SUR LA MASSE DE VÉNUS,

ET SUR

LA VALEUR DES ÉQUATIONS DU SOLEIL,

Produites par Vénus & par la Lune.

Par M. DE LA LANDE.

LES inégalités du mouvement apparent du Soleil sont un objet important pour l'Astronomie, puisque les Tables du Soleil nous servent continuellement pour calculer nos observations. M. de la Caille nous a laissé des Tables excellentes, dont tous les points furent approfondis & discutés avec un soin extrême; il y fit entrer les perturbations calculées en 1757, par M.[rs] Euler & Clairaut, pour les attractions de Jupiter, de Vénus & de la Lune; mais les deux dernières avoient été calculées avec des masses qui paroissoient défectueuses, & je vais tâcher d'y suppléer.

Les passages de Vénus sur le Soleil ont rectifié nos connoissances sur la masse du Soleil, & elle se trouve beaucoup plus grande qu'on ne croyoit : au lieu de 169282 que Newton avoit supposé, je l'ai trouvée 351886 fois celle de la Terre; c'est plus du double, & cela seul doit diminuer les inégalités dont il s'agit.

La Masse de Vénus est inconnue, parce que rien ne nous indique sa densité ; M. Euler supposoit les densités proportionnelles à la racine des moyens mouvemens; M. de la Grange les suppose en raison inverse des distances, (*Mém. de Berlin*, *1782*). Mais ce sont-là des hypothèses, puisqu'on ne connoît aucune cause physique d'une pareille loi, & que d'autres phénomènes indiquent une densité moindre pour Vénus, & plus grande pour Herschel.

Les recherches que j'ai faites sur l'obliquité de l'écliptique

(*Mém. de l'Académie*, *1780*), donnent une masse trois fois moindre que celle dont M. de la Grange fait usage. J'ai fait voir dans le même Ecrit, que l'apogée du Soleil donnoit moins de précision : mais après être revenu sur cette partie, j'ai reconnu que ce mouvement même donne encore pour Vénus une masse plus petite d'un tiers que celle de M. de la Grange ; & qu'au lieu de faire la masse de Vénus 1,31, celle de la Terre étant prise pour unité, il faut prendre 0,87. En effet, l'apogée du Soleil déterminé par les observations de la Hire, que M. de la Caille a discutées avec soin, étoit en 1684 à $3^s\ 7^d\ 28'\ 0''$, Flamstéed pour 1690, donne $3^s\ 7^d\ 35'\ 0''$. Si l'on compare ces deux positions avec celle que M. de Lambre a trouvée pour 1780, $3^s\ 9^d\ 8'\ 20''$, on a le mouvement annuel 62″7, & 61″55 ; le milieu est 61″86, & je ne crois pas que les observations de Waltherus & de Cocheouking dont la Caille s'est servi quand il a fait ce mouvement de 65″, soient aussi concluantes que celles-ci.

Or par la théorie, M. de la Grange trouve le mouvement annuel de l'apogée 63″6, dont 5″2 sont dûes à l'action de Vénus, & il en faut donc ôter 1″8 pour avoir 61″8, c'est-à-dire, environ un tiers du total ; ainsi le mouvement même de l'apogée exige que l'on diminue d'un tiers la masse de Vénus, que M. de la Grange a supposée 1,31, & qu'on la rédiuse à 0,87 de celle de la Terre.

Le mouvement de l'aphélie de Mercure que j'ai trouvé de 56″$\frac{1}{4}$, exige qu'on la diminue d'un cinquième.

Le mouvement du nœud de Mercure qui est fort bien déterminé par les passages sur le Soleil, & qui est de 43″3 par année, exige que la masse soit réduite à 0,82 de celle de la Terre.

L'équation du Soleil produite par Vénus, telle que M. de Lambre l'a déduite des observations de M. Maskelyne 10″6 pour le *maximum*, supposeroit la masse un peu plus grande même que dans M. de la Grange, ou 1,45 de celle de la Terre ; mais ſuivant les calculs de M.rs Fuſſ & Lexell, elle donne la maſſe de Vénus égale à celle de la Terre.

Le mouvement du nœud de Venus 31″ par an, ſuppoſe la maſſe à-peu-près comme dans M. de la Grange ; mais ces deux déterminations ne ſont pas ſi ſûres que les autres.

Si l'on prend un milieu entre ces ſix réſultats, on trouvera pour cette maſſe de Vénus 0,92 de celle de la Terre, c'eſt-à-dire, $\frac{7}{10}$ de celle que M. de la Grange a admiſe.

Si l'on ſuppoſe la diminution de l'obliquité de l'écliptique d'une demi-ſeconde par an, comme fait M. Maskelyne, on aura la maſſe de Vénus 0,95, de celle de la Terre, ou 0,73 de celle que M. de la Grange a ſuppoſée.

M. Clairaut trouvoit pour les équations du Soleil par l'action de Vénus, les quantités ſuivantes (*Mém. 1754, page 556*), nommant t le lieu héliocentrique de Vénus moins celui de la Terre, & ſuppoſant la maſſe du Soleil 169228 fois celle de la Terre, & celle-ci 1,117 par rapport à celle de Vénus.

	$+ 10''$ ſin. t	$- 11'',5$ ſin. $2t$	$- 1'',4$ ſin. $3t$	$- 0'',4$ ſin. $4t$	
Suiv. la Caille,	8,2	9,5	1,2	0,3	*Mém. 1757, page 130.*

La ſomme de ces équations produit juſqu'à 18″3 pour quatre ſignes d'argument.

C'étoit en comparant ces obſervations avec le calcul des Tables, que la Caille trouva qu'il falloit diminuer d'un quart les équations données par Clairaut ; mais on ſent qu'il étoit difficile de déterminer des quantités de 18″ par des obſervations qui comportent des erreurs de la même quantité ; cette ſomme de 18″ fut réduite à 15″ dans ſes Tables.

Si l'on préfère d'employer la théorie, en prenant la maſſe de Vénus par rapport au Soleil, qui réſulte des calculs précédens, ſon logarithme eſt 4,41626 ; pour celle du Soleil par rapport à la Terre, le logarithme eſt 4,45360, ce qui donne 0,92 pour la maſſe de Vénus par rapport à la à la Terre ; & on trouve pour les deux premières équations, 5″2, & 6″0, & l'inégalité totale se réduit à 9″5, au lieu de 15″2 qu'on trouve dans les tables de la Caille. Mayer n'employoit que 6″ ; & quoiqu'il eût emprunté des tables de la Caille ses principaux élémens, comme il le dit lui-même (*page 51 de sa Méthode des Longitudes*), il avoit changé celui-là avec raison ; mais s'il avoit fait cette diminution, c'est que même avant le passage de Vénus, il faisoit la parallaxe du Soleil plus petite que les Astronomes, & cela d'après la théorie de la Lune.

M. de Lambre, qui a comparé beaucoup d'observations de M. Maskelyne dans les cas extrêmes, portoit la plus grande somme des équations jusqu'à 10″6 ; & cela supposeroit la masse de Vénus 1,45, encore plus grande que la masse adoptée par M. de la Grange. Dans les Éphémérides de Berlin, pour 1782, *page 116*, on voit que M. de la Grange prenoit un milieu entre les tables de Mayer & celles de la Caille, ou entre 15″2 & 6″0, ce qui donnoit la plus grande somme 10″6 ; on peut conserver cette valeur de 10″6, puisque les observations paroissent la confirmer. D'ailleurs, M. Lexell trouve aussi 10″6 en supposant la masse de Vénus égale à celle de la Terre ; la masse 0,92 que j'ai trouvée par un milieu entre les six déterminations, donne 9″7 pour l'équation, d'après les calculs de M. Fuss & de M. Lexell, qui sont d'accord à cet égard, au lieu de 8″5 que donneroient les formules de Clairaut, & c'est une confirmation intéressante de la plus grande équation que M. de Lambre a déduite des observations ; car la différence entre 9″7 & 10″6 est bien petite.

M. de la Place, en 1788, a trouvé $+$ 5″3 sin. t $-$ 6″9 sin. 2 t $-$ 0″7 sin. 3 t $-$ 0″2 sin. 4 t ; il suppose la masse de Vénus qui donne 50″ de diminution pour l'obliquité de l'écliptique.

En employant 10″6 d'équation, la correction du logarithme de la distance qui alloit jusqu'à 14, se réduiroit à dix parties, suivant la table de la Caille & la théorie de

Clairaut; or M. Lexell trouve 23 pour la distance 100000, ce qui fait 10 pour le logarithme, en réduisant la masse de Vénus à 0″92 (*Mém. de l'Acad. de Pétersbourg, 1779, partie II, page 390*). Ainsi cette table diffère peu de celle que j'avois employée dans mon Astronomie, où la correction étoit 14. M. Lexell, d'après les difficultés que j'avois proposées, a encore plus approfondi cette matière que Clairaut ne l'avoit fait; & les calculs de M. Fuss approchent beaucoup de ceux de M. Lexell; car M. Fuss trouve 25″7, & 11 sur le logarithme, au lieu de 23 & 9, en sorte qu'il a trouvé par un travail suivi, & une méthode différente, que la théorie de Clairaut étoit exacte; enfin M. de la Grange a eu le même résultat (*Mémoires de Berlin, 1784, page 238*).

Je me suis donc contenté de diminuer de $\frac{5}{12}$ les nombres que j'avois employés dans mon Astronomie, en les multipliant par $\frac{7}{12}$ pour former une nouvelle Table qui revient à cette formule $- 2,5 \cos. t + 7,4 \cos. 2t + 1,1 \cos. 3t + 0,4 \cos. 4t$; elle se déduit facilement de l'expression que Clairaut donne, *page 555*, $\frac{P}{M}(2,2314 \cos. t - 6,5360 \cos. 2t - 1,0270 \cos. 3t - 0,03586 \cos. 4t)$ il faut mettre pour $\frac{P}{M}$ la valeur des masses que j'ai donnée plus haut, multiplier par la moyenne distance de Vénus en parties de celle du Soleil, on a les équations des distances; les variations des logarithmes sont $\frac{3}{50}$ de celles des nombres naturels, avec mêmes quantités de chiffres; ainsi il est aisé d'en déduire les corrections des logarithmes. J'ai changé les signes, parce que la formule donne la distance vraie, & que l'unité divisée par la distance, donne un signe contraire.

L'ÉQUATION LUNAIRE du Soleil, suivant Mayer, est de 8″ dans son plus grand effet; c'est à-peu-près la même quantité que dans la Caille, qui la faisoit de 8″5. Euler la supposoit de 15″ dans ses premières Tables, imprimées avec ses Opuscules en 1746; Clairaut trouvoit, pour les équations produites pour la Lune, les quantités suivantes (*Mém. 1754, page 536*); nommant t la longitude de la Lune moins celle du Soleil, & z l'anomalie moyenne du Soleil

$$+ 12'' \text{ fin. } t + 2''9 \text{ fin. } (t + z) - 2''7 \text{ fin. } (t - z);$$

il employoit alors la masse de la Terre par rapport au Soleil, comme Newton, la parallaxe du Soleil de 10", & la masse de la Lune $\frac{1}{48}$ de celle de la Terre. En comparant les observations de la Caille avec le calcul, il réduisit à 7"7 la première équation; les autres à 1"8 & 1"7, comme il paroît en décomposant sa Table, & comme il le dit (*Mém. de l'Acad. 1757, page 136*): ce qui supposoit la masse de la Lune $\frac{1}{67}$, celle de la Terre restant la même; mais les résultats varioient depuis 1" jusqu'à 13" (*page 558*).

Pour vérifier cet élément de la masse lunaire, j'ai comparé un grand nombre d'observations sur les marées de Brest, rassemblées dans mon *Traité du flux & du reflux de la mer*; elles m'ont donné 18 pieds 3 pouces pour les marées moyennes des syzygies, & 8 pieds 5 pouces pour les quadratures. Ainsi l'effet de la Lune est de 13 pieds 4 pouces, & celui du Soleil 4 pieds 11 pouces. Ces quantités me paroissent trop bien vérifiées pour laisser quelque doute sur l'équation que nous cherchons; elles donnent 2,712 pour la force de la Lune, qui, multipliée par le cube de $\frac{8''6}{57'}$ rapport des parallaxes du Soleil & de la Lune, exprime la masse de la Lune par rapport à celle du Soleil; j'en ai conclu $\frac{1}{66}$ par rapport à la Terre. Cela diffère peu de la fraction employée par Clairaut: aussi je trouve 7"5 pour la première équation; 1"8 & 1"7 pour les autres. Dans les tables de la Caille, il y avoit 7"7, 1"8 & 1"6; la différence est insensible, & ne vaudroit pas la peine de changer la Table.

En employant la formule de M. d'Alembert (*Recherches sur divers points, &c. partie II, page 8; Mém. 1757, page 137*), on a la première ou la plus grande équation, égale à la parallaxe du Soleil divisée par celle de la Lune & par la masse de la Terre qui est soixante-six fois celle de la Lune, le tout multiplié par 57^d ou l'arc égal au rayon; ce qui donne pour la première équation lunaire 7″9; mais la formule de Clairaut est un peu plus exacte.

En employant la formule d'Euler (*Mém. de Péterſbourg, 1747, page 441*), on auroit 7″9 pour les masses & les parallaxes que je viens de rapporter; car il trouve $0{,}05645 \frac{N}{M}$, où $\frac{N}{M}$ signifie la masse de la Lune divisée par la masse du Soleil, & multipliée par le carré de la parallaxe de la Lune divisée par celle du Soleil; M. de la Place, en 1788, a trouvé $+ 6''$ sin. t, en employant la masse de Vénus qui résulte de la nutation supposée de 18″.

La correction du logarithme des distances dans la table de la Caille est $+ 15$ cos. $t - 7$ cos. $(t - z) + 2$ cos. $(t + z)$ du moins à peu-près, car il y a quelquefois une ou deux unités de différence. Mais j'observe que la correction de la distance dans le Mémoire de Clairaut, ne donne pas le même rapport pour les trois termes; en effet, voici l'expression (*Mém. Acad. 1754, page 535*) $- 0{,}005264$ cos. $t + 0{,}001256$ cos. $(t - z) - 0{,}001073$ cos. $(t + z)$ qu'il faut multiplier par χ; mais la valeur de χ qui donnoit à Clairaut 14″5 pour l'équation, ne doit donner que 7″5; je la réduis donc à 0,006813, & j'ai les termes, 0,0000359; 0,0000856, que 7″5, & 0,0000731, auxquels répondent en logarithmes de 7 chiffres 15,6; 3,7 & 3,2, les deux derniers approchent bien plus de l'égalité que dans la table de la Caille.

Au reste, M. de la Place trouve que les deux petites équations ne doivent point avoir lieu, & qu'elles sont le résultat d'une omission faite par Clairaut dans sa théorie; ainsi je ne les emploîrai point.

M. de Lambre, en discutant les observations de M Maskelyne, a trouvé que l'équation de 6″ s'accordoit fort bien avec les lieux du Soleil; ainsi il n'y a pas beaucoup d'incertitude sur cette équation; mais il étoit nécessaire d'en parler ici pour faire voir que tous les Auteurs s'accordent, quand on emploie dans leurs formules des élémens plus exacts que nous avons actuellement.

Pour l'action de Jupiter, M. de la Place, en 1788, a trouvé — $7''0$ sin. t + $2''6$ sin. $2t$ + $0''2$ sin. $3t$; il rejette les deux équations que Clairaut faisoit dépendre de l'anomalie du Soleil. Enfin M. de la Place a trouvé pour l'action de Mars — $3''5$ sin. $2t$ + $2''8$ sin. $(2M - T + 47^d\ 23')$, en appelant M la longitude héliocentrique de Mars, T celle de la Terre; & supposant la densité de Mars, comme M. de la Grange, en raison inverse de la distance.

On a vu ci-dessus, que l'inégalité du Soleil qui provient de Venus, est beaucoup plus petite que dans les tables de la Caille. Le mouvement de l'apogée du Soleil est aussi plus petit; j'ai fait voir que le mouvement du Soleil devoit être un peu plus grand; ou de $46'\ 0''$; d'un autre côté, M. de Lambre a vérifié aussi les époques, & il a trouvé par trois cents observations très-exactes de M. Maskelyne, que pour 1780, il faut ôter $7''5$ de la longitude moyenne du Soleil, & $2'\ 29''$ de l'apogée. A l'égard de l'équation de l'orbite, elle se trouve de $1^d\ 55'\ 36''5$ pour 1750, ce qui fait seulement $4''9$ de moins que dans les tables de la Caille & de Mayer qui avoit suivi la Caille. C'est avec ces élémens qu'il a calculé pour la troisième édition de mon Astronomie, de nouvelles tables du Soleil, dont les erreurs n'iront jamais à $10''$, & seront par conséquent trois fois moindres que celles des tables de la Caille, quelque précieuses qu'elles aient été jusqu'à présent: on ne pensoit pas d'avoir sitôt ce nouveau degré de perfection dans l'Astronomie; mais le zèle & l'habileté de M. de Lambre ont surpassé nos espérances dans cette partie comme dans plusieurs autres.