# Sur les surfaces réglées dont les génératrices font partie d'un complexe linéaire

Note de E. Picard. C.R. T.84 (1877) 229-231

cette même courbe a $p$ points doubles distincts, à distance finie. Les *courbes* quarrables par les fonctions elliptiques ou par les fonctions circulaires, qui ont l'équivalent de $\frac{m(m-3)}{2}$ ou de $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ points doubles, mais constitué par des points multiples d'ordres supérieurs ou par des points multiples à l'infini, forment des solutions *particulières* des deux problèmes en question.

» Les courbes quarrables par les fonctions elliptiques ou par les fonctions circulaires qui n'ont pas l'équivalent de $\frac{m(m-3)}{2}$ ou de $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ points doubles forment des solutions *singulières* des mêmes problèmes. Ces solutions singulières ne rentrent pas, actuellement du moins, dans la solution générale.

» Il doit donc exister un théorème plus général que celui de M. Clebsch. »

GÉOMÉTRIE. — *Sur les surfaces réglées dont les génératrices font partie d'un complexe linéaire.* Note de M. **Picard**, présentée par M. Bouquet.

« Je me propose de montrer dans cette Note comment on peut déduire des propriétés d'un complexe linéaire quelques propriétés de certaines surfaces réglées.

» Soient

$$x = az + p, \quad y = bz + q \tag{1}$$

les équations d'une droite. On obtient un complexe linéaire en assujettissant les paramètres variables $a$, $b$, $p$, $q$ à la condition

$$\mathrm{L}a + \mathrm{M}b + \mathrm{N} - \mathrm{P}p + \mathrm{Q}q - \mathrm{R}(aq - bp) = 0, \tag{2}$$

dans laquelle L, M, N, P, Q et R désignent des constantes. L'équation du plan polaire du point $x, y, z$ est alors

$$(\mathrm{L}+\mathrm{Q}z-\mathrm{R}y)(\mathrm{X}-x)+(\mathrm{M}+\mathrm{R}x-\mathrm{P}z)(\mathrm{Y}-y)+(\mathrm{N}+\mathrm{P}y-\mathrm{Q}x)(\mathrm{Z}-z)=0. \tag{3}$$

» Supposons maintenant que, dans les équations (1), $a$, $b$, $p$, $q$ représentent des fonctions d'un paramètre variable $\alpha$. Ces équations détermineront les génératrices d'une surface réglée, et ces génératrices feront partie du complexe si les fonctions $a$, $b$, $p$, $q$ vérifient la relation (2). Le plan tangent en un point $x$, $y$, $z$ de cette surface ne coïncide pas, en général, avec le plan polaire du même point. Pour que la coïncidence existe, il faut que l'on ait

$$(4)\qquad (\mathrm{L}+\mathrm{Q}z-\mathrm{R}y)(a'z+p')+(\mathrm{M}+\mathrm{R}x-\mathrm{P}z)(b'z+q')=0,$$

$a'$, $b'$, $p'$, $q'$ étant les dérivées des fonctions $a$, $b$, $p$, $q$ par rapport à $\alpha$.

» La condition précédente est vérifiée pour deux des points de chaque génératrice; ces points forment sur la surface une courbe C. La tangente en un point quelconque $m$ de cette courbe étant comprise dans le plan polaire de $m$, on en conclut que ce plan est le plan osculateur en $m$, et par suite la courbe C est une ligne asymptotique de la surface.

» Réciproquement, toute courbe, dont les tangentes font partie d'un complexe linéaire, admet le mode précédent de génération. Considérons, en effet, le plan osculateur en un point quelconque A de la courbe; ce plan coupe la courbe au moins en un second point B (je laisse de côté la cubique gauche pour laquelle la propriété se vérifie aisément). Les droites AB sont les génératrices d'une surface réglée. Si nous cherchons sur cette surface la courbe que nous avons signalée plus haut, nous trouvons la courbe proposée. Il résulte de cette réciproque que les solutions de l'équation

$$(5)\quad (\mathrm{L}+\mathrm{Q}z-\mathrm{R}y)\,dx+(\mathrm{M}+\mathrm{R}x-\mathrm{P}z)\,dy+(\mathrm{N}+\mathrm{P}y-\mathrm{Q}x)\,dz=0$$

sont données par les équations (1) et (4), $a$, $b$, $p$, $q$ étant des fonctions de $\alpha$ qui vérifient la condition (2).

» Une surface réglée du troisième ordre possède une droite double et une droite singulière. Ses génératrices appartiennent à tous les complexes en nombre infini dans lesquels ces droites sont conjuguées. A chacun de ces complexes correspond une courbe sur la surface. On obtient ainsi, par des considérations géométriques, les lignes asymptotiques de la surface, déterminées analytiquement par Clebsch (*Journal de Crelle*, t. LXVII). On reconnaît sans peine que ces courbes rentrent dans la famille des courbes unicursales du quatrième ordre étudiées par M. Appell (*Comptes rendus*, 18 décembre 1876). Les deux points caractéristiques de chacune de ces courbes sont sur la droite double. Toute surface réglée du troisième ordre est unicursale; on peut la définir par les équations

$$(6)\qquad x=\frac{\mathrm{A}_1\lambda+\mathrm{B}_1}{\mathrm{A}\lambda+\mathrm{B}},\quad y=\frac{\mathrm{A}_2\lambda+\mathrm{B}_2}{\mathrm{A}\lambda+\mathrm{B}},\quad z=\frac{\mathrm{A}_3\lambda+\mathrm{B}_3}{\mathrm{A}\lambda+\mathrm{B}},$$

ou

$$\mathrm{A}=a\mu^2+b\mu+c,\quad \mathrm{B}=d\mu+e,\quad \mathrm{A}_1=a_1\mu^2+\ldots;$$

$\lambda$ et $\mu$ sont deux paramètres arbitraires.

» Les génératrices de cette surface feront partie du complexe (2), si l'on a identiquement

$$\begin{gathered} L(AB_1 - A_1B) + M(AB_2 - A_2B) + N(AB_3 - A_3B) \\ + P(A_2B_3 - A_3B_2) + Q(A_3B_1 - A_1B_3) + R(A_1B_2 - A_2B_1) = 0. \end{gathered}$$

» Le premier membre renfermant $\mu$ au troisième degré, nous aurons quatre relations linéaires et homogènes entre L, M, N, P, Q et R. Si l'on considère les rapports de cinq de ces quantités à la sixième, quatre de ces rapports s'expriment en fonction du cinquième.

» Le plan polaire d'un point $m$ de la surface coïncidera avec le plan tangent en ce point, si la tangente à la courbe, que décrit le point $x$, $y$, $z$ donné par les formules (6), lorsqu'on fait varier $\mu$, est comprise dans le plan polaire, c'est-à-dire si l'on a

$$\begin{gathered} (L + Qy - Rz)[(A'_1\lambda + B'_1)(A\lambda + B) - (A'\lambda + B')(A_1\lambda + B_1)] \\ + (M + Rx - Pz)[(A'_2\lambda + B'_2)(A\lambda + B) - (A'\lambda + B')(A_2\lambda + B_2)] \\ + (N + Py - Qx)[(A'_3\lambda + B'_3)(A\lambda + B) - (A'\lambda + B')(A_3\lambda + B_3)] = 0. \end{gathered}$$

Telle est la relation entre $\lambda$ et $\mu$ donnant la ligne de la surface correspondant au complexe défini par L, M, N, P, Q, R, ces six quantités satisfaisant, bien entendu, aux équations dont j'ai parlé plus haut.

» J'applique les mêmes considérations aux surfaces réglées unicursales de tout ordre, dont les génératrices font partie d'un complexe linéaire.

» Dans le cas du quatrième ordre, il en est toujours ainsi : il y a en général un complexe unique auquel appartiennent les génératrices. La courbe correspondante est du sixième ordre et son genre est un.

» En établissant des relations convenables entre les coefficients qui entrent dans les expressions de $x$, $y$ et $z$, on peut obtenir des surfaces dont les génératrices appartiennent à une infinité de complexes. Ces surfaces sont caractérisées par l'existence d'une droite triple. La méthode précédente donne les lignes asymptotiques de ces surfaces particulières : ce sont des courbes du sixième ordre. »

SPECTROSCOPIE. — *Recherches sur les spectres des métaux à la base des flammes.* Note de M. **Gouy**, présentée par M. Desains.

« On sait qu'une flamme produite par un mélange de gaz d'éclairage et d'air, en proportions convenables pour brûler sans le secours de l'air ex-