en croiſſant toûjours. Lorſque la terminante eſt verticale, la demi-Cycloïde qui s'y termine eſt parcouruë en moins de temps que tous les autres arcs Cycloïdaux qui s'y terminent auſſi, & dans ce nombre eſt compriſe une Cycloïde entiere qui va de l'origine de la chute à celle de la terminante,

& qui a une base d'un pié selon la supposition qui a été faite. Or cette Cycloïde entiere est la même qui sera l'arc de la plus viste Descente lorsque la terminante de verticale qu'elle étoit sera redevenuë horisontale. Donc tant qu'elle fera ce chemin les Temps des plus vistes Descentes continuëront de croistre comme ils faisoient auparavant. Delà il suit que le temps de la plus viste Descente, lorsque la terminante est verticale, est moyen entre tous les autres, &c.

Comme les Geometres modernes sont difficiles à contenter en fait de difficultés, M. Bernoulli augmenta encore celle de son Problême, en ne supposant plus pour Courbes des plus vistes Descentes des Cycloïdes, ausquelles cependant apartient particulierement cette proprieté, mais seulement des Courbes semblables en général, qui seront ensuite tout ce qu'on voudra, Cercles, Cycloïdes, Paraboles, &c. Les deux freres résolurent encore ce Problême élevé à une si grande universalité, mais en cachant leur secret, que M. Saurin découvre presentement. Il suppose que ces Courbes soient non seulement de la même espece, mais encore semblables, c'est à dire que comme elles auront une origine commune, il faut qu'une corde tirée de ce point détermine dans ces Courbes des parties pareilles, des moitiés, des tiers, &c.

Les deux freres, & M. Saurin aprés eux ont encore ajoûté une difficulté nouvelle au Problême, ils ont supposé que la terminante ne fût plus une ligne droite, mais une Courbe geometrique. Nous n'entrons point dans toutes ces Theories, il faut laisser à un petit nombre de Geometres le plaisir tout entier des embarras de leur art.

Nous finirons seulement par une ébauche du Problême entierement réduit à des lignes droites, & par-là entierement changé. La ligne de la plus viste Descente doit, aussi-bien que la terminante, être une ligne droite. Supposons d'abord que la terminante soit verticale, & que l'horifontale fixe & immobile foit d'un pié. Toutes les lignes poffibles de defcente pour arriver à la verticale feront les hipotenufes d'un triangle rectangle, qui aura toûjours pour l'un de fes deux autres côtés une horifontale d'un pié, & pour l'autre une verticale indeterminée. Ces hipotenufes feront les efpaces que le Corps parcourra, & les differentes portions de la terminante verticale reprefenteront par leurs racines les viteffes des differentes chutes. La plus vifte Defcente eft celle où l'efpace eft le plus petit qu'il foit poffible, & la viteffe la plus grande. Il faut donc trouver dans les differents triangles celui dont l'hipotenufe eft la plus petite qu'il fe puiffe par rapport au côté vertical. Or toute hypotenufe étant une grandeur compofée de deux côtés qui comprennent l'angle droit, la queftion fe réduit à ceci. Une grandeur qui doit faire une des deux parties d'un Tout étant déterminée, trouver l'autre partie telle qu'elle foit la plus grande qu'il fe puiffe par rapport au Tout, & on trouvera par un calcul d'une ligne que la partie indéterminée & inconnuë doit être égale à la déterminée. Il faut donc que le côté vertical du triangle foit d'un pié auffi-bien que l'horifontal, & l'hipotenufe fera la ligne de la plus vifte defcente. La proprieté geometrique qui diftingue cette hipotenufe de toutes les autres, c'eft d'être l'hipotenufe d'un triangle rectangle ifofcele.

Maintenant fi l'on conçoit que la terminante tournant circulairement fur fon origine comme fur un centre s'approche infiniment prés de l'horifontale immobile, la ligne de la plus vifte Defcente fera infiniment petite, & perpendiculaire à la terminante, & la portion de la terminante déterminée par cette ligne de la plus vifte Defcente fera encore égale à l'horifontale immobile d'un pié. Donc dans ces deux cas extrêmes cette portion de la terminante & l'horifontale d'un pié étant égales, il y a beaucoup d'apparence qu'elles le font auffi dans tous les cas moyens, c'eft-à-dire, tant que l'angle aigu de la terminante eft tourné du côté de l'origine des chutes,

& la ligne de la plus viste Descente sera toûjours la base d'un triangle isoscele. Si l'angle aigu de la terminante étoit de 60 degrés, ce triangle isoscele seroit de plus équilateral.

Si l'angle aigu de la terminante est tourné du côté opposé, ou, ce qui est la même chose, si elle fait du côté de l'origine des chutes un angle obtus avec l'horisontale, la ligne de la plus viste Descente sera encore la base d'un triangle isoscele, mais *amblygone*, au lieu que dans les deux autres cas, il étoit rectangle ou *oxygone*.

Dans tous les trois cas, cette proprieté du triangle isoscele vient également de ce que la perpendiculaire qui détermine la plus grande vitesse acquise par le Corps, y est la plus grande qu'il se puisse par rapport à la ligne qui represente l'espace parcouru. Mais ce plus grand rapport de la vitesse à l'espace est beaucoup plus aisé à appercevoir dans le triangle rectangle isoscele, que dans l'oxigone, ou l'amblygone isosceles aussi.

ASTRONOMIE

SUR L'ETOILE DE L'HIDRE.

QUI PAROIST ET DISPAROIST.

V. les M. p. 33. * p. 111. & 112.

CEtte Etoile de l'Hidre qui paroist & disparoist, & dont nous avons parlé dans l'Hist. de 1706 *, a été suivie par M. Maraldi qui l'avoit découverte, ou du moins qui avoit découvert qu'elle étoit *changeante*. Comme elle est presentement un peu mieux connuë qu'elle n'a encore été, nous en allons faire une petite Histoire un peu plus circonstanciée.

Il paroist certain qu'elle a été vûë en 1662 par Hevelius, elle l'a été en 1672 par M. Montarani, & ni l'un ni l'autre de ces Astronomes ne l'a connuë pour changeante. M. Maraldi l'a observée en 1704, 1705, 1706 & 1708. C'a été au mois d'Avril que Hevelius & Montanari l'ont vûë, M. Maraldi en 1704 & 1708 depuis Mars jusqu'en Juin, en 1705 à la fin de l'année, & en 1706 au commencement. Il l'a cherchée inutilement en tout autre temps, depuis l'an 1702, qu'il fut averti de cette Etoile par l'observation de M. Montanari. Elle commence par être à peine visible à la Lunette, & ensuite elle va jusqu'à égaler les Etoiles de la 4^me^ grandeur, aprés quoi elle diminuë toûjours. C'est vers la moitié de Mai qu'elle arrive à cette grandeur. Le plus long-temps de son apparition peut être de 4 mois. Lorsqu'elle parut hors de son temps ordinaire à la fin de 1705, & au commencement de 1706, elle fut d'abord fort petite & fort foible, & ne fit encore que diminuer toûjours; elle ne parut que 2 mois.

Par tout ce que nous venons de dire, la periode de 2 ans assignée par M. Maraldi dans l'Hist. de 1706 aux retours de cette Etoile, & qui doit commencer en 1662, temps de la premiere observation, s'accorde jusqu'apresent assés juste avec les phenomenes, excepté que l'Etoile ne parut point en 1702, quoiqu'elle eût dû y paroistre selon cette periode, & qu'elle parut hors de son temps en 1705, & en 1706. Ces irregularités du temps de son apparition, aussi-bien que celles qui regardent sa grandeur, pourront se concilier quelque jour avec quelque hipothese, & elles ne sont pas fort considerables par rapport au peu d'observations que l'on a jusqu'ici.

On peut même déja imaginer selon le Sistême des demi-Soleils expliqué à cette occasion dans l'Hist. de 1706, que l'Etoile de l'Hidre qui ne paroist que 4 mois à peu prés en 2 ans n'a que la 6^me^ partie de sa surface qui soit lumineuse, & que le reste est couvert par des Taches permanentes, mais non pas absolument fixes en un certain endroit du globe, ou qu'il s'y en peut joindre quelquefois de nouvelles & de passageres. L'une ou l'autre de ces suppositions, ou toutes les deux ensemble, satisferont à tout.

M. Maraldi fait un petit dénombrement de quelques Etoiles qui paroissent & disparoissent comme celle de l'Hidre, ou qui ne paroissent plus, du moins depuis un certain temps, ou même qu'on a lieu de croire qui ne paroissent que depuis peu. Ces observations sont d'une extrême importance pour le Sistême de l'Univers pris en grand, si cependant c'est l'Univers pris en grand que la plus grande étenduë que nous en puissions apercevoir avec nos plus excellentes Lunettes.

SUR LES MOUVEMENTS

APPARENTS DES PLANETES.

V. les M. p. 247.
IL est certain maintenant que le Soleil est le centre des mouvements des Planetes, & non pas de la Terre; les Sistêmes de Copernic & de Tycho Brahé conviennent sur ce point. Delà il suit necessairement que les mouvements des Planetes vûs de la Terre doivent paroistre extrêmement differents de ce qu'ils paroistroient étant vûs du Soleil; ils en sont presque entierement défigurés, & à peine les Courbes de leurs Orbes sont-elles reconnoissables. C'est cette difference que nous allons expliquer pour faire entendre des figures que M. Cassini a données des Courbes que les Planetes vûës de la Terre paroissent décrire. La principale de ces irrégularités apparentes consiste dans les *Retrogradations* & *Stations*, & voici ce qui les produit. Je suppose que le Sistême de Copernic perfectionné par les Ellipses de Kepler represente l'Univers tel qu'il est en effet.

Imaginons Saturne immobile, & la terre qui se meut sous lui autour du Soleil d'Occident en Orient d'un mouvement uniforme, le Soleil est entre elle & Saturne, &