

SUR LES ÉQUATIONS SÉCULAIRES DU SOLEIL ET DE LA LUNE.

Par M. DE LA LANDE.

LE mouvement du Soleil ou de la Terre est uniforme; nous avons lieu de le croire par l'égalité des résultats que donnent toutes les observations anciennes & modernes (*Mém. de l'Acad. 1782*); mais la durée de l'année doit paroître inégale, à cause de deux inégalités qu'il y a dans la précession des équinoxes (*Mém. 1780, p. 311*), & cette inégalité doit entrer dans nos Tables du Soleil, si l'on veut y mettre toute la précision dont elles sont susceptibles.

L'équation séculaire qui exige cette considération, est bien différente de celles qu'on employoit dans les Tables de Jupiter & de Saturne; on les supposoit produites par une force accélératrice constante, en vertu de laquelle les espaces parcourus sont proportionnels aux carrés des temps; mais dans le cas dont il s'agit ici, le mouvement réel du Soleil étant supposé constant, son mouvement par rapport aux équinoxes, ne peut changer que par le mouvement des équinoxes même, qui augmente uniformément de $1''294$ par siècle. Pour faire ce calcul, je supposerai la masse de Vénus telle que je l'ai conclue de plusieurs phénomènes (Voyez ci-après le Mémoire sur la masse de Vénus, *page 398*); d'après cela, je trouve à-peu-près $50''$ pour la diminution séculaire de l'obliquité de l'écliptique. Voici la formule de l'action des Planètes pour déplacer l'écliptique dans ce siècle, ou pour changer la latitude & la longitude d'une étoile.

Par l'action de	Saturne	$1''39$	sin. long.	—	$0,53$	cos. long. Étoile.
	Jupiter	$15''86$		—	$2,11$	
	Mars	$1''03$		+	$0,95$	
	Vénus	$30''88$		+	$8,87$	
	Mercure	$0''84$		+	$0,85$	
		<u>$50''00$</u>	sin. long.	+	$8,05$	cos. long.

J'ai fait voir que chacun de ces effets est exprimé par $M \sin. I \cos. D$, en nommant M le déplacement de l'écliptique sur l'orbite de chaque planète, I son inclinaison, D la distance entre l'étoile & le nœud mesurée le long de l'écliptique (*Mém. 1758, page 361*) ; ainsi $M \sin. I$, est ici de $16''$ pour Jupiter, & $32''13$ pour Vénus, & ces quantités multipliées par le cosinus & le sinus de la longitude du nœud de la planète, donnent les termes correspondans à la formule précédente.

Mais comme les effets de Jupiter & de Vénus sont très-forts, ils doivent changer sensiblement par le déplacement des nœuds. J'ai trouvé le mouvement du nœud de Jupiter $37''$, & celui de Vénus $31''$ par les observations ; ainsi, en les supposant uniformes, il faut ôter pour dix-sept cents ans, $17^d 28'$ du nœud de Jupiter, & $14^d 38'$ de celui de Vénus. On peut négliger le changement pour les autres planètes, mais pour Jupiter & Vénus, la différence est sensible, & la formule précédente devient $46''66 \sin. \text{longitude}$, & $20''41 \cos. \text{long.}$ pour le premier siècle de notre ère. Le second terme $8''03$, ou $20''41$; multiplié par la cotangente de l'obliquité de l'écliptique pour chaque siècle, donne $46''6$ pour le premier, & $18''5$ pour le dix-huitième ; c'est le changement de précession produit par les attractions des planètes, ainsi la précession observée dans ce siècle-ci, étant de $1^d 23' 45''$ (*Mém. 1781*), elle étoit plus petite autrefois.

Cette variation de $28''1$, doit être augmentée de $8''8$, à cause de la diminution de l'obliquité de l'écliptique (*Mém. 1780, p. 311*), & l'on a $36''$, pour la diminution effective en dix-sept cents ans, ou $2''17$ pour chaque siècle ; ainsi entre l'année 800 avant l'ère vulgaire & l'année 700, le mouvement des équinoxes ne dut être que $1^d 22' 50''75$; entre 1700 & 1800 il est de $1^d 23' 45''$. De même le mouvement séculaire du Soleil étoit de $45' 5''7$, tandis qu'il est aujourd'hui de $46'$. On voit dans la Table suivante, la quantité de la précession pour chaque siècle, ainsi que le mouvement du Soleil.

Je suppose que le mouvement du Soleil dans ce siècle, soit 46' 0" outre les cent révolutions complètes, c'est ce que donne la durée de l'année que j'ai trouvée de 365^j 5^h 48' 48" (*Mém.* 1782). La précession étant 1^d 23' 45", il s'en suit que le mouvement séculaire propre & fidéral du Soleil est 1^e 29^d 22' 15". Si l'on ajoute à cette quantité constante les autres précessions contenues dans la quatrième colonne de la Table suivante, pour divers siècles, on aura le mouvement du Soleil pour chacun, tel qu'il est dans la troisième colonne. La somme des différences entre ces mouvemens & celui qui a lieu actuellement, forme l'équation séculaire que j'ai mise dans la seconde colonne. Cette équation séculaire est de 1^e 45" pour l'an 800 avant notre ère.

En effet, si le mouvement étoit supposé de 46' 0" pendant les vingt-six siècles, on trouveroit pour l'an 800, 37" de moins pour le mouvement séculaire. Le mouvement en vingt-six siècles est plus petit de 1^e 1' 45", qu'il ne seroit si la précession étoit constante; le mouvement plus petit donne une longitude plus grande. Il faut donc ajouter toutes ces diminutions à la longitude calculée par les Tables du mouvement uniforme, pour avoir celle qui se trouve en changeant pour chaque siècle le mouvement moyen du Soleil. Cette équation séculaire est 2" 17 pour un siècle, mais elle est triple au bout de deux siècles, puisque l'on a 2" 17 pour le premier, & 4" 34 pour le second. Elle augmente donc suivant les nombres 1, 3, 6, 10, &c., qui sont les sommes des nombres naturels 1, 2, 3, 4 &c. exprimées pour un nombre n de siècles par la formule $\frac{n.(n+1)}{2}$.

M. Euler avoit déjà donné une Table de la précession pour divers siècles; mais alors on ne connoissoit pas les masses des Planètes. A l'égard de l'équation séculaire que j'établis ici, on ne s'en étoit point encore occupé.

TABLE

*TABLE de la précession & du mouvement du Soleil
à chaque siècle, & de l'équation séculaire du Soleil.*

ANNÉES avant notre ère.	ÉQUATION séculaire, additive.	MOUVEMENT séculaire du Soleil.	PRECESSION séculaire.	NOMBRE d'années, avant 1700.
	M. S.	M. S.	D. M. S.	
800.	11. 45,2	45. 5,7	1. 22. 50,7	2500.
700.	10. 51,0	45. 7,9	1. 22. 52,9	2400.
600.	9. 58,9	45. 10,1	1. 22. 55,1	2300.
500.	9. 9,0	45. 12,3	1. 22. 57,3	2200.
400.	8. 21,3	45. 14,4	1. 22. 59,4	2100.
300.	7. 35,7	45. 16,6	1. 23. 1,6	2000.
200.	6. 52,3	45. 18,8	1. 23. 3,8	1900.
100.	6. 11,1	45. 20,9	1. 23. 5,4	1800.
0.	5. 32,0	45. 23,1	1. 23. 8,1	1700.
après notre ère.				
100.	4. 55,1	45. 25,3	1. 23. 10,3	1600.
200.	4. 20,4	45. 27,4	1. 23. 12,4	1500.
300.	3. 47,8	45. 29,6	1. 23. 14,6	1400.
400.	3. 17,5	45. 31,8	1. 23. 16,8	1300.
500.	2. 49,3	45. 34,0	1. 23. 19,0	1200.
600.	2. 23,2	45. 36,1	1. 23. 21,1	1100.
700.	1. 59,3	45. 38,3	1. 23. 23,3	1000.
800.	1. 37,6	45. 40,5	1. 23. 25,5	900.
900.	1. 18,1	45. 42,6	1. 23. 27,6	800.
1000.	1. 0,8	45. 44,8	1. 23. 29,8	700.
1100.	0. 45,6	45. 47,0	1. 23. 32,0	600.
1200.	0. 32,5	45. 49,1	1. 23. 34,1	500.
1300.	0. 21,7	45. 51,3	1. 23. 36,3	400.
1400.	0. 13,0	45. 53,5	1. 23. 38,5	300.
1500.	0. 6,5	45. 55,7	1. 23. 40,7	200.
1600.	0. 2,2	45. 57,8	1. 23. 42,8	100.
1700.	0. 0,0	46. 00,0	1. 23. 45,0	
1800.	0. 0,0			

Mém. 1786.

D d d

Dans les Tables du Soleil, il y en a une du mouvement pour les années (*Table III, p. 7*), où le mouvement est $45' 55'' 6$ par siècle, ce sera $46' 0''$ dans la prochaine édition; mais ce mouvement devoit être différent pour l'avenir & pour le passé: il faudroit le diminuer de $2'' 17$ pour chaque siècle passé, à partir de 1700, & l'augmenter d'autant pour chaque siècle à venir, à compter de 1800. J'ai marqué dans la cinquième colonne, le nombre d'années avant ou après notre siècle, qui répondent à chaque correction indiquée, dans la seconde colonne; pour sept cents ans, on trouve $1' 0'' 8$, c'est ce qu'il faudroit ajouter au mouvement d'ici à 700, ou en ôter sept cents ans avant ce siècle. Dans les deux cas il faut ajouter cette équation à la longitude calculée par le mouvement uniforme $46' 0''$. Mais il est inutile de déranger pour cela l'uniformité de nos Tables des moyens mouvemens, en y faisant entrer cette correction; on y supplée par l'équation séculaire; d'ailleurs, la différence n'est pas assez sensible, elle n'est pas même encore assez certaine: la valeur que j'emploie pour cette équation, est fondée sur la masse que j'attribue à Vénus, & celle-ci vient de la diminution séculaire de l'obliquité de l'écliptique, que j'ai jugée de $50''$ d'après les observations. Si celles qu'on fera dans la suite, la font trouver plus grande ou plus petite, notre équation séculaire changera. En attendant, il est très-facile d'ajouter cette équation aux longitudes que l'on calcule pour des siècles éloignés, sans changer l'uniformité de la Table des moyens mouvemens.

L'équation séculaire de la Lune, n'est pas de même espèce que celle du Soleil; Halley, Mayer, Dunthorn & moi, dans les *Mémoires de 1757, page 430*, avons cherché la valeur de cette équation, en supposant qu'elle suit la proportion du carré des temps: on ignoroit la cause de cette accélération. M. de la Grange ne trouvoit pas qu'elle pût venir de l'attraction solaire (*Mém. de Berlin, 1782*); M. l'abbé Bossut l'attribuoit à la résistance de la matière éthérée (*Prix de 1762, tome VIII des pièces des Prix*); & M. de la Place avoit trouvé qu'on pourroit l'expliquer par le temps qu'il faut à l'attraction de

la Terre pour arriver jusqu'à la Lune (*Mém. Sav. Étr. tome VII. 1773, page 181*). La quantité a été déterminée par Mayer, d'un degré pour deux mille ans ou pour l'an 300 avant l'ère vulgaire, ce qui fait 9" pour le premier siècle, à partir de 1700. Il n'avoit mis que 7" dans ses premières Tables en 1753. Dunthorn trouve 10" (*Philos. Transf. 1749*). J'ai trouvé à-peu-près la même chose dans le Mémoire cité. Mais depuis ce temps-là on a continué d'observer la Lune, & j'ai rapporté dans mes Éphémérides (*tome VIII, p. xcix*) soixante-sept observations de M. d'Agelet, faites en 1781, propres à déterminer le mouvement actuel de la Lune. M. Darquier a publié mille observations de la Lune, faites de 1761 à 1781, comparées avec les tables, par M. Méchain; & M. Carouge trouve que par un milieu entre toutes les erreurs, il y auroit 15" à ôter pour 1770 des époques des tables. M. de Lambre a trouvé 12" à ôter pour 1781, par les observations de M. d'Agelet. Ces deux résultats indiquent également un mouvement trop fort dans les tables de Mayer; ainsi le mouvement de la Lune paroît être actuellement plus petit d'environ 26" par siècle, que Mayer ne l'a fait, ou de 10' 7^d 53' 9" au lieu de 35". En diminuant ainsi le mouvement séculaire, on diminue l'accélération; il faut donc diminuer l'équation séculaire, qui ne sera plus d'un degré en deux mille ans, mais de 51' 20", ce qui fait 7" 7 pour le premier siècle, en supposant qu'elle augmente comme le carré des temps. Mais on la trouvera plus forte en augmentant les époques du Soleil qui sont dans les tables de Mayer, pour l'an 720 avant notre ère, soit d'après mon Mémoire sur la durée de l'année (*Mém. 1782*), soit d'après l'équation séculaire que j'ai établie ci-dessus; car il faut augmenter de tout cela l'accélération que l'on trouvoit par les anciennes observations.

Enfin, M. de la Place a annoncé à l'Académie, le 19 Décembre 1787, que la diminution de l'équation du Soleil, qui est de 19" par siècle, devoit produire une équation séculaire dans le mouvement de la Lune, & il donne 11" 135 pour le premier siècle, à partir de 1700; cela

fait $1^d 46' 51''$ pour l'année 700 avant J. C. & ne diffère que de quelques minutes de ce que donnent les observations Babylonniennes; mais elles ne comportent pas une bien grande exactitude, comme on en peut juger par ce que j'en ai rapporté (*Mém. 1757, p. 429*). Il est dit que la Lune commença à être éclipsée une heure bien entière (*ἕως παρῆστος*) après son lever. D'après cette indication, obligés de supposer tout le reste, nous pouvons bien courir les risques de nous tromper de 10 à 12' sur le lieu de la Lune tiré de l'observation.

D'un autre côté, la diminution séculaire de l'équation du Soleil, que je suppose $19'' 17$, renferme $4'' 94$ pour l'effet de Mars (*Mém. de Berlin, 1782*); mais la masse de Mars n'est connue que par conjectures, ainsi il peut y avoir encore 10 à 12' de doute sur la quantité d'accélération que fournit la théorie pour les observations éloignées: nous sommes donc obligés des deux côtés de rester dans les bornes de cette incertitude, que des observations exactes pourront lever dans la suite.

M. de la Place ajoute encore à cette équation séculaire un terme $0'' 044$, qui croît comme le cube des temps, & qui diminue de 10' l'équation séculaire pour deux mille quatre cents ans. Elle augmente l'équation séculaire après 1700, mais elle la diminue pour les siècles antérieurs, parce que le cube d'une quantité négative est négatif, quoique son carré soit positif. Cette nouvelle équation, que la théorie seule pouvoit faire connoître, est un nouvel avantage des recherches de M. de la Place.

Si l'on supposoit le mouvement de la Lune parfaitement connu pour ce siècle-ci, il faudroit encore ajouter à la longitude de la Lune, pour les siècles éloignés, l'équation séculaire que j'ai donnée pour le Soleil, & qui provient du mouvement des équinoxes; mais comme les observations anciennes ne nous font connoître le mouvement de la Lune que par le moyen de celui du Soleil, nous pouvons supposer que l'équation séculaire des équinoxes pour la

Lune, est confondue sensiblement dans celle dont nous avons parlé.

Le mouvement moyen qui a lieu actuellement, n'est donc pas celui qu'on trouvera quand le changement de l'équation du Soleil aura fait changer en un retardement, ce qui paroïssoit jusqu'à présent une accélération de la Lune, mais il suffit pour l'usage actuel de l'Astronomie. Dans les nouvelles Tables publiées en Angleterre en 1787, les époques ont été déjà diminuées de 3", ainsi il ne reste que 9" à ôter; mais pour 1791 il y aura 2",6 de plus en excès, & 1",7 de moins pour l'accélération; ainsi pour 1791, ces Tables, dont on se sert dans les calculs du *Nautical almanac*, donneront 10" de trop pour les longitudes de la Lune, en y comprenant l'erreur sur l'époque de 1781, celle de l'accélération & celle du moyen mouvement pour dix ans. C'est ce que je me propose de vérifier encore par un plus grand nombre d'observations.

