



M É M O I R E S

DE
MATHÉMATIQUE

ET

DE PHYSIQUE,
TIRÉS DES REGISTRES

de l'Académie Royale des Sciences.

Année M. DCCLXXXV.

M É M O I R E

SUR

LA QUANTITÉ DE L'APLATISSEMENT
DE LA TERRE

Par M. DE LA LANDE.

ON a souvent répété depuis Newton, que les observations faites sur la longueur du pendule, donnoient pour la Terre un aplatissement différent de celui que la théorie & les mesures des degrés paroissent indiquer: il

Mém. 1785.

A

MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

m'a semblé reconnoître entre ces trois sortes de moyens un accord assez satisfaisant pour mériter d'être remarqué.

La plus grande longueur du pendule à secondes, qu'on ait jamais observée, est celle qui résulte des observations de M. Lyons, lors du voyage de Phips à la mer glaciale; c'est peut-être la plus forte qu'il soit possible d'avoir, puisqu'elle a été faite à $79^{\text{d}} 50'$ de latitude; elle ne diffère même que de $\frac{7}{100}$ de ligne de la plus grande, c'est-à-dire, de celle qu'on observeroit sous le pôle même de la terre.

C'est aussi l'observation la plus exacte, puisqu'elle a été faite en deux endroits différens, les 16 juillet & 14 août, & avec un instrument très-bien fait, de M. Cumming, habile artiste d'Angleterre; & que cet instrument fut mis en expérience à Londres, avant le voyage & après le retour. Le résultat de ces importantes observations est que le même pendule accéléroit de $72'' \frac{1}{2}$ par jour, au Spitzberg, de plus qu'à Londres (*Voyage au pôle boréal, fait en 1773, par ordre du roi d'Angleterre, par Constantin-Jean Phips; Paris, 1775, in-4.° page 182*).

M. Samuel Horsley, secrétaire de la Société royale, publia, en 1774, des remarques sur ces observations, en quinze pages in-4.° (chez Elmsley), dans lesquelles on disoit qu'il y avoit quelques nuages répandus sur l'exactitude de ces observations. J'attendois ces remarques pour tirer mes conséquences; mais après avoir demandé longtemps le Mémoire de M. Horsley, je l'ai reçu enfin; je l'ai lu avec attention, & je n'y ai rien trouvé qui puisse préjudicier à l'authenticité de l'observation du pendule, faite au Spitzberg, par M. Lyons. 1.° L'erreur que M. Horsley a remarquée, & qu'il attribue au dérangement de la lunette, n'empêche pas que la comparaison du pendule avec l'horloge marine ne donne le résultat nécessaire. 2.° Il y a une seconde observation dans laquelle il n'y a point d'incertitude, & qui donne le même résultat que la première. Enfin j'ai eu la satisfaction de voir que ces observations s'éloignoient peu de celles que j'avois toujours regardées

comme les plus exactes; j'ai donc cru qu'on pouvoit en tirer un résultat précieux pour la figure de la Terre.

Pour déduire la longueur du pendule de l'observation de M. Lyons, il faut ajouter aux $72^{\frac{1}{2}}$, ou aux oscillations que le pendule faisoit de plus qu'à Londres, $10^{\circ}, 7'$ qu'il y a de plus à Londres qu'à Paris. Ce seroit $7^{\circ}, 7'$, suivant M. de Maupertuis (*Figure de la Terre, page 173*), & $9^{\circ}, 8'$, suivant M. Graham; mais j'aime mieux la déduire de la théorie (a); ainsi l'on trouve $83''$ à $79^{\circ} 50'$ de plus qu'à Paris, ce qui répond à $\frac{85}{100}$ de ligne pour la longueur du pendule (b).

Je suppose la différence entre le pendule équinoxial & celui de Paris, de $1^{\text{re}} \frac{46}{100}$, d'après M. Bouguer (*Figure de la Terre, page 342*), parce que cette différence étoit tirée de différentes observations: la somme de ces deux quantités est 2,31, qui, divisée par le carré du cosinus de la latitude, donne 2,38 pour l'allongement total du pendule, depuis l'équateur jusqu'au pôle.

Cette quantité est $\frac{1}{18}$ de la longueur du pendule sous le pôle, que je trouve de 441,35; ainsi la pesanteur augmente de $\frac{1}{18}$ depuis l'équateur jusqu'au pôle; l'augmentation est plus forte que $\frac{1}{210}$, quantité que l'on devoit trouver dans le sphéroïde homogène, suivant la théorie de Newton. C'est ce que l'on avoit déjà remarqué depuis long-temps: toutes les expériences, dit M. de Maupertuis, que les Académiciens envoyés par le Roi au Pérou, ont faites, tant à Saint-Domingue qu'à l'équateur, s'accordent avec les nôtres à donner l'augmentation de la pesanteur vers le pôle, plus grande que celle qui se trouve dans la

(a) Dès que l'augmentation totale de l'équateur au pôle est de 2 lignes, 38, cette quantité divisée par la différence des carrés des sinus de latitude, donne 11 centièmes ou 11" de temps; & cette quantité est assez petite pour qu'il n'y ait pas d'erreur à craindre en l'empruntant du calcul.

(b) Quand on a l'allongement du

pendule, on trouve facilement l'accélération qui en résulte, ou réciproquement, par le rapport de $50''$ à 51 centièmes de ligne; les 2,38 qu'il y a de l'équateur jusqu'au pôle, donnent $3' 54''$ d'accélération. M. Bradley trouvoit $3' 49''$, M. de Maupertuis, $3' 34''$; la table de Newton ne donneroit que $3' 8''$.

» table de Newton, & par conséquent la terre, selon la théorie, plus aplatie qu'il ne l'a faite ».

C'est encore la conséquence que M. Lyons tiroit des nouvelles observations; mais M. Horsley remarque, avec raison, que la seule conséquence légitime est une plus grande augmentation de pesanteur, & non pas un plus grand aplatissement. Ces deux choses ne doivent point se confondre; elles ne seroient égales que dans le sphéroïde homogène, & on ne peut plus le supposer tel, dès que l'augmentation de pesanteur est incontestablement plus grande que $\frac{1}{230}$. D'ailleurs, on ne conçoit point de cause qui puisse rendre l'aplatissement de la terre plus grand que $\frac{1}{230}$, tandis qu'il est aisé de comprendre qu'il peut être plus petit par le seul défaut de fluidité parfaite, qui a dû empêcher, dès le principe, que la terre ne prît tout l'aplatissement que la rotation tend à produire.

M. Clairaut donna, dès 1743, le dénouement de cette difficulté que Newton & tous ceux qui le suivirent n'avoient pas aperçue; il fait voir qu'en supposant la terre composée d'une infinité de couches elliptiques, dont les densités & les ellipticités varient d'une manière quelconque, l'augmentation de pesanteur doit différer de $\frac{1}{230}$, autant que l'aplatissement, l'une en plus & l'autre en moins (*Théorie de la figure de la terre, pages 243 & 249*).

Nous venons de trouver l'augmentation de pesanteur, $\frac{1}{185}$ qui est plus grand que $\frac{1}{230}$ de 0,001042; cette quantité ôtée de $\frac{1}{230}$, donne $\frac{1}{302}$ pour l'aplatissement de la terre.

Examinons actuellement la quantité d'aplatissement qui résulte de tous les degrés mesurés jusqu'ici. Cet article a été discuté par M. Boscovich, avec autant de sagacité que d'intelligence, soit dans la théorie, soit dans la pratique, par la solution du problème suivant. Étant donné un certain nombre de degrés, trouver la correction qu'il faut faire à chacun des degrés, en observant ces trois conditions; la première, que leurs différences soient pro-

portionnelles aux différences des sinus versés d'une latitude double; la seconde, que la somme des corrections positives soit égale à la somme des négatives; la troisième, que la somme de toutes les corrections, tant positives que négatives, soit la moindre possible, pour le cas où les deux premières conditions sont remplies.

Ayant appliqué la solution de ce problème à onze mesures de degrés, M. Boscovich trouve pour l'aplatissement $\frac{1}{311}$ (*Voyage astron. &c. 1770, page 512*). En n'employant que les six degrés qui s'accordent le mieux, & où les corrections ne passent pas 41 toises, il trouve $\frac{1}{300}$. Cette quantité diffère bien peu de celle que nous a donnée l'expérience du pendule; & le milieu, $\frac{1}{300}$, peut être regardé comme le résultat le plus vraisemblable qu'il soit possible d'adopter, quant-à-présent, pour le véritable aplatissement de la terre. Il est vrai que les degrés d'Amérique, du Cap & de Lapponie, s'écartent beaucoup de ce résultat moyen, mais cela tient probablement à l'hétérogénéité de la terre, ou à l'attraction des montagnes.

Nous avons encore deux bonnes déterminations de la longueur du pendule, qu'il est utile de comparer avec celle de M. Lyons. La plus ancienne est l'observation que M. Graham fit à Londres, en 1732, comparée avec celle que M. Campell fit à la Jamaïque, avec le même instrument; M. Bradley l'annonçoit comme étant très-exacte, & il en avoit fait le fondement d'une nouvelle table des longueurs du pendule (*Philos. transf. 1734*) (c); il y donne 228",3 pour l'accélération totale de l'équateur vers les pôles, pendant une révolution des fixes, ce qui fait 229" pour la durée du jour moyen; il y a donc 2^{lignes},34 pour l'allongement du pendule sous le pôle, au lieu de 2,38

(c) Cette observation donna lieu à M. de Bremond, de faire une collection complète de toutes les observations du pendule, dans la traduction française des Transac-

tions philosophiques. On y trouve aussi la carte que M. Buache publia en 1740, où toutes ces observations sont rapportées.

que nous avons trouvées par l'observation de M. Lyons. Cette observation de M. Graham donne l'augmentation de pesanteur $\frac{1}{189}$, d'où résulte un aplatissement de $\frac{1}{295}$; le milieu entre celui-ci & celui de $\frac{1}{297}$ que donne la mesure des degrés, est $\frac{1}{296}$.

L'observation des Académiciens françois en Lapponie, donne 0,60 de différence entre Paris & Pello, qui est à 66^d 48' de latitude: (M. de Maupertuis page 180); ajoutant 1,46 qu'il y a de Paris à l'équateur, on a 2,06, ce qui donne au pôle 2,44 pour l'allongement total du pendule, ou $\frac{1}{81}$ pour l'augmentation de pesanteur; cela fait $\frac{1}{315}$ pour l'aplatissement, ou $\frac{1}{306}$ en prenant le milieu entre le résultat des degrés & celui du pendule.

Ainsi l'observation du Spitzberg tient un milieu entre les deux que je viens d'examiner, & qui sont, selon toutes les apparences, les plus exactes; cela augmente la confiance qu'elle méritoit déjà, & comme elle est la plus concluante de toutes, elle me persuade que pour calculer les diminutions du sphéroïde terrestre, on peut employer l'aplatissement de $\frac{1}{320}$; ce qui fait pour la parallaxe horizontale supposée d'un degré, 11^e secondes de différence entre l'équateur & les pôles (d).

Il est vrai que l'observation de M. Mallet, à Ponoï (Mém. de Pétersbourg, 1769), donne 2,49 pour l'allongement du pendule, ce qui est encore un peu plus que l'observation de Pello; mais la différence n'est pas plus grande que celle qu'il y a entre les deux observations de Pello & du Spitzberg.

Ces calculs m'ont donné lieu de faire quelques remarques sur la véritable longueur absolue du pendule à Paris. Tout le monde l'a employé, d'après M. de Mairan, de 3^{pièces} 0^{pouces} 8^{lignes}, 57, à la température de 10 degrés. On peut compter sans doute sur l'exacritude de ses opérations;

(d) Le dénominateur 300 augmentera environ d'une unité pour chaque centième de ligne qu'on ajoutera au pendule polaire.

mais la toise étoit plus courte de $\frac{1}{17}$ de ligne que celle du Pérou qu'on a généralement adoptée. Je m'en suis assuré en faisant moi-même la comparaison, après avoir acquis la toise de M. de Mairan; il faut donc diminuer la longueur du pendule de 0^{lignes}, 045, & il restera 440,52 pour Paris. M. Graham, qui étoit un observateur fort exact & un artiste très-adroit, détermina la longueur du pendule, à Londres, en 1739, de 39,129 pouces anglois (*phil. transf. 1734*): suivant la comparaison faite à Londres, d'une toise que j'envoyai à M. Maskelyne (*philos. transf. 1768*), cela revient à 36^{pouces}, 8^{lignes}, 58 de France. Il ne dit pas de quel thermomètre il se servoit; mais vers le 25 août, temps où il faisoit ses expériences, la chaleur moyenne, à Paris, a été de 16 degrés (*Connoiss. des temps, 1775*): ainsi il faut ajouter $\frac{4}{100}$ à cette longueur du pendule. La différence des pendules, entre Paris & Londres, suivant la théorie, doit être de 11 à ôter; il restera 440,51, ce qui s'accorde fort bien avec le résultat de M. de Mairan.

M. Bouguer, qui avoit aussi fait des expériences sur le pendule avec M. de la Condamine, donne, pour Paris, 440,58; (*Fig. de la terre, page 342*): j'en ôte 6 qu'il ajoutoit pour le poids de l'air: cette réduction est à peu-près constante dans tous les pays, & comme nous n'opérons jamais dans le vide, il est inutile de dénaturer ainsi nos résultats.

M. Bouguer ne dit pas à quel degré de chaleur il faisoit ses expériences (*page 339*); mais il paroît qu'il avoit tout réduit à la température de Quito, qui est celle de Paris, au milieu du printemps, & ce sera plutôt 16 degrés que 10. Dans ce cas il faut ajouter 4 centièmes, & l'on aura 440,56 pour la température de 10 degrés. Ce troisième résultat excède un peu les deux autres, & je crois qu'on peut, en s'en rapprochant un peu, prendre 440,53 pour la longueur du pendule à Paris, à la température de 10 degrés, & 45 toises au-dessus du niveau de la mer, qui est la hauteur de la grande salle de l'observatoire: cette hauteur n'excède que de 10 à 12 toises celle où M. de Mairan observoit, &

8. MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

encore moins celle où habitoit M. Bouguer, dans la rue des Postes.

Le pendule sous l'équateur, à la même température, doit être supposé 439,07, puisque celui de Paris ayant été déterminé, par plusieurs observations, de 440,53, & la différence de Paris à l'équateur, fixée aussi de plusieurs manières à 1,46, la différence donne le pendule sous l'équateur; il diffère de la quantité donnée par M. Bouguer, 439,21, à raison de la température & de la réduction qu'il faisoit pour le vide. En 1740, les observations envoyées du Pérou donnoient 438,83 pour Quito; mais, suivant M. Bouguer, la différence est 33, depuis Quito jusqu'au niveau de la mer, toute réduction faite; ce seroit 439,16, qui approche encore plus de la quantité que j'ai choisie.

Le résultat de ce Mémoire est que les observations du pendule s'accordent avec la mesure des degrés, quand on discute les unes & les autres d'une manière convenable; elles s'accordent également avec la théorie & les loix de l'hydrostatique; mais pour apercevoir cet accord général, il faut renoncer à l'homogénéité de la terre, & admettre l'augmentation de densité des couches terrestres en allant vers le centre; supposition d'ailleurs très-naturelle, & qui est une suite nécessaire de la grande compression que les parties centrales éprouvoient lorsque la rotation de la terre déterminoit l'aplatissement que nous observons aujourd'hui.



MÉMOIRE