MÉMOIRE

Sur la différence que l'aplatissement de JUPITER produit dans la demi-durée des Éclipses des Satellites.

Par M. DE LA LANDE.

L'APLATISSEMENT de Jupiter, ou la différence entre son axe & les diamètres de son équateur, est beaucoup plus considérable que l'aplatissement de la Terre; la figure de l'ombre que Jupiter répand derrière lui, diffère donc beaucoup de celle d'un cône, & les sections de l'ombre de Jupiter diffèrent beaucoup de la figure circulaire. 9 Juillet 1763.

Cependant on a supposé jusqu'ici cette ombre exactement circulaire dans les Tables des demi-durées des Éclipses des Satellites de Jupiter : cette supposition occasionne des erreurs, qu'il est important de connoître & de prévenir; elle nous fait juger les inclinaisons des orbites plus grandes qu'elles ne sont réellement; & elle nous fait trouver entre les différentes durées des Éclipses, un rapport qui est assez différent du vrai : il étoit donc nécessaire de faire entrer cet aplatissement de Jupiter dans le calcul de la durée des Éclipses. Je vais le faire par une méthode assez simple, qui n'exige pas plus de temps que l'hypothèse ordinaire pour connoître la durée d'une Éclipse.

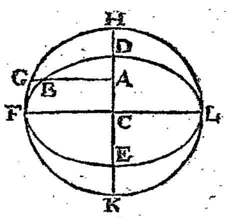
Le problème qu'il faut résoudre, si on le considère dans toute sa généralité, est celui-ci : *Trouver les ordonnées de la section de l'ombre qu'un sphéroïde produit à une distance quelconque, lorsqu'il est éclairé par une sphère lumineuse placée à une distance donnée, & sous une inclinaison quelconque par rapport à l'axe du sphéroïde.* Ce problème est fort compliqué; mais heureusement, dans l'usage de l'Astronomie, la question devient beaucoup plus simple; car l'axe de Jupiter étant presque perpendiculaire à ſon orbite & au rayon ſolaire qui forme le cône d'ombre, & les Satellites étant tous très-voiſins de Jupiter en comparaiſon de l'éloignement du Soleil, la figure de la ſection qu'ils traverſent dans l'ombre de Jupiter, ne diffère pas ſenſiblement de celle de la ſection de Jupiter lui-même, c'eſt-à-dire d'un méridien de cette Planète : comme la figure de Jupiter ne nous eſt pas aſſez connue pour diſtinguer le genre de courbure qu'ont ſes méridiens, je ſuppoſerai, ſuivant les loix de la gravité, que cette figure eſt une ellipſe *(Voyez mon* ASTRONOMIE*, page 1437),* & je prendrai pour ſection de l'ombre une ellipſe dont les axes ſoient dans le même rapport que ceux de Jupiter.

Aplatiſſement de Jupiter.

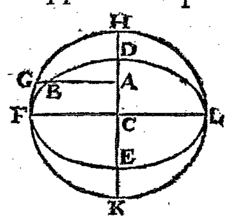
Je ſuppoſerai que le rapport des diamètres de Jupiter eſt celui de 13 à 14 : on a varié cependant ſur ce rapport. L'aplatiſſement de Jupiter fut obſervé par M. Caſſini avant l'année 1666, comme on le voit dans un ouvrage qu'il compoſa en latin ſur les taches des Planètes, dont il n'y a jamais eu que les premières feuilles d'imprimées ; M. Maraldi m'a fait voir ce fragment qui eſt *in-folio*, relié avec pluſieurs autres ouvrages de M. Caſſini, qui furent faits avant ſon arrivée en France & lorſqu'il habitoit encore en Italie ; il eſtima quelquefois que l'aplatiſſement de Jupiter étoit d'un dixième, quelquefois beaucoup moindre ; il jugea même en 1690, que le diſque étoit parfaitement rond *(Anciens Mémoires de l'Académie, tome II, page 108).* Mais l'aplatiſſement de Jupiter a été obſervé depuis, tant de fois, que le fait eſt inconteſtable : M. Caſſini lui-même en 1691 l'obſerva quelquefois de $\frac{1}{15}$; M. Pound, célèbre Obſervateur d'Angleterre, en 1723, avec la lunette de cent vingt-trois pieds, trouva ce rapport à peu-près de même, de 12 à 11, de $13\frac{3}{4}$ à $12\frac{3}{4}$, de $12\frac{2}{3}$ à $11\frac{2}{3}$, de $14\frac{1}{2}$ à $13\frac{1}{2}$ *(Newton, Princ. Math. liv. 3, prop. XIX, problème III, tome III, page 93 de l'édition de 1742)* ; & Newton lui-même le trouvoit par ſa théorie de $11\frac{1}{6}$ à $10\frac{1}{6}$, en ſuppoſant la denſité de Jupiter entièrement uniforme ; mais il obſervoit que la différence pouvoit être moindre, en ſuppoſant un peu plus de denſité vers le plan de l'Équateur, ce qui pouvoit avoir lieu par l'effet de la chaleur du Soleil.

M. Clairaut, dans sa Théorie de la figure de la Terre, imprimée en 1743, démontre *page 303*, que si toute la matière dont Jupiter est composé étoit infiniment rare par rapport à celle qui est au centre, ou ce qui revient au même, si les parties de sa masse, au lieu de s'attirer toutes mutuellement, étoient toutes poussées vers le centre, le rapport de l'axe au diamètre de l'Équateur seroit celui de 23,23 à 24,23, & l'aplatissement de $\frac{1}{34}$; mais en supposant Jupiter entièrement homogène, il trouve ce rapport de $90\frac{1}{2}$ à $100\frac{1}{2}$, c'est-à-dire l'aplatissement de $\frac{1}{10}$; les observations tiennent en effet un milieu entre ces deux extrêmes $\frac{1}{10}$ & $\frac{1}{24}$.

Suivant de nouvelles observations, que M. Short m'a communiquées dernièrement en Angleterre, le rapport de ses diamètres, par un milieu entre sept observations différentes, s'est trouvé celui de 584 à 515 ou de 14 à $13\frac{1}{3}$, avec un micromètre objectif de verre commun non achromatique; avec un micromètre objectif achromatique *(Voyez mon ASTRONOMIE, page 837)*, il a trouvé l'aplatissement entre $\frac{1}{13}$ & $\frac{1}{15}$, ce qui diffère bien peu de $\frac{1}{14}$; suivant une autre observation, que M. le Docteur Bevis m'a communiquée, le diamètre de l'Équateur de Jupiter, mesuré par lui & par M. Short le 30 Avril 1756, étoit de 40 secondes, & les deux diamètres étoient entr'eux dans le rapport de 27 à 25 ou de 14 à 13 moins $\frac{1}{27}$ de seconde. Je crois donc pouvoir m'en tenir ici au rapport de 14 à 13, & je passe à la méthode qu'on peut suivre pour appliquer cette mesure aux éclipses des Satellites.



Soit *FL* le diamètre de l'ombre de Jupiter, pris d'orient en occident; *LDFE* la section elliptique de l'ombre de Jupiter dont les axes *CD, CF* sont entr'eux comme 13 est à 14; *LHFK* le cercle circonscrit à cette ellipse; c'est le cercle dont on se sert dans nos Tables, lorsqu'on néglige d'avoir égard à l'aplatiſſement de la Terre ; le grand axe LCF de cette ellipſe eſt la route que ſuit un Satellite en oppoſition quand Jupiter eſt dans les nœuds de ſon orbite & de l'orbite du Satellite ; l'ordonnée AB au petit axe de l'ellipſe eſt la route du Satellite pendant ſon éclipſe lorſque la durée des Éclipſes eſt la moindre, c'eſt-à-dire quand Jupiter eſt à 90 degrés des



nœuds du Satellite, car alors la ligne des nœuds étant parallèle à LF, le Satellite en oppoſition ſe trouve dans ſes limites ; AG eſt la ligne que décriroit le Satellite ſi l'ombre étoit circulaire comme LHF : ainſi quand on ſuppoſe donnée l'inclinaiſon de l'orbite du Satellite, on a toujours dans l'ellipſe une demi-durée proportionnelle à AB plus petite que celle qui auroit lieu dans le cercle & qui eſt repréſentée par AG.

Pour trouver la demi-durée AB exprimée en temps, il faut connoître les lignes CF, CD & CA, exprimées de même en temps : or premièrement on connoît CF, qui eſt la demi-durée des éclipſes de chaque Satellite obſervée lorſque Jupiter eſt dans les nœuds des Satellites, ou la plus grande de toutes les demi-durées ; en voici les quantités telles que M. Wargentin les employe dans ſes Tables, d'après l'obſervation.

Demi-durée CF pour les quatre Satellites.	I. . . . . $1^h\ 8'\ 0''$	Logarithmes	3,610660
	II. . . . . 1. 25. 40.		3,710963
	III. 1. 47. 50		3,810904
	IV. 2. 23. 0		3,933487

Si l'on retranche de chacune de ces quantités une quatorzième partie, ou qu'on les multiplie par $\frac{13}{14}$, l'on aura pour chaque Satellite la valeur CD du petit axe, exprimée de même en ſecondes de temps.

Pour trouver CA, il faut employer la diſtance du Satellite au centre de Jupiter, calculée ſur la même échelle, c'eſt-à-dire exprimée en temps ; ou ce qui revient au même, le temps qu'un

I	4,3862730
II	4,6890625
III	4,9936342
IV	5,3624308

qu'un Satellite emploie à parcourir l'arc de $57^d\ 17'\ 44'',8$, égal au rayon de son cercle : en voici les logarithmes pour chaque Satellite, que je rapporte pour la facilité de ceux qui voudront faire les calculs dont j'ai à parler dans ce Mémoire.

Cette distance, multipliée par le sinus de l'inclinaison de l'orbite du Satellite & par le sinus de la distance de Jupiter au Nœud, donne la valeur de *CA* en décimales du rayon *CF*, suivant la théorie des Satellites que j'ai expliquée dans mon *Astronomie, page 1122*.

Règle pour trouver la demi-durée.

Connoissant la valeur de *CA* & celle de *CD*, on en prendra la somme & la différence, & l'on aura les segmens du petit axe *AD* & *AE*; suivant la propriété ordinaire de l'ellipse, on a cette proportion $CD : CF :: \sqrt{(AD \cdot AE)} : AB$; ainsi par une simple règle de Trois, l'on trouvera la valeur de *AB* en temps, ou la demi-durée de l'éclipse.

Exemple. Je suppose l'inclinaison du troisième Satellite $3^d\ 13'$, c'est la plus grande que l'on ait observée; & je vais chercher quelle doit être la demi-durée de ses éclipses quand la distance au Nœud est de 90 degrés. La distance du Satellite au centre de Jupiter, multipliée par sin. $3^d\ 13'$ & par sin. 90^d, se trouvera $5530''$; la valeur de *CF*, multipliée par $\frac{13}{14}$, sera de $6008''$; ajoutant les logarithmes de la somme & de la différence de ces deux quantités, avec celui de $\frac{14}{13}$, l'on aura le logarithme de $2529''$ ou $42'\ 9''$: c'est la demi-durée de l'Éclipse, en supposant l'inclinaison de $3^d\ 13'$. Ce calcul n'est pas si long que celui de l'hypothèse circulaire que j'ai expliqué dans mon *Astronomie, art. 2345, page 1123*.

Cette méthode suppose que la corde *AB* est exactement parallèle au grand axe *CF*. Mais cette supposition ne peut ici produire aucune erreur, parce que l'inclinaison n'est jamais que d'environ 3 degrés, & que dans les temps où cette inclinaison est la plus sensible, ce qui arrive dans les Nœuds, son effet est absolument nul, parce qu'il n'y a pour lors aucune différence entre le cercle & l'ellipse : au contraire, dans le cas où cette différence eſt la plus forte, ce qui arrive aux environs des limites, le défaut de parallélifme eſt inſenſible; car l'orbite *AB* devient comme parallèle au diamètre *CF*.

Pour faire voir combien eſt ſenſible la différence, que l'on a juſqu'ici négligée, entre le cercle & l'ellipſe; je ſuppoſe que la plus petite durée des Éclipſes eſt donnée par obſervation, auſſi-bien que la plus grande. Par exemple, la demi-durée eſt de 42′ 0″ pour le troiſième Satellite, quand l'inclinaiſon de ſon orbite eſt la plus grande & quand Jupiter eſt près des Nœuds: ſi l'on veut en conclure la valeur de l'inclinaiſon, on trouvera 3^d 28′ dans l'hypothèſe circulaire; mais on ne trouvera que 3^d 13′ dans l'ellipſe: cette errreur de 15 minutes ſur l'angle d'inclinaiſon peut influer conſidérablement ſur les autres parties de la théorie des Satellites.

Je ſuppoſe pour le quatrième Satellite, qu'on a reconnu la diſtance à laquelle Jupiter doit être par rapport aux Nœuds du Satellite pour qu'il ceſſe d'être éclipſé; c'eſt à 55 degrés environ, ſuivant les Tables de M. Wargentin: ſi l'on en déduit l'inclinaiſon de l'orbe du quatrième Satellite, on trouvera 2^d 36′ dans l'hypothèſe circulaire; mais on ne trouve que 2^d 24′ dans l'hypothèſe elliptique.

Il faut faire attention de ne pas employer l'inclinaiſon déterminée dans l'hypothèſe circulaire, c'eſt-à-dire 2^d 36′, pour trouver avec l'hypothèſe elliptique le temps où doivent finir les éclipſes du quatrième Satellite; on trouveroit plus de deux mois d'erreur; car au lieu de 55 ou 56 degrés, on n'auroit que $49^d \frac{2}{3}$ pour la diſtance de Jupiter au Nœud, dans le temps où le quatrième Satellite ne fait que raſer l'ombre de Jupiter ſans paroître éclipſé.

On peut auſſi demander quel rapport il y a entre *AB* & *AG*, c'eſt-à-dire entre la demi-durée qui a lieu réellement dans l'ellipſe, & celle qui auroit lieu ſi l'ombre étoit circulaire, l'inclinaiſon étant donnée. Pour cet effet, j'appellerai t la diſtance du Satellite au centre de Jupiter diviſée par le demi-diamètre de l'ombre, ou le rayon de l'orbite diviſé par le rayon de la ſection *LHFK*; c'eſt à peu près la cotangente de l'arc décrit par le Satellite au travers de l'ombre, pendant la durée des plus grandes éclipſes : on aura donc $CA = t \,.\, CF \,.\, \sin. I \,.\, \sin. D$ (*Astronomie, art. 2343*); ainſi $AD = CD - CA = \frac{13}{14} CF - t \,.\, CF \,.\, \sin. I \,.\, \sin. D$; $AH = CF - t \,.\, CF \,.\, \sin. I \,.\, \sin. D$; $AE = CE + CA = \frac{13}{14} CF + CA$; $AK = CF + CA$. Par la propriété ordinaire de l'ellipſe $AB = \frac{CF}{CD} \sqrt{(AD \,.\, AE)}$; mais $AG = \sqrt{(AH \,.\, AK)}$; donc $AB = AG \,.\, \frac{CF}{CD} \sqrt{\left(\frac{AD}{AH} \,.\, \frac{AE}{AK}\right)} =$ $\frac{14}{13} AG \sqrt{\left(\frac{\frac{13}{14} - t \,.\, \sin. I \,.\, \sin. D}{1 - t \,.\, \sin. I \,.\, \sin. D} \,.\, \frac{\frac{13}{14} + t \,.\, \sin. I \,.\, \sin. D}{1 + t \,.\, \sin. I \,.\, \sin. D}\right)}$.

Par cette formule, on trouvera facilement la demi-durée dans l'hypothèſe elliptique, lorſqu'on aura la demi-durée dans l'hypothèſe circulaire; on pourra voir un exemple de ce calcul en nombres dans ma *Connoiſſance des Mouvemens céleſtes* pour 1765, *page 284*. Je n'inſiſterai pas là-deſſus, parce que cette converſion d'une hypothèſe à l'autre n'eſt pas néceſſaire dans l'uſage des obſervations & des Tables.

Au reſte, quoique je ſuppoſe ici, avec M. Wargentin, que l'inégalité des demi-durées des éclipſes du ſecond & du troiſième Satellite provient toute entière du changement d'inclinaiſon; je n'ignore pas qu'une partie de ces inégalités peut venir de l'excentricité, de la ſituation des apſides, & des attractions mutuelles des Satellites : mais ces différens effets n'ont pas encore été ſéparés & diſcutés *, & je ne m'étois propoſé d'examiner ici que l'effet des inclinaiſons pour une orbite elliptique. Je crois qu'à l'avenir les Aſtronomes ne peuvent ſe diſpenſer d'avoir égard à une circonſtance auſſi remarquable, & dont le calcul eſt ſi ſimple par le moyen de la règle que j'ai donnée ci-deſſus.

* Depuis la lecture de ce Mémoire, l'Académie a propoſé, pour le ſujet du Prix qu'elle adjugera en 1766, l'examen des attractions mutuelles des Satellites; & nous avons lieu de croire qu'il en réſultera des travaux utiles & des Mémoires intéreſſans ſur les différentes parties de cette théorie.