

M É T H O D E

Pour trouver avec la plus grande précision le mouvement horaire de Vénus ou de Mercure dans leurs passages sur le Soleil.

Par M. DE LA LANDE.

30 Juillet
1762.

LA manière d'observer & de calculer le passage de Vénus, que j'ai expliquée, & dont j'ai fait l'application dans mon Mémoire sur celui de 1761, exige une connoissance rigoureuse & exacte du mouvement horaire; j'ai reconnu cependant qu'avec les calculs ordinaires des Tables astronomiques, il étoit difficile de ne pas se tromper d'une demi-seconde sur la quantité de ce mouvement horaire: c'est cette erreur que je me propose d'éviter, en calculant jusqu'à la précision d'un centième de seconde, le mouvement horaire tant héliocentrique que géocentrique; l'inclinaison de l'orbite apparente, qui dépend du rapport de ce mouvement horaire avec celui du Soleil, se trouvera beaucoup plus exactement, au lieu que par la méthode ordinaire les Astronomes ne pouvoient s'assurer à 10 ou 15" près de la quantité de cette inclinaison.

Quand je parle de calculer le mouvement géocentrique, à un centième de seconde près, je ne veux pas dire que tous les élémens, dont on est obligé de se servir, comportent une si grande précision; mais il s'agit d'observer la cohérence des hypothèses, c'est-à-dire, de trouver rigoureusement, à un centième de seconde, & sans le secours des Tables, ce qui doit résulter des élémens qui y sont employés, en les faisant servir directement à trouver le mouvement horaire.

Je puis même ajouter que l'inégalité de ce mouvement horaire dans l'espace de quelques heures, négligée jusqu'ici par tous les Astronomes, & qui mérite d'être employée lorsqu'il s'agit

s'agit de Mercure, se trouvera par ma méthode, avec la précision toute entière du calcul, c'est-à-dire, à un centième de seconde, & mieux encore, si on le veut; tous les élémens des Tables sont assez connus pour cela. J'ai indiqué * la difficulté de trouver ce mouvement horaire de Mercure, en parlant du passage de 1753.

* *Mém. Acad.*
1756, p. 265.

Pour trouver le mouvement horaire vu du Soleil, avec le moins d'opérations possibles, je suivrai la méthode indirecte des anomalies vraies, dont j'ai donné le procédé & la démonstration dans les Mémoires de l'Académie pour 1755, p. 204, & qui consiste dans ces deux analogies:

La racine de la distance périhélie
est à la racine de la distance aphélie,
comme la tangente de la moitié de l'anomalie vraie
est à la tangente de la moitié de l'anomalie excentrique.

Le rayon
est au sinus de l'anomalie excentrique,
comme l'excentricité réduite en secondes
est au nombre de secondes qu'il faut ajouter à l'anomalie
excentrique pour avoir l'anomalie moyenne.

L'excentricité réduite en secondes, n'est autre chose que la distance du centre au foyer de l'ellipse divisée par la moitié du grand axe, & multipliée par $57^d. 17' 44'', 5$, dont le logarithme est 53144251.

Ces deux analogies se font pour chaque planète par le moyen de deux logarithmes constans; le premier est 0,0030320 pour Vénus, & 0,0907135 pour Mercure; le second est 3,1583617 pour Vénus, & 4,6280604 pour Mercure: le premier s'ajoute au logarithme de la tangente de la moitié de l'anomalie vraie pour avoir celui de la tangente de la moitié de l'anomalie excentrique; le second s'ajoute au logarithme du sinus de cette anomalie excentrique trouvée, pour avoir le logarithme du nombre de secondes dont l'anomalie vraie la surpasse, l'une & l'autre étant comptée depuis l'aphélie jusqu'à 180 degrés

Mém. 1762.

N

seulement, c'est-à-dire en supposant qu'on prenne le supplément de ces anomalies si elles surpassent 180 degrés.

Si l'on nomme u l'anomalie vraie, x l'anomalie excentrique, a la distance aphélie, e l'excentricité, p la distance périhélie, & n le nombre de secondes qu'il faut ajouter à l'anomalie excentrique pour avoir la moyenne, la première analogie donnera

$\text{tang. } \frac{1}{2} x = \text{tang. } \frac{1}{2} u \sqrt{\frac{a}{p}}$; donc en prenant les différentielles des deux termes de cette équation, on aura $\frac{dx}{(\cos. \frac{1}{2} x)^2}$

$= \sqrt{\frac{a}{p}} \cdot \frac{du}{\cos. \frac{1}{2} u^2}$; donc la valeur de dx est celle-ci,

$du \frac{\cos. \frac{1}{2} x^2}{\cos. \frac{1}{2} u^2} \sqrt{\frac{a}{p}}$, d'où il sera aisé, quand on connoîtra le

mouvement vrai, de trouver le mouvement de l'anomalie excentrique avec la même précision.

La seconde analogie donne cette équation, $n = e \sin. x$; donc $dn = e \cos. x dx$; ainsi connoissant le mouvement de l'anomalie excentrique, on aura la petite quantité dn , qu'il faut ajouter au mouvement de l'anomalie excentrique, pour avoir le mouvement de l'anomalie moyenne.

Ainsi de la supposition qu'on a faite sur le mouvement vrai, l'on a déduit le mouvement moyen; si ce dernier diffère de celui que l'on connoît par les Tables, & qui est constant, ce sera une preuve que la première supposition n'a pas été exacte, & l'on verra facilement de combien elle s'écartoit du vrai.

Je demande, par exemple, le mouvement vrai de Vénus vu du Soleil le 6 Juin 1761, au temps du passage qu'on observa sur le Soleil & à l'heure de la conjonction; l'anomalie vraie étoit de 10^h 8^d 8', l'anomalie excentrique 10^h 7^d 49', & l'anomalie moyenne 10^h 7^d 30'; le mouvement horaire moyen est de 4' 0",32, suivant les Tables, comme il est aisé de le trouver, en divisant le mouvement de 100 jours par 2400, afin d'avoir en centièmes de secondes le mouvement horaire moyen.

Pour trouver exactement combien le mouvement vrai diffère

du mouvement moyen, supposons le mouvement vrai déjà à peu près connu, par exemple de $4' 9''$, qui est le mouvement moyen lui-même, il est permis de prendre l'un pour l'autre dans cette première supposition : nous allons chercher le mouvement moyen qui devroit avoir lieu si le mouvement vrai étoit de $4' 0''$.

On doublera le logarithme du co-sinus de la moitié de l'anomalie excentrique, ou de $26^d 5'$; on en ôtera le double du logarithme du co-sinus de la moitié de l'anomalie vraie, ou de $25^d 56'$, on aura le logarithme $9,998841$, qui, ajouté avec le logarithme constant $0,003032$, qui est la moitié de la différence des logarithmes de la distance aphélie & de la distance périhélie, & avec celui du mouvement vrai, supposé de $4' 0''$, donnera le logarithme de $4' 1'',02$; c'est le mouvement de l'anomalie excentrique, répondant à ce mouvement vrai.

Le logarithme de ce mouvement ajouté avec celui du co-sinus de l'anomalie excentrique & avec le logarithme de l'excentricité réduite en secondes, qui pour Vénus est $7,843955$, donne le logarithme d'un nombre de secondes, qu'il faut soustraire dans le second & le troisième quart d'anomalie moyenne, ajouter dans le premier & le quatrième, pour changer le mouvement de l'anomalie excentrique en mouvement moyen; cette quantité se trouve dans notre exemple de $1'',02$, qui ajoutée avec $4' 1'',02$, donne $4' 2'',04$, mouvement moyen, plus grand de $2'',04$ que le mouvement vrai supposé. Cela suffit pour me faire connoître ce qu'il faut ôter du mouvement moyen des Tables $4' 0'',32$ pour avoir le mouvement vrai; il sera par conséquent de $3' 58'',28$. En recommençant le calcul, avec cette supposition du mouvement horaire vrai, les autres nombres étant toujours les mêmes, on trouve, pour le mouvement moyen $4' 0'',32$, le même que celui des Tables, ce qui prouve l'exactitude du mouvement vrai supposé.

Ayant trouvé le mouvement horaire de la planète dans son orbite, il faut trouver ce mouvement horaire sur l'écliptique.

Soit NC l'orbite de la planète, ND l'écliptique, CD la

*La Figure est
à la suite
du Mémoire
sur la Comète
de 1762.*

latitude de la planète, N l'angle d'inclinaison, on aura AC pour le mouvement de la planète dans son orbite, que nous venons de trouver; on a aussi $AB = AC \sin. C$; & comme par la trigonométrie ordinaire, $\sin. C : R :: \cos. N : \cos. CD$,

on a $\sin. C = \frac{\cos. N}{\cos. CD}$; donc $AB = \frac{AC. \cos. N}{\cos. CD}$, mais ED , qui est le vrai mouvement en longitude rapporté sur l'écliptique, est égal à $\frac{AB}{\cos. CD}$; donc $ED = \frac{AC. \cos. N}{\cos. CD^2}$.

Si la latitude CD est très-petite, comme dans les passages de Vénus & de Mercure sur le Soleil, le carré du co-sinus est sensiblement égal à l'unité, & l'on a simplement $ED = AC \cos. N$, en sorte qu'il suffit de multiplier le mouvement horaire trouvé ci-dessus $3' 58'', 28$ dans l'orbite, par le co-sinus de l'inclinaison de l'orbite, qui est de $3^d 23' 20''$, & l'on aura le mouvement horaire en longitude $3' 57'', 86$.

Pour trouver le mouvement horaire en latitude, je considère que $CB = AC. \cos. C$; mais par la trigonométrie sphérique, on a $\cos. C = \cos. ND. \sin. N$; donc $CB = AC. \cos. ND \sin. N$, inclinaison. Ainsi, comme la distance ND de Vénus à son nœud n'étoit que de $1^d 4'$ au temps de la conjonction de Vénus sur le Soleil, on trouvera facilement que CB , ou le mouvement horaire en latitude, étoit de $14'', 08$.

Le mouvement horaire du Soleil étoit alors de $2' 23'', 40$, la différence des mouvemens horaires en longitude étoit donc de $74'', 46$; si l'on fait cette proportion, la différence des mouvemens horaires est au mouvement horaire de Vénus en latitude, comme le rayon est à la tangente de l'angle, on aura $8^d 28' 47''$, inclinaison de l'orbite relative de Vénus, en supposant le Soleil fixe, ou si l'on veut, l'inclinaison sous laquelle Vénus nous paroïssoit s'éloigner du Soleil.

Le cosinus de cette inclinaison apparente étant multiplié par la différence des mouvemens horaires du Soleil & de Vénus sur l'écliptique, donne le mouvement relatif de Vénus sur son orbite apparente, vu du Soleil, par rapport à la Terre supposée fixe $95'', 50$.

Lorsqu'on a les mouvemens de Vénus vus du Soleil, par rapport à la Terre supposée fixe, il ne faut que les augmenter dans le rapport des distances de Vénus à la Terre & au Soleil, pour avoir les mouvemens de Vénus vus de la Terre; il suffira d'ajouter le logarithme constant $0,400243$, différence des logarithmes des distances de Vénus au Soleil & à la Terre, aux logarithmes de $94'',46$, $95'',50$ & $14'',08$. On aura ainsi les mouvemens vus de la Terre par rapport au Soleil, supposé fixe, savoir, $3' 57'',40$ sur l'écliptique, $4' 0'',03$ sur l'orbite relative de Vénus, & $35'',39$ par rapport à l'écliptique, c'est-à-dire pour le mouvement en latitude.

Cette méthode sera très-utile dans les passages de Mercure sur le Soleil pour déterminer avec précision l'inégalité qui a lieu dans son mouvement pendant l'espace de quelques heures que dure le passage; il seroit même impossible de trouver, à une ou deux secondes près, cette inégalité par l'usage ordinaire des Tables astronomiques, il faut absolument recourir à des formules semblables à celles que j'ai données dans ce Mémoire.

On trouvera une application plus étendue dans le xi^{e} Livre de mon *Astronomie*, qui est actuellement sous presse, où j'ai donné un Traité assez étendu des passages de Mercure & de Vénus sur le Soleil.

