MÉMOIRE

Sur la différence que l'on doit considérer entre des Triangles rectilignes & des Triangles sphériques très-petits.

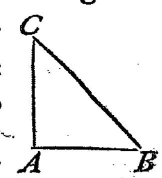
Par M. DE LA LANDE.

DANS toutes les recherches de l'Astronomie, on s'est permis jusqu'à présent de prendre pour rectiligne tout triangle sphérique, dont les côtés n'alloient pas au-delà d'un degré ou environ; on y étoit invité par la simplicité des formules & la commodité des opérations, mais je puis dire aussi qu'on y étoit forcé par l'état actuel des tables & des formules de Trigonométrie sphérique. S'il s'agissoit, par exemple, de trouver l'hypothénuse d'un triangle sphérique rectangle très-petit, dont on connoît les côtés, on seroit obligé d'employer les cosinus de ces côtés; & l'on ne pourroit éviter des erreurs de plusieurs secondes, si les côtés étoient très-petits, & qu'on employât les tables ordinaires de logarithmes, parce que les logarithmes des cosinus ne diffèrent souvent point dans nos tables sur un intervalle de plusieurs secondes; on en verra un exemple à la fin de ce Mémoire. Si au contraire l'on cherche un angle, on est obligé d'employer les sinus ou les tangentes de ces côtés extrêmement petits, dont les logarithmes croissent assez inégalement pour produire une inégalité sensible dans le résultat. Les différences des logarithmes des sinus entre 10 & 20 secondes, & entre 20 & 30, sont 3010 & 1761, les logarithmes eux-mêmes étant 5,6856; 5,9866; & 6,1627: on voit que l'inégalité est prodigieuse.

27 Juillet 1763.

La difficulté de ces sortes d'opérations, qui se répètent souvent dans le calcul des éclipses, m'a fait rechercher les erreurs que l'on peut y commettre. J'ai trouvé des formules commodes pour les cas les plus ordinaires, & j'ai fait une petite table de celle qui est la plus nécessaire : la même méthode peut s'étendre à d'autres cas, & donner ainsi le moyen de corriger les pratiques ordinaires, ou de faire du moins connoître les limites de leurs erreurs, dans les cas où l'on croira en avoir besoin.

Un des cas les plus ordinaires, & où l'erreur peut être la plus grande, est celui où, dans un triangle ABC, l'on cherche un angle B, par le moyen de l'hypothénuse BC & d'un côté: quand on considérera le triangle comme rectiligne, l'angle B sera toujours plus petit que lorsqu'on supposera le triangle sphérique; & il s'agit d'en trouver la différence, ou de trouver l'erreur que l'on commet en le supposant rectiligne.



Dans le triangle considéré comme rectiligne, on aura tang. $B = \frac{AC}{AB}$; & dans le triangle considéré comme sphérique, on aura tang. $B = \frac{\text{tang.}\, AC}{\text{sin.}\, AB}$ par les règles ordinaires de Trigonométrie.

On démontre dans les principes de calcul intégral, que la tangente d'un arc est égal à l'arc lui-même plus le tiers de son cube, en négligeant les termes ultérieurs de la série comme étant infiniment plus petits lorsqu'il s'agit des petits arcs. De même le sinus est égal à l'arc moins la sixième partie du cube de l'arc; ainsi nous aurons tang. $B = \frac{\text{tang.}\, AC}{\text{sin.}\, AB} = \frac{AC + \frac{1}{3} AC^3}{AB - \frac{1}{6} AB^3}$. Si l'on fait la division actuelle du numérateur par le dénominateur, & qu'on néglige les termes qui sont du troisième ordre, comme étant infiniment plus petits que ceux du second ordre; on aura $\frac{AC}{AB} + \frac{AC^3}{3AB} + \frac{AB \cdot AC}{6}$; & comme $\frac{AC}{AB}$ est la tangente de l'angle B dans le triangle rectiligne, il s'ensuit que la tangente de l'angle sphérique surpasse celle de l'angle rectiligne de la quantité $\frac{AC^3}{3AB} + \frac{AB \cdot AC}{6}$.

Connoissant cet excès ou cette petite différence des tangentes, on aura la différence des arcs correspondans, en multipliant la différence des tangentes par le quarré du cofinus de l'angle; ainfi l'excès de l'angle fphérique fur l'angle rectiligne fera $\left(\frac{AB \cdot AC}{6} + \frac{AC^3}{3\,AB}\right)$ cof. B^2.

Si dans cette expreffion on fubftitue les valeurs de $AB = CB$ cof. B & de $AC = CB$ fin. B, elle devient $\frac{1}{6}\,CB^2$ fin. B cof. $B^3 + \frac{2}{6}\,CB^2$ fin. B^3 cof. $B = \frac{CB^2}{6}$ fin. B cof. B (cof. $B^2 + 2$ fin. B^2) ou $\frac{CB^2}{6}$ fin. B cof. B ($1 +$ fin. B^2); mais fin. B cof. $B = \frac{1}{2}$ fin. $2\,B$, & fin. $B^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ cof. $2\,B$; donc l'expreffion fe change en celle-ci $\frac{CB^2}{6} \cdot \frac{1}{4}$ fin. $2\,B$ ($3 -$ cof. $2\,B$) ou $\frac{1}{24}\,CB^2$ fin. $2\,B$ ($3 -$ cof. $2\,B$): cette expreffion, réduite en fecondes, donnera la quantité qu'il faudra ajouter à l'angle B, trouvé par la Trigonométrie rectiligne, pour avoir l'angle qu'auroit donné la Trigonométrie fphérique.

Pour réduire CB^2 en fecondes, il faut divifer le quarré par le nombre de fecondes compris dans l'arc égal au rayon du cercle, qui eft de $57^d\ 17'\ 44'',8$, & dont le logarithme eft 5.3144251.

Si l'on avoit, par exemple, CB de 1 degré ou de 3600 fecondes, on doubleroit le logarithme de 3600 fecondes; & de ce double 7,11260, on ôteroit le logarithme 5,31443; on auroit 1,79818, logarithme de $62'',9 = CB^2$. Pour fentir la raifon de cette opération, qui nous a donné 62 fecondes pour le quarré de 3600 fecondes; il faut confidérer que l'arc BC, quoique de 3600 fecondes, n'eft pourtant en foi qu'une fraction du rayon, lequel vaut 57 degrés, &c. comme nous l'expliquerons ci-après: pour avoir la valeur de cette fraction, il faut divifer 3600 fecondes par 57 degrés; le quarré de cette fraction fera donc $\frac{CB}{57} \cdot \frac{CB}{57}$; & cette nouvelle fraction fera plus petite que fa racine, fuivant la nature de la fraction: pour convertir cette fraction en secondes, on la doit multiplier par 57 degrés; l'on a donc $\frac{CB}{57} \cdot \frac{CB}{57} \cdot 57$, ou, ce qui revient au même, $\frac{CB^2}{57^d}$. Ainsi l'on voit qu'il suffit de diviser d'abord par $57^d\ 17'$, réduit en secondes, le quarré du nombre de secondes que contient CB, pour avoir en secondes le quarré de CB.

Au moyen de la formule $\frac{1}{24} CB^2$ sin. $2B(3 - \text{cos}. 2B)$, il a été facile de construire la table suivante, & il seroit aisé de la prolonger au-delà; on y voit la quantité en secondes & en décimales de secondes qu'il faut ajouter à l'un des angles d'un petit triangle rectiligne, pour avoir l'angle d'un triangle sphérique dont les côtés sont les mêmes que ceux du triangle rectiligne.

ANGLE.	HYPOTHÉNUSE.			ANGLE.	HYPOTHÉNUSE.		
	30'.	60'.	90'.		30'.	60'.	90'.
Deg.	Sec.	Sec.	Sec.	Deg.	Sec.	Sec.	Sec.
0.	0,0	0,0	0,0	45.	2,0	7,9	17,8
5.	0,2	0,9	2,0	50.	2,0	8,2	18,4
10.	0,5	1,8	4,0	55.	2,1	8,2	18,5
15.	0,7	2,8	6,2	60.	2,0	8,0	18,0
20.	1,0	3,8	8,5	65.	1,8	7,3	16,4
25.	1,2	4,7	10,5	70.	1,6	6,3	14,2
30.	1,4	5,7	12,8	75.	1,3	5,1	11,5
35.	1,6	6,5	14,6	80.	0,9	3,5	7,9
40.	1,8	7,3	16,4	85.	0,5	1,8	4,0
45.	2,0	7,9	17,8	90.	0,0	0,0	0,0

Ainsi je suppose que dans le triangle rectiligne ABC l'hypothénuse BC fût de 3600″ ou 60′, l'un des angles B de 20^d, & l'autre angle C de 70^d; on trouvera dans la table précédente, vis-à-vis de 20^d, la quantité 3″,8; & vis-à-vis de 70^d, la quantité 6″,3 dans la colonne 60′: cela montre qu'on doit ajouter $3''{,}8$ à l'angle B, & $6''{,}3$ à l'angle C, pour avoir ces angles tels qu'on les eût trouvés par la Trigonométrie ſphérique, & en ſuppoſant le triangle ABC formé par trois arcs de grands cercles ſur la ſurface de la ſphère.

J'ai dit ci-deſſus que AB & AC étoient néceſſairement des fractions du rayon; & elles ne peuvent en effet s'employer ſous une autre forme, dès-lors qu'on veut avoir un réſultat qui ſoit de même eſpèce, ou qui ſoit homogène avec la quantité donnée. En effet, ſi l'on employoit les lignes AB & AC en ſecondes, comme des longueurs abſolues, & qu'on les multipliât l'une par l'autre, le produit ne ſauroit donner des ſecondes homogènes avec celles de AB & de AC; car une ſurface ne ſauroit être homogène avec une ligne: or le produit de deux lignes eſt néceſſairement une ſurface; pour que le produit de AB par AC ſoit homogène avec AB & AC elles-mêmes, il faut que l'une & l'autre ſoient employées comme fractions d'une même quantité, ſavoir du rayon ou de la circonférence du cercle ou de quelqu'autre quantité, pour avoir enſuite au produit une fraction de cette même quantité. C'eſt la raiſon du précepte & de la méthode que j'ai donnés plus haut.

Je paſſe actuellement à un cas où l'erreur eſt beaucoup moindre, mais dans lequel on a ſouvent beſoin de la plus grande préciſion. Je ſuppoſe qu'on connoiſſe les deux côtés AB, AC, & que l'on veuille trouver l'hypothénuſe BC; l'erreur qu'on peut commettre ſur cette hypothénuſe BC, en la ſuppoſant, comme dans les triangles rectilignes, égale à $\sqrt{(AB^2 + AC^2)}$, eſt trop petite en comparaiſon de celle que j'ai calculée ci-deſſus: mais je dois au moins en donner la meſure pour raſſurer les Aſtronomes à cet égard; d'ailleurs, la formule de cette erreur aura l'avantage de pouvoir ſervir dans des triangles beaucoup plus grands que celle dont on vient de voir la détermination, ce qui ſera quelquefois très-commode. Dans le triangle ſphérique ABC, on a, par la Trigonométrie ſphérique, $\text{coſ.}\ CB = \text{coſ.}\ AB\ \text{coſ.}\ AC$; & parce que le coſinus d'un arc très-petit eſt égal au rayon moins la moitié du quarré de l'arc, on aura $1 - \frac{CB^2}{2} = (1 - \frac{AB^2}{2}) (1 - \frac{AC^2}{2}) = 1 - \frac{AB^2}{2} - \frac{AC^2}{2} + \frac{AB^2 . AC^2}{4}$; donc $CB^2 = AB^2 + AC^2 - \frac{AB^2 . AC^2}{2}$, & $CB = \sqrt{(AB^2 + BC^2)} - \frac{1}{8} \frac{AB^2 . AC^2}{BC}$ (*Voyez mon Astronomie, art.* 2625). Mais dans le triangle rectiligne on auroit $CB = \sqrt{(AB^2 + AC^2)}$; donc l'excès de l'hypothenuse rectiligne sur l'hypothénuse sphérique sera $\frac{AB^2 . AC^2}{8 BC}$, quantité qu'il faut ôter de l'hypothénuse trouvée par l'addition des quarrés des côtés, pour avoir celle qu'on eût trouvée par la Trigonométrie sphérique, si elle eût été appliquable à ces cas-là. Cette quantité n'est que d'un huitième de seconde pour des côtés d'un degré: mais dans le cas où l'on a besoin d'une extrême précision, on ne pourroit se passer de cette formule; la Trigonométrie sphérique manque totalement, du moins dans ses méthodes directes.

Pour évaluer en secondes la formule $\frac{AB^2 . AC^2}{8 BC}$, après avoir employé les quantités AB & AC en secondes, telles que les observations ou les tables astronomiques les donnent; il faut diviser le résultat par le quarré de 57 degrés, réduit en secondes, ou ôter, du logarithme de la formule, le logarithme constant 0,6288502. La raison de cette opération est claire, si l'on observe que chacune des cinq quantités de cette formule doit être d'abord divisée par 57 degrés, pour être réduite en décimales, & que le total doit être ensuite multiplié par 57 degrés, pour être réduit en secondes: ainsi la formule revient à ceci $\frac{AB . AB . AC . AC . 57 . 57 .}{8 . 57 . 57 . 57 . 57 . BC}$, ou plus simplement $\frac{AB^2 . AC^2}{8 . 57 . 57 . BC}$.

EXEMPLE. On suppose dans un triangle sphérique ABC, que les côtés AB & AC soient chacun d'un degré, & l'on demande

demande l'hypothénuse *BC*. Par la Trigonométrie rectiligne, on doit doubler le quarré de $3600''$, l'on aura $259200''$ dont la racine est $1^d\ 24'\ 51'',2$; c'est la valeur de l'hypothénuse cherchée, en supposant que le triangle est rectiligne : si l'on suppose le triangle sphérique, & qu'on emploie les logarithmes de huit chiffres, tels qu'ils sont dans les Tables imprimées à Londres en 1742, par les soins de *Gardiner*, dont nous nous servons communément, on trouvera $1^d\ 23'\ 53''\frac{1}{3}$, parce que l'erreur qui provient des chiffres négligés va presque à l'unité, & que l'unité dans le logarithme de cet arc, répond à 2 secondes environ. Mais si nous prenons les logarithmes de onze chiffres, tels qu'on les trouve dans ULACQ, *Trigonometria artificialis*, *Goudæ*, *1633*, livre extrêmement rare actuellement; on aura $1^d\ 24'\ 51'',1$, arc plus petit de $0'',1$ ou à peu-près un dixième de seconde, que celui qui a lieu quand le triangle est rectiligne. Ma formule donne à peu-près la même chose; car si l'on quadruple le logarithme de $3600''$, qu'on en ôte 0,62885, le logarithme de 8, & celui de $5091''$ qui est la valeur de *BC*, on a le logarithme 8,98646, auquel répond $0'',097$ ou environ un dixième de seconde; mais on a cette petite erreur par le moyen de ma formule, avec beaucoup plus de précision.