Sur une classe de fonctions transcendantes

Note de E. Picard. C.R. T.86 (1878) 657-660

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur une classe de fonctions transcendantes.* Note de M. É. **Picard**, présentée par M. Hermite.

« Je me propose de rechercher dans cette Note les fonctions uniformes d'une variable z jouissant des propriétés suivantes :

$$f(z+\omega)=f(z),\quad f(z+\omega')=f(z)\,\mathrm{S}(z),$$

$\mathrm{S}(z)$ désignant une fonction doublement périodique, dont ω et ω' sont les périodes. Si nous trouvons une fonction $f(z)$ jouissant de ces propriétés, nous aurons évidemment toutes les fonctions cherchées en multipliant $f(z)$ par une fonction quelconque, admettant pour périodes ω et ω'. La question revient donc à trouver une fonction jouissant des propriétés énoncées.

» Considérons la fonction

$$\varphi_1(z)=\left(1+e^{-\frac{3\pi\omega' i}{\omega}}e^{\frac{2\pi z i}{\omega}}\right)\left(1+e^{-\frac{5\pi\omega' i}{\omega}}e^{\frac{2\pi z i}{\omega}}\right),\ \ldots;$$

nous devrons supposer que, dans $\frac{\omega'}{\omega}$, le coefficient de i est négatif, pour que le produit infini soit convergent. On a

$$\varphi_1(z+\omega)=\varphi_1(z),\quad \varphi_1(z+\omega')=\left(1+e^{-\frac{\pi\omega' i}{\omega}}e^{\frac{2\pi z i}{\omega}}\right)\varphi_1(z).$$

» Nous pouvons de même obtenir une fonction $\varphi_3(z)$, telle que

$$\varphi_3(z+\omega)=\varphi_3(z),\quad \varphi_3(z+\omega')=\left(1+e^{-\frac{3\pi\omega' i}{\omega}}e^{\frac{2\pi z i}{\omega}}\right)\varphi_3(z),$$

et d'une manière générale une fonction $\varphi_{2n+1}(z)$, telle que

$$\varphi_{2n+1}(z+\omega)=\varphi_n(z)\ \text{ et }\ \varphi_{2n+1}(z+\omega')=\left(1+e^{-\frac{(2n+1)\pi\omega' i}{\omega}}e^{\frac{2\pi z i}{\omega}}\right)\varphi_{2n+1}(z).$$

» Remarquons que nous avons les zéros de ces diverses fonctions. Ceci posé, formons le produit $\varphi_1(z)\,\varphi_3(z)\ldots\varphi_{2n+1}(z)$, ...

» On reconnaît sans peine que ce produit, lorsque n augmente indéfiniment, tend vers une limite et représente une fonction uniforme et continue de z dans toute l'étendue du plan. Soit $\Phi(z)$ cette fonction. Elle admettra ω pour période, et l'on aura

$$\Phi(z+\omega')=\Phi(z)\Big[\left(1+e^{-\frac{\pi\omega' i}{\omega}}e^{\frac{2\pi z i}{\omega}}\right)\left(1+e^{-\frac{3\pi\omega' i}{\omega}}e^{\frac{2\pi z i}{\omega}}\right)\ldots$$
$$\times\left(1+e^{-\frac{(2n+1)\pi\omega' i}{\omega}}e^{\frac{2\pi z i}{\omega}}\right)\ldots\Big].$$

» Formons maintenant des fonctions $\psi_1(z)$, $\psi_3(z)$, ..., telles que

$$\psi_1(z+\omega)=\psi_1(z),\quad \psi_1(z+\omega')=\frac{\psi_1(z)}{1+e^{-\frac{\pi\omega' i}{\omega}}e^{-\frac{2\pi z i}{\omega}}},$$

....

$$\psi_{2n+1}(z+\omega)=\psi_{2n+1}(z),\quad \psi_{2n+1}(z+\omega')=\frac{\psi_{2n+1}(z)}{1+e^{-\frac{(2n+1)\pi\omega' i}{\omega}}e^{-\frac{2\pi z i}{\omega}}}.$$

» Nous définissons ces fonctions comme les fonctions φ par des produits convergents. En multipliant comme précédemment ces fonctions, nous arrivons à former une fonction $\Psi(z)$, telle que

$$\Psi(z+\omega)=\Psi(z)\text{ et }\Psi(z+\omega')=\frac{\Psi(z)}{\left(1+e^{-\frac{\pi\omega' i}{\omega}}e^{-\frac{2\pi z i}{\omega}}\right)\cdots\left(1+e^{-\frac{(2n+1)\pi\omega' i}{\omega}}e^{-\frac{2\pi z i}{\omega}}\right)\cdots}.$$

Faisons le quotient $\frac{\Phi(z)}{\Psi(z)}=\mathrm{T}(z)$. La fonction $\mathrm{T}(z)$ jouira des propriétés suivantes :

$$\mathrm{T}(z+\omega)=(\mathrm{T}z),\quad \mathrm{T}(z+\omega')=\mathrm{T}(z)\,\Theta(z),$$

la fonction $\Theta(z)$ représentant à un facteur constant près une des fonctions de Jacobi. La fonction $\Theta(z)$ est formée avec ω et $-\omega'$.

» Les zéros de $\mathrm{T}(z)$ sont donnés par la formule

$$z=(2n+1)\frac{\omega'}{2}+(2k+1)\frac{\omega}{2};$$

k est un entier quelconque, mais on a $n\geq 1$.

» Pour les pôles, on a

$$z=-(2n-1)\frac{\omega'}{2}+(2k+1)\frac{\omega}{2}\quad\text{où}\quad n\geqslant 1.$$

» De plus le degré de ces pôles et de ces racines est indiqué par la valeur correspondante de n.

» On sait qu'une fonction quelconque $\mathrm{S}(z)$ doublement périodique, admettant pour périodes ω et ω', peut s'exprimer de la manière suivante :

$$\mathrm{S}(z)=\mathrm{A}e^{gz}\frac{\Theta\left(z+\frac{\omega-\omega'}{2}-q_1\right)\cdots\Theta\left(z+\frac{\omega-\omega'}{2}-q_n\right)}{\Theta\left(z+\frac{\omega-\omega'}{2}-p_1\right)\cdots\Theta\left(z+\frac{\omega-\omega'}{2}-p_n\right)};$$

je rappelle que $g\omega=2\alpha i\pi$, α étant un entier.

» Nous pouvons former n fonctions admettant ω pour période, et se reproduisant multipliées par $\Theta\left(z+\frac{\omega-\omega'}{2}-q_i\right)$, quand on change z en $z+\omega'$, i prenant toutes les valeurs de 1 à n; faisons de même relativement à $\Theta\left(z+\frac{\omega-\omega'}{2}-p_i\right)$.

» Nous arrivons ainsi à former une fonction $F(z)$, telle que

$$(1)\qquad F(z+\omega)=F(z),\quad F(z+\omega')=F(z)e^{-\frac{2\alpha\pi z i}{\omega}}S(z);$$

les zéros de la fonction $F(z)$ sont donnés par les formules

$$z=(n+1)\omega'+k\omega+q_i,\quad z=-(n-1)\omega'+k\omega+p_j,$$

les pôles par

$$z=(n+1)\omega'+k\omega+p_i,\quad z=-(n-1)\omega'+k\omega+q_j;$$

k est un entier quelconque positif ou négatif, mais on a $n \geqslant 1$. Le degré de multiplicité est donné par la valeur de n.

» Nous allons exprimer autrement la fonction $F(z)$: on tire de (1)

$$\frac{F'(z+\omega')}{F(z+\omega')}=\frac{F'(z)}{F(z)}+\frac{S'(z)}{S(z)}-\frac{2\alpha\pi i}{\omega};$$

on a donc, en posant $\Pi(z)=\dfrac{\frac{F'(z)}{F(z)}}{\frac{S'(z)}{S(z)}-\frac{2\alpha\pi i}{\omega}}$,

$$\Pi(z+\omega)=\Pi(z)\quad\text{et}\quad \Pi(z+\omega')=\Pi(z)+1;$$

or la forme générale des fonctions $\Pi(z)$, jouissant de ces propriétés, est

$$(2)\quad \Pi(z)=G+\sum_h[A_1^h D\log\theta_1(z-\alpha_h)+\ldots+A_p^h D^p\log\theta_1(z-\alpha_h)];$$

en posant $\Theta\left(z+\frac{\omega-\omega'}{2}\right)=\theta_1(z)$, avec la condition $\Sigma A_1^h=\frac{\omega}{2\pi i}$, on a donc

$$F(z)=Ce^{\int_{z_0}^{z}\left[\frac{S'(z)}{S(z)}-\frac{2\alpha\pi i}{\omega}\right]\Pi(z)dz},$$

$\Pi(z)$ étant convenablement choisi parmi les fonctions (2). Cette détermination se fait d'après la règle suivante, où nous supposons que les pôles et les racines de $S(z)$ sont simples : soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h \ldots$ les racines de $\frac{S'(z)}{S(z)}-2\alpha\frac{\pi i}{\omega}$, comprises dans le parallélogramme (ω, ω'), dont les degrés sont respectivement $p_1, p_2, \ldots p_h, \ldots$; nous aurons

$$\Pi(z)=G+\sum_h[A_1^h D\log\theta_1(z-\alpha_h)+\ldots+A_{p_h}^h D^{p_h}\log\theta_1(z-\alpha_h)].$$

Les quantités A et G sont déterminées par la relation $\Sigma A_1^h=\frac{\omega}{2\pi i}$, et par les $2n$ relations obtenues en écrivant que les pôles de $\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$, situés dans le parallélogramme (ω, ω'), augmentés de ω', sont racines de $\Pi(z)$. Ce système d'équations du premier degré ne sera jamais impossible. $F(z)$ étant formée, on obtient sans peine les fonctions $f(z)$ dont nous avons parlé au début. »

PHYSIQUE DU GLOBE. — *Sur les variations du magnétisme terrestre.* Note de M. Quet.

« Je me propose d'examiner, à l'aide du calcul, la théorie qui attribue au Soleil une action directe sur les fluides magnétiques et électriques de la Terre.

» Le Soleil sera regardé comme le siége de courants électriques fermés, de dimensions, de forme, d'orientation et d'intensité quelconques. Cette constitution comprend le cas où l'astre contiendrait des corps magnétiques, que l'on peut toujours considérer comme des assemblages de courants particulaires.

» L'action de ce système, quelque compliquée qu'elle puisse être près de la surface, devient assez simple lorsqu'elle s'applique à des points très-éloignés, comme ceux de la Terre. Je montre qu'elle est équivalente à celle d'un courant unique qui se propagerait, avec une intensité convenable, sur la circonférence d'un grand cercle solaire dont le plan serait bien choisi. Ce courant fictif sera le grand courant solaire ou le courant résultant; le diamètre du Soleil, perpendiculaire à ce plan, sera l'axe électrodynamique de l'astre, et ses deux extrémités en seront les pôles électrodynamiques.

» Si la Terre ne tournait pas et ne se mouvait pas dans son orbite, si le Soleil n'avait pas non plus de mouvement révolutif et que ses pôles électrodynamiques fussent immobiles sur sa surface, l'action exercée par l'astre sur les courants particulaires des corps magnétiques de notre globle tendrait à donner une certaine direction à l'axe de ces courants et à aimanter la Terre dans un certain sens.

» Rendons au Soleil et à la Terre leurs mouvements de rotation et de translation, et des phénomènes nouveaux vont se produire. L'état magnétique de notre globe éprouvera des changements périodiques, qui dépendront de sa vitesse de rotation et de son mouvement de translation sur l'orbite; en second lieu, les fluides électriques de la Terre seront mis en mouvement dans les bons conducteurs, par des forces électromotrices d'induction dues à la rotation et à la translation de la Terre; le Soleil, en tournant sur lui-même, induira notre globe, et les variations d'intensité de