SUR LA
THÉORIE DE MERCURE.
Quatrième Mémoire.

Par M. DE LA LANDE.

LORSQUE j'ai déterminé astronomiquement, & par des observations exactes, tous les élémens de Mercure, j'ai négligé les perturbations qu'il éprouve par l'action des autres Planètes; je m'étois assuré d'avance qu'elles étoient tout-à-fait insensibles; mais je renvoyois à la fin de mon travail la discussion de cet objet: je terminerai donc actuellement mes recherches sur Mercure par le calcul de ces inégalités. J'ai choisi de préférence l'attraction de Vénus, parce que c'est la planète la plus voisine de Mercure, & que son attraction doit être évidemment la plus forte: la Terre, dont la masse est un peu moindre que celle de Vénus, est à une distance presque double; & Jupiter, dont la masse est de beaucoup supérieure à celle de Vénus, étant à une distance treize fois plus grande, n'a presque plus d'influence sur le mouvement de Mercure.

11 Décemb. 1771.

J'ai donné dans nos Mémoires, *année 1760*, l'expression générale & algébrique des inégalités que produit une Planète fort voisine d'une autre, en tenant compte de l'excentricité de la Planète troublée; car celle de Mercure étant très-grande, il étoit indispensable d'y avoir égard. Ces formules sont disposées de manière que les seules substitutions des nombres suffisent sans aucune connoissance de la théorie pour en avoir les valeurs, quelle que soit la Planète dont on veut connoître les dérangemens; cependant ces substitutions sont fort longues, & j'ai cru qu'il valloit la peine d'en donner ici les résultats; d'ailleurs, les coëfficiens de la série qui donne la distance d'une Planète à l'autre, sont encore l'objet d'un calcul assez long; il faut chercher la quadrature des courbes, en calculant un grand nombre d'ordonnées,

& cela n'avoit point encore été fait pour la diſtance de Vénus à Mercure, ni pour celle de la Terre. Je rapporterai donc auſſi le réſultat de ces calculs: les quatre coëfficiens qui ſont pour la Terre ont été cherchés chacun ſéparément par la quadrature d'une courbe particulière.

Soit la diſtance de Vénus au Soleil $= a = 1,8685$, la diſtance moyenne de Mercure au Soleil étant priſe pour unité, celle de Vénus à Mercure, qui quelquefois eſt $= a + 1$, quelquefois $= a - 1$, varie ſuivant les divers degrés de commutation; je la ſuppoſe $= s$; la commutation ou l'angle au Soleil entre Mercure & Vénus $= t$, l'anomalie vraie de Mercure $= u$, on a $\frac{1}{s^3} = (2a)^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{1+a^2}{2a} - \text{coſ.}\, t\right)^{-\frac{3}{2}}$
$- 3ea \left[(2a)^{-\frac{5}{2}} \left(\frac{1+a^2}{2a} - \text{coſ.}\, t\right)^{-\frac{5}{2}}\right] \left(\frac{1}{a} - \text{coſ.}\, t\right)$
$\text{coſ.}\, u = A + B\, \text{coſ.}\, t + C\, \text{coſ.}\, 2t + D\, \text{coſ.}\, 3t$, &c.
$- 3ea\, (A' + B'\, \text{coſ.}\, t + C'\, \text{coſ.}\, 2t + D'\, \text{coſ.}\, 3t$, &c.$)$
$\left(\frac{1}{a} - \text{coſ.}\, t\right) \text{coſ.}\, u$.

Voici la valeur des coëfficiens de ces deux ſuites, déjà multipliés, les premiers par $2a^{-\frac{2}{3}}$, les derniers par $2a^{-\frac{5}{2}}$; ces valeurs ſont ce qu'il y a de plus long à faire dans ces calculs.

$A = 0,32296$; $B = 0,46529$; $C = 0,29913$; $D = 0,18322$
$A' = 1,04768$; $B' = 1,87148$; $C' = 1,47961$; $D' = 1,09340$;
s'il s'agiſſoit de l'attraction de la Terre ſur Mercure, on trouveroit les valeurs

$A = 0,08331$; $B = 0,09146$; $C = 0,04338$; $D = 0,01989$;
il ſeroit facile de les ſubſtituer auſſi dans les formules ſuivantes. Elles ne renferment que des fonctions de ces coëfficiens, avec le rapport du moyen mouvement de Mercure à la différence des mouvemens moyens de Mercure & de Vénus; c'eſt-à-dire $n = 0,608501$.

Après les ſubſtitutions de ces valeurs numériques, il ne s'agit plus que de multiplier tous les termes par la maſſe de Vénus, celle du Soleil étant priſe pour unité, je la ſuppoſois de $\frac{1}{303550}$ lorſque j'ai fait les calculs; cela diffère peu du résultat que le passage de Vénus m'a fait adopter, & qui est de $\frac{1}{302346}$. Le logarithme de la masse s'ajoute avec celui de l'arc égal au rayon qui sert à convertir en secondes toutes ces formules, exprimées naturellement en fractions de la distance moyenne de la Planète troublée; la somme de ces deux logarithmes, qui est 9,8339209, s'ajoute à celui de chaque formule, pour la réduire en secondes.

Cette quantité que je viens d'adopter pour la masse de Vénus, dépend du diamètre de Vénus, que j'ai déterminé par la durée de sa sortie, le 6 Juin 1761, & de la parallaxe du Soleil qui paroît être de 8″ $\frac{1}{2}$, sur-tout depuis que nous avons reçu les observations faites à l'île de Taïti dans la mer du sud; la masse de la Terre étoit $\frac{1}{307831}$ en supposant la parallaxe du Soleil de 9 secondes *(Astronomie, article 3405)*, mais elle est comme le cube de la parallaxe; donc en employant 8″ $\frac{1}{2}$, on ne trouve plus que $\frac{1}{365412}$ pour la masse de la Terre, par rapport à celle du Soleil. Pour trouver actuellement celle de Vénus par rapport à la Terre, je considère que le diamètre de Vénus vu du Soleil, à la moyenne distance de la Terre, est 16″, 7, celui de la Terre étant 17 secondes; le cube du rapport de ces deux quantités, multiplié par la densité de Vénus, que nous estimons 1,2749 *(Astronomie, article 3410)* donne pour la masse de Vénus 1,20859, c'est-à-dire que Vénus pèse un cinquième de plus que la Terre.

Cette masse multipliée par celle de la Terre $\frac{1}{365412}$ donne la masse de Vénus $\frac{1}{302346}$ dont j'ai fait usage dans les calculs précédens: mais comme elle ne diffère pas d'un trois-centième de celle que j'ai employée il y a plus de dix ans, dans mes calculs de l'attraction, il n'y aura rien à changer aux résultats importans que j'en ai tirés, soit pour les nœuds des Planètes, soit pour le changement de l'obliquité de l'écliptique.

En donnant ici des formules générales pour les équations produites par l'action d'une Planète sur une autre, je joindrai à chacune l'évaluation en nombres, relativement à l'attraction de Vénus sur Mercure.

FORMULES des quatre principales inégalités de Mercure, produites par l'attraction de Vénus ou par celle de la Terre, ou en général d'une Planète plus proche du Soleil par celle qui est plus éloignée.

$$\text{I.} + \Big[\frac{2}{(1 - nn)\,n}\Big(B - aA + \frac{1}{a^2} - \frac{aC}{2} + \frac{aC}{n}$$
$$+ \frac{2}{na^2} - \frac{2aA}{n}\Big) + \frac{aA}{n^2} - \frac{1}{n^2 a^2} - \frac{aC}{2n^2}\Big]$$
$$\text{fin. } nu = -\,0'',8 \text{ fin. } t. \quad \text{II.} + \Big[\frac{1}{(1 - 4nn)\,n}\Big(C - \frac{aB}{2}$$
$$- \frac{aD}{2} + \frac{aD}{2n} - \frac{aB}{2n}\Big) + \frac{aB}{8nn} - \frac{aD}{8nn}\Big]$$
$$\text{fin. } 2nu = -\,1'',3 \text{ fin. } 2t. \quad \text{III.} \Big[\frac{ea}{n - 1}\Big(A + \frac{C}{2} - \frac{1}{a^3}\Big)$$
$$+ \frac{3ea}{(n - 1)(1 - nn)}\Big(\frac{B}{a} + \frac{1}{a^3} - A - \frac{C}{2}\Big)$$
$$- \frac{6ea}{n\,(n - 1\,(1 - nn)}\Big(A - \frac{C}{2} - \frac{1}{a^3}\Big) - \frac{ae}{n\,(n - 1)}$$
$$\Big(\frac{C}{2} + \frac{1}{a^3} - A\Big) + \frac{2ea}{1 - (n - 1)^2}\Big(-A + \frac{C}{2} + \frac{B}{a} + \frac{1}{a^3}\Big)$$
$$+ \frac{4ea}{(n - 1)\,[1 - (n - 1)^2]}\Big(-A + \frac{1}{a^3} - \frac{C}{2}\Big)$$
$$\frac{3ea}{(n - 1)\,[1 - (n - 1)^2]}\Big(2A' - \frac{B'}{a} - \frac{3aB'}{4} + C'$$
$$- \frac{aD'}{4}\Big) + \frac{3ae}{(n - 1)^2\,[1 - (n - 1)^2]}\Big(2A' - \frac{aB'}{2}$$
$$- C' + \frac{aD'}{2}\Big) + \frac{3ae}{2\,(n - 1)^2}\Big(\frac{aB'}{4} - A' + \frac{C'}{2}$$
$$- \frac{aD'}{4}\Big)\Big] \text{ fin. } (t - u) = -\,2''9 \text{ fin. } (t - u)$$

$$\text{IV.}\left\{\begin{aligned} &+ \frac{ea}{4n\,(2n - 1)}(B - D) + \frac{3e}{(1 - 4nn)\,(2n - 1)} \\ &\qquad \Big(C - \frac{AB}{2} - \frac{AD}{2} - \frac{AB}{2n} + \frac{AD}{2n}\Big) + \\ &(B + D)\Big(\frac{2ea\,(1 - n)}{(2n - 1)^2\,[1 - (2n - 1)^2]} - \frac{ea\,(1 - n)}{2\,(2n - 1)^2}\Big) \\ &\qquad + \frac{ea\,(1 - n)}{(2n - 1)\,[1 - (2n - 1)^2]}\Big(B - D - \frac{4C}{a}\Big) \end{aligned}\right.$$

$$+ \frac{3ae}{(2n-1)[1-(2n-1)^2]}\left(\frac{aA'}{2} - B' - \frac{C'}{a} - \frac{aC'}{2} + D' - \frac{aE'}{4}\right) + \frac{3ae}{(c2n-1)^2[1-(2n-1)^2]}\left(B' - aA' - D' + \frac{aE'}{2}\right) + \frac{3ae}{4(2n-1)^2}\left(aA' - B' + D' - \frac{aE'}{2}\right)\Big\}\ \text{fin.}\,(2t-u) = +2''6\ \text{fin.}\,(2t-u).$$

La plus confidérable de ces Équations, qui eft 2", 9 fin. $(t-u)$, dépend de la différence entre la commutation t, & l'anomalie de Mercure u; & puifqu'elle ne va pas à 3" fur l'orbite de Mercure vue du Soleil, elle eft encore moindre fur le mouvement vu de la Terre; ainfi, l'on peut fans aucune difficulté négliger ces Équations dans le calcul des obfervations, & dans la conftruction des Tables de Mercure. Auffi mes Tables de Mercure repréfentent toutes les obfervations que j'ai calculées, dans quelque pofition qu'elles aient été faites, avec toute la précifion des obfervations mêmes. le Père Filxmillner ayant fait, fur mon invitation, diverfes obfervations de Mercure, l'année dernière, & en ayant comparé les réfultats avec mes Tables, n'a trouvé qu'une feule fois 45 fecondes d'erreur, comme je l'ai remarqué dans le dernier recueil d'obfervations que j'ai lû à l'Académie.

Inégalités infenfibles.

J'ai dit au commencement de ce Mémoire, que l'action de Jupiter étoit encore plus négligeable dans la théorie de Mercure que l'action de Vénus; il me fuffira, pour en donner une idée, de rappeler ici l'évaluation du terme le plus confidérable qu'il y ait dans ces inégalités, en voici la valeur $\frac{21+36n}{16(n^2-n^4)}(1-n)^{\frac{8}{3}}$ fin. nu; Dans ce cas-ci, $n = 0{,}979686$, & la formule étant multipliée par la maffe de Jupiter $\frac{1}{1067}$, & par le nombre de fecondes que contient le rayon, en ajoutant le logarithme 2,28626, on trouve 0", 54 pour la valeur de cette équation; les autres font encore moindres; ces équations étoient déjà fort petites dans la théorie de Vénus, mais la fraction $1-n$, qui eft le mouvement de Jupiter, divifé par celui de Mercure,

Attraction de Jupiter.

& qui eſt élevée à la puiſſance $\frac{8}{3}$, forme une quantité beaucoup plus petite pour le mouvement de Mercure, qui eſt double de celui de Vénus; c'eſt-là ce qui rend l'équation précédente abſolument inſenſible.

Changement d'inclinaiſon.

J'ai diſcuté ailleurs le mouvement des nœuds de Mercure, produit par l'action de toutes les Planètes, (Aſtronomie, *article 1348;* Mémoires de l'Académie, *années 1758 & 1761*). Il me reſte à dire un mot du changement d'inclinaiſon qui en réſulte: le mouvement annuel du nœud de Mercure ſur l'orbite de Vénus eſt de 2″, 904, en vertu de l'attraction de Vénus; cette quantité multipliée par le ſinus de l'inclinaiſon de Vénus ſur l'écliptique 3^d 24′, & par le ſinus de la diſtance 28^d 7′, entre les nœuds de ces deux Planètes *(article 1378)*, donne 0″,08; ce qui nous apprend que l'inclinaiſon de Mercure ſur l'écliptique doit diminuer de 8″ par ſiècle à cauſe de l'attraction de Vénus.

Le changement du nœud de Mercure ſur l'orbite de Jupiter eſt de 1″, 576 par année. Cette quantité multipliée par le ſinus de l'inclinaiſon mutuelle de ces deux orbites 6^d 18′, & par le ſinus de la diſtance entre l'interſection commune & le nœud de Mercure 9^d 38′, donne 0″,029 pour la diminution annuelle de l'inclinaiſon de Mercure, ce qui fait 2″,9 par ſiècle; ainſi cet angle doit diminuer de 11 ſecondes tous les cent ans, en vertu des deux attractions de Vénus & de Jupiter: Celles de Mars & de Saturne ſont inſenſibles; cette quantité même de 11 ſecondes eſt trop petite pour avoir pu juſqu'à préſent être conſtatée par les obſervations.