Sur une propriété des fonctions entières

Note de E. Picard. C.R. T.88 (1879) 1024-1027

fonction qui, en vertu des équations (3) et (4), vérifie la relation

$$\Phi_{k-1}\left(\sin\frac{\pi}{2}x\right) = -\Phi_{k-1}(x).$$

» Si maintenant on prend le produit de deux de ces fonctions Φ, on obtient immédiatement une fonction $F(x)$ telle que

$$F\left(\sin\frac{\pi}{2}x\right) = F(x) = F\left(\frac{2}{\pi}\arcsin x\right). \text{ »}$$

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur une propriété des fonctions entières.* Note de M. E. PICARD.

« Il peut arriver qu'une fonction entière $G(z)$ (nous entendons par là une fonction uniforme et continue dans toute l'étendue du plan) ne puisse, pour aucune valeur finie de z, prendre une certaine valeur finie a. L'expression $e^{f(z)}$, par exemple, où $f(z)$ est entier, ne devient jamais nulle. Considérons donc une fonction entière $G(z)$, ne devenant jamais égale à a. Je me propose de montrer dans cette Note qu'il ne peut exister une seconde valeur finie b, différente de a, que ne puisse prendre $G(z)$; en d'autres termes, il ne peut y avoir plus d'une valeur qui ne soit susceptible de prendre pour une valeur finie de la variable une fonction entière. Nous allons en effet montrer qu'une fonction $G(z)$, qui ne deviendrait jamais égale ni à a ni à b, serait nécessairement une constante.

» Commençons par rappeler quelques propriétés d'une transcendante importante dans la théorie des fonctions elliptiques, qui seront utiles pour notre démonstration. Soient $4K$ et $2iK'$ les périodes de la fonction elliptique ordinaire, et désignons par ω le rapport $\frac{K'i}{K}$. On peut considérer ω comme une fonction du carré $x = k^2$ du module k, et inversement x est une fonction uniforme de ω, comme l'a montré M. Hermite, à qui l'on doit l'étude de cette transcendance remarquable. La fonction ω de x n'admet dans tout le plan que trois points critiques : ce sont les points 0, 1 et le point ∞. Dans toute région du plan à contour simple ne contenant aucun de ces trois points, la fonction est uniforme et continue. De plus, pour toute valeur de x, différente de $0, 1, \infty$, ω n'est jamais nul, et le coefficient de i dans cette fonction, mise sous la forme ordinaire des quantités imaginaires, est toujours positif.

Soit maintenant $F(z)$ une fonction entière ne pouvant prendre aucune des valeurs a ou b pour une valeur finie de z. L'expression $\frac{F(z)-a}{b-a}$ ne deviendra jamais égale ni à zéro ni à l'unité; nous la désignerons par $G(z)$. Posons $x = G(z)$; à une valeur quelconque z_0 de z correspond une valeur x_0 de x, et quand z décrit un chemin quelconque C partant de z_0 et revenant à ce point, x décrit une courbe fermée C' pouvant, par des déformations continues, être ramenée au point x_0 sans franchir aucun des points o et 1. Déformons en effet la courbe C, sans cesser de la faire passer par le point z_0; nous pouvons ainsi la réduire à ce point. Il est clair que, par ces déformations continues de C, nous réduirons la courbe correspondante C' au point x_0, sans qu'elle traverse jamais aucun des points o et 1, puisque, par hypothèse, $G(z)$ ne prend jamais ces valeurs.

» Ceci posé, à la valeur x_0 de x correspondent une infinité de déterminations de la fonction ω, définie précédemment. Considérons l'une d'elles, que nous désignerons par ω_0. Lorsque x partant de x_0 revient à ce point après avoir décrit une courbe n'embrassant ni le point o ni le point 1, la fonction ω reprend la valeur ω_0. Regardons maintenant ω comme une fonction de z. Nous partons de z_0 avec la valeur $\omega = \omega_0$, et, quand z décrit un chemin quelconque C et revient en z_0, ω reprend la valeur ω_0, puisque, comme nous l'avons fait remarquer, à la courbe C correspond dans le plan des x une courbe C' n'embrassant aucun des points o ou 1. On conclut de là aisément que, z allant du point z_0 à un point quelconque du plan, ω prend toujours en ce point la même valeur, quel que soit le chemin suivi pour y arriver. D'autre part, pour toute valeur de z, ω a une valeur finie, puisque à chaque valeur de z correspond toujours une valeur de x, différente de zéro et de l'unité. Par conséquent, nous pouvons regarder ω comme une fonction de z uniforme et continue dans toute l'étendue du plan, c'est-à-dire une fonction entière; de plus cette fonction ne devient jamais nulle, ω étant différent de zéro pour toute valeur finie de x autre que o et 1. Nous pouvons donc écrire

$$\omega = e^{P(z)},$$

$P(z)$ étant une fonction entière. Posons maintenant

$$z = \alpha + i\beta, \quad P(z) = f(\alpha, \beta) + i\varphi(\alpha, \beta),$$

les fonctions f et φ étant des fonctions réelles, bien déterminées, des deux variables réelles α et β, et continues pour tout système de valeurs de ces variables. Nous aurons alors

$$\omega = e^{f(\alpha, \beta)}\{\cos[\varphi(\alpha, \beta)] + i \sin[\varphi(\alpha, \beta)]\}. \tag{3}$$

Mais nous avons vu que le coefficient de i dans ω doit être positif; donc $\sin[\varphi(\alpha, \beta)]$ doit être positif pour toutes valeurs de α et de β, et, par suite,

$\varphi(\alpha, \beta)$ doit rester compris entre $2k\pi$ et $(2k+1)\pi$, k étant un entier. Or cela est impossible; c'est ce qui résultera du théorème suivant :

» *Une fonction φ de α et β bien déterminée et continue, ainsi que ses dérivées partielles pour tout système de valeurs de α et β, et satisfaisant à l'équation*

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\beta^2} = 0, \tag{I}$$

ne peut rester comprise entre deux limites fixes, à moins qu'elle ne se réduise à une constante.

» On sait, en effet, qu'il n'existe qu'une seule intégrale de l'équation (I) restant finie et continue, ainsi que ses dérivées, à l'intérieur d'un contour C et prenant des valeurs données en tous les points de ce contour. Dans le cas où le contour C se réduit à un cercle, la valeur de cette intégrale en un point A du cercle est donnée par la formule connue

$$2\pi\varphi = \int_C \varphi . \left(\frac{dlr}{dn} - \frac{dlr_1}{dr}\right) d\sigma;$$

l'intégrale est prise le long du cercle sur lequel est donnée la valeur de la fonction φ; r désigne la distance du point A à un point variable de la circonférence et r_1 la distance à ce même point du point A_1 conjugué de A par rapport au cercle; $d\sigma$ est l'élément d'arc de la circonférence, et enfin $\frac{dlr}{dn}$ et $\frac{dlr_1}{dn}$ désignent les dérivées de $\log r$ et $\log r_1$ prises dans le sens de la normale au cercle. En effectuant le calcul indiqué par cette formule, on reconnaît que l'on peut écrire

$$2\pi\varphi = \int_0 \varphi . \left(1 + \frac{M}{R}\right) d\theta,$$

où R désigne le rayon du cercle et M une fonction de R, de l'angle θ et des coordonnées du point A, qui reste finie quand R augmente indéfiniment. Pour un autre point A' à l'intérieur du cercle R, on aura

$$2\pi\varphi' = \int_0^{2\pi} \varphi . \left(1 + \frac{M'}{R}\right) d\theta,$$

et, par suite,

$$2\pi(\varphi' - \varphi) = \frac{1}{R} \int^{2\pi} \varphi . (M' - M) d\theta.$$

» Le premier membre de cette formule est une quantité indépendante de R. On reconnaît de suite que le second membre est aussi petit que l'on veut, si R est suffisamment grand, puisque φ reste toujours compris entre deux limites déterminées; il est donc rigoureusement nul; donc $\varphi = \varphi'$, c'est-à-dire que la fonction $\varphi(\alpha, \beta)$ est une constante.

» $\varphi(\alpha, \beta)$ étant constant, il doit en être nécessairement de même de $f(\alpha, \beta)$. $P(z)$ et par suite ω seraient alors invariables; mais ω est une véritable fonction de x, et, si elle reste constante, c'est que x reste constant. On voit alors que $G(z)$ ne peut être qu'une constante. Nous avons donc établi, comme nous l'avions annoncé, qu'une fonction entière, qui ne devient jamais égale ni à a ni à b, est nécessairement une constante. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les fonctions introduites par Lamé dans la théorie analytique de la chaleur, à l'occasion des ellipsoïdes de révolution.* Note de M. **Escary**.

« Si dans les deux membres de l'identité

$$\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{A + iB\cos\theta + iC\sin\theta}$$

on fait successivement les deux substitutions, à savoir :

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} A = \operatorname{tangh}\beta - ti\operatorname{tang}\gamma, \\ B = \sqrt{1-\operatorname{tangh}^2\beta}\cos\varpi - t\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\gamma}\cos\varpi', \\ C = \sqrt{1-\operatorname{tangh}^2\beta}\sin\varpi - t\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\gamma}\sin\varpi', \end{cases}$$

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} A = \operatorname{tangh}\alpha - t\coth\gamma, \\ B = \sqrt{1-\operatorname{tangh}^2\alpha}\cos\varpi - t\sqrt{1-\coth^2\gamma}\cos\varpi', \\ C = \sqrt{1-\operatorname{tangh}^2\alpha}\sin\varpi - t\sqrt{1-\coth^2\gamma}\sin\varpi', \end{cases}$$

on obtient les développements suivants :

$$(1) \quad \begin{cases} \left\{1 - 2t\left[\operatorname{tangh}\beta\, i\operatorname{tang}\gamma + \sqrt{1-\operatorname{tangh}^2\beta}\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\gamma}\cos(\varpi-\varpi')\right] + t^2\right\}^{-\frac{1}{2}} \\ \quad = \displaystyle\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{i^n}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\left[\operatorname{tang}\gamma + \sqrt{1+\operatorname{tang}^2\gamma}\cos(\varpi'-\theta)\right]^n d\theta}{\left[\operatorname{tangh}\beta + i\sqrt{1-\operatorname{tangh}^2\beta}\cos(\varpi-\theta)\right]^{n+1}}\, t^n, \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} \left\{1 - 2t\left[\operatorname{tangh}\alpha\coth\gamma + i\sqrt{1-\operatorname{tangh}^2\alpha}\sqrt{1-\coth^2\gamma}\cos(\varpi-\varpi')\right] + t^2\right\}^{-\frac{1}{2}} \\ \quad = \displaystyle\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\left[\coth\gamma + i\sqrt{1-\coth^2\gamma}\cos(\varpi'-\theta)\right]^n d\theta}{\left[\operatorname{tangh}\alpha + i\sqrt{1-\operatorname{tangh}^2\alpha}\cos(\varpi-\theta)\right]^{n+1}}\, t^n. \end{cases}$$

» Nous allons montrer que les intégrales définies contenues dans les seconds membres de ces identités sont les fonctions isothermes renfermant