Sur les fonctions entières

Note de E. Picard. C.R. T.89 (1879) 662-665

» Il a été assisté dans ces travaux par MM. Nicou et Laporte, sous-ingénieurs hydrographes.

Observations magnétiques ramenées au 1er janvier 1879.

	Déclinaison.	Inclinaison.	Intensité horizontale.
	° ′	° ′	° ′
Lisbonne	19.28	»	»
Madère	20.49	»	»
Saint-Vincent	18.27	»	»
Gibraltar	17.32	»	»
Mers-el-Kebir	15.55	»	»
Carthagène	16.13	»	»
Alicante	16.13,5	»	»
Palma	15.15,5	»	»
Barcelone	15.29	»	»
Rosas	15.15	»	»
Port-Vendres	15.23	»	»
Toulon	14.24	61. 4,9	2,226
Salins d'Hyères	14.13	61.28,6	2,218
Villefranche	13.53	61.14,2	2,196
Naples	10.55,5	»	»
Navarin	8. 7	52.32,9	2,632
Pirée	7.35	53.43	2,603
Milo	7.13,5	52.28,2	2,652
Malte	10.36,0	52.14,9	2,625
Alger	14.38,0	55.21,9	2,488
Cadix	17.52,5	»	»
Ile d'Oléron	17.46	64. 8,2	2,031
Quiberon	19. 2,5	65.29,9	1,945
Brest	19.58	66.15,4	1,920
Lorient	19.18,0	65.13,1	1,945
Paris	»	65.32,6	1,9324

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les fonctions entières.* Note de M. E. PICARD, présentée par M. Hermite.

« J'ai montré dans une Communication récente (*Comptes rendus*, 19 mai 1879) qu'il ne peut y avoir plus d'une valeur finie qui ne soit susceptible de prendre une fonction entière pour une valeur finie de la variable. Je me propose de démontrer maintenant la proposition suivante, dont le théorème précédent n'est qu'un cas particulier : il ne peut y avoir plus d'une valeur finie a pour laquelle l'équation $G(z) = a$ [$G(z)$ étant une fonction entière] ait seulement un nombre limité de racines, à moins que $G(z)$ ne soit un polynôme. Nous allons montrer, en effet, que, a et b désignant deux quantités finies, $G(z)$ est un polynôme si les équations $G(z) = a$ et $G(z) = b$ ont un nombre limité de racines.

» Commençons par rappeler quelques résultats d'un Mémoire de M. Dedekind [*Ueber die elliptischen Modul-Functionen* (*Journal de Borchardt*, t. LXXXIII)]. Il existe une fonction ω de la variable v n'ayant dans tout le plan que les trois points critiques o, 1 et le point ∞, et jouissant des propriétés suivantes : pour toute valeur de v, le coefficient de i dans ω, mise sous la forme ordinaire des imaginaires, est positif; de plus, ω a pour une valeur quelconque de v une infinité de valeurs, et, ω_0 désignant l'une quelconque d'entre elles, toutes les autres sont données par la formule

$$\omega = \frac{\nu + \rho\omega_0}{\lambda + \mu\omega_0}, \tag{1}$$

λ, μ, ν et ρ étant quatre entiers réels satisfaisant à la relation $\lambda\rho - \mu\nu = 1$. La fonction inverse $v(\omega)$ est uniforme et v prend respectivement les valeurs o, 1 et ∞ pour $\omega = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ (que nous désignerons par ε), pour $\omega = i$ et enfin pour ω infiniment grand, de telle manière que le coefficient de i soit positif et lui-même infiniment grand. Nous dirons, avec M. Dedekind, que deux nombres ω et ω_0, liés par une relation de la forme (1), sont équivalents; v a la même valeur pour des valeurs équivalentes de ω.

» Nous pouvons évidemment supposer que les quantités désignées au début par a et b sont zéro et l'unité. Soit donc $G(z)$ une fonction entière telle que les équations $G(z) = 0$ et $G(z) = 1$ n'aient qu'un nombre limité de racines. Posons $v = G(z)$; ω deviendra une fonction $F(z)$ de z, dont les points critiques seront les points racines des équations précédentes, tous situés à distance finie, puisque leur nombre est limité, et le point ∞. Je considère un cercle C ayant l'origine pour centre et comprenant à son intérieur tous les points critiques de $F(z)$, situés à distance finie, et j'appelle *domaine du point* ∞ la partie du plan extérieure à ce cercle; c'est dans ce domaine que nous allons étudier la forme de la fonction. Désignons par ω une des déterminations de $F(z)$ dans le domaine du point ∞, et soit

$\frac{\nu + \rho\omega}{\lambda + \mu\omega}$ la valeur de ω quand la variable a fait dans le sens positif le tour complet du cercle C. Je cherche tout d'abord si l'on peut déterminer les cinq quantités α, β, γ, δ et k de manière que $\frac{\alpha + \beta\omega}{\gamma + \delta\omega}$ se reproduise multiplié par k après cette circulation. Le problème est susceptible d'une solution si $(\lambda + \rho)^2$ est différent de 4.

» Si $(\lambda + \rho)^2$ est supérieur à 4, α, β, γ et δ sont réels, et k est positif et différent de l'unité, et l'on aurait, en désignant par a le logarithme arithmétique de k,

$$\frac{\alpha + \beta\omega}{\gamma + \delta\omega} = z^{\frac{a}{2\pi i}} \varphi(z),$$

$\varphi(z)$ étant uniforme dans le domaine du point ∞ et n'ayant d'autre point singulier que ce dernier; mais le coefficient de i dans le premier membre doit avoir un signe invariable, et l'on peut démontrer que, quelle que soit la fonction uniforme $\varphi(z)$, il ne peut en être de même dans le second. Il est donc impossible que $(\lambda + \rho)^2$ soit supérieur à 4. Nous n'avons donc qu'à examiner les cas $(\lambda + \rho)^2 = 0$ et 1.

» Soit $\lambda + \rho = 0$. Alors $k = -1$, et l'on trouve aisément α, β, γ et δ.

» On a alors

$$\frac{-\nu + (\lambda + i)\omega}{\nu - (\lambda - i)\omega} = \sqrt{z}\, \varphi(z),$$

$\varphi(z)$ étant uniforme dans le même domaine. En supposant, ce qui est permis, ν positif, j'établis que le point ∞ doit être pour $\varphi(z)$ un pôle ou un point ordinaire, qui ne soit pas un point racine, et, par suite, le second membre augmente indéfiniment avec z; donc ω tend vers $\frac{\nu}{\lambda - i}$ de quelque manière que z augmente indéfiniment. Mais $\frac{\nu}{\lambda - i}$ est équivalent à i, et de la relation $G(z) = \nu(\omega)$ on conclut immédiatement que $G(z)$ tend vers l'unité quand z augmente indéfiniment, ce qui est impossible; $\lambda + \rho$ ne peut donc être nul.

» Je démontre, par des considérations analogues, que $(\lambda + \rho)^2$ ne peut être égal à 1, car, dans cette hypothèse, ω tendrait vers une valeur équivalente à ε quand z se rapprocherait du point ∞, et, par suite, $G(z)$ tendrait vers zéro, conclusion inadmissible.

» Nous devons donc nécessairement supposer que $(\lambda + \rho)^2 = 4$. Dans ce cas, on peut trouver quatre entiers réels satisfaisant à la relation $\beta\gamma - \alpha\delta = 1$ et un nombre entier m tels que $\frac{\alpha + \beta\omega}{\gamma + \delta\omega}$ se transforme en $\frac{\alpha + \beta\omega}{\gamma + \delta\omega} + m$ après un tour complet.

» On aura, par conséquent,

$$\frac{\alpha + \beta\omega}{\gamma + \delta\omega} = \frac{m \log z}{2\pi i} + \varphi(z),$$

$\varphi(z)$ étant uniforme dans le domaine du point ∞. Le coefficient de i dans le premier membre est toujours positif; on en conclut que m doit être négatif et que le point ∞ est un point ordinaire pour $\varphi(z)$. Mais $\frac{\alpha + \beta\omega}{\gamma + \delta\omega}$ est ici une des déterminations de $F(z)$. Il y a donc une des déterminations de cette fonction qui est infiniment grande, de telle manière que le coefficient de i soit lui-même infiniment grand pour des valeurs de z d'un module suffisamment grand, et de la relation $G(z) = \upsilon(\omega)$ on conclut alors que le module de $G(z)$ augmente indéfiniment, de quelque manière que z se rapproche du point ∞. Or cela suffit à établir que $G(z)$ est un polynôme. On sait en effet (Weierstrass, *Zur Theorie der eindentigen Functionen*) que, quelque grand que soit R, $G(z)$ étant une fonction transcendante entière et a une constante quelconque, il existe au moins une valeur de z de module supérieur à R, telle que le module de $G(z) - a$ soit moindre qu'un nombre donné aussi petit que l'on voudra. Nous nous sommes d'ailleurs plusieurs fois servi de ce théorème dans certaines parties de la démonstration, que nous n'avons pu qu'indiquer ici. »

PHYSIQUE. — *Sur le saccharimètre Laurent.* Note de M. L. Laurent, présentée par M. Jamin.

« On fait souvent fonctionner le saccharimètre pendant plusieurs heures; le brûleur échauffe le polariseur, fait persiller le baume employé au collage, et diminue la sensibilité. Si l'on éloigne le brûleur, on perd en lumière, ce qui est une difficulté, car on agit près de l'extinction totale.

» J'ai l'honneur de présenter à l'Académie deux modèles différents. Le grand modèle, qui est préférable, se compose d'une règle en forme de V; aux deux extrémités, elle porte deux bonnettes alésées au moyen d'un outillage spécial et qui assure un bon centrage.