

M É M O I R E
SUR LES INTERPOLATIONS,
Ou sur l'usage des différences secondes, troisièmes, &c.
dans les Calculs astronomiques.

Par M. DE LA LANDE.

LA méthode générale des interpolations a été traitée dans toute la généralité possible par M. Newton (*a*), & ensuite par M. Cotes (*b*); depuis ce temps-là M. Mayer dans les Mémoires de Pétersbourg, & M. l'abbé de la Caille dans ses Éléments d'Astronomie, en ont tiré des formules plus commodes, & applicables à l'usage de l'Astronomie. 24 Juillet
1761.

Cependant le cas qui se présente journellement dans les Tables, ou dans les calculs d'observations, est susceptible d'une règle infiniment plus simple, on y trouve presque toujours des suites de nombres dont les secondes différences sont constantes, ou à peu près. Si l'on veut, pour une plus grande perfection, aller encore au de-là, & ne supposer de constantes que les troisièmes différences, j'ai reconnu que le calcul en étoit encore très-simple, & qu'on pouvoit tenir compte de l'inégalité qui en résulte avec un seul terme algébrique fort aisé à réduire en nombres; la précision qui en résulte est si grande, que les logarithmes poussés jusqu'à vingt chiffres, même ceux des premiers nombres, & les lieux de la Lune calculés seulement de 24 en 24 heures, malgré toutes les inégalités de cette planète n'en exigent pas davantage, c'est ce que j'espère de faire voir dans ce Mémoire.

M. Mouton, Chanoine de Lyon, qui publia en 1670 un Livre intitulé, *Observationes diametrorum, &c.* y donna une Table des déclinaisons du Soleil pour chaque minute de longitude, calculée non-seulement en secondes, mais en tierces, il

(a) *Philos. Nat. Principia Mathematica.*

(b) A la fin du Livre intitulé, *Harmonia Mensurarum.*

assure dans ce livre que pour les 5400 nombres qu'elle contient, il n'a eu besoin que de calculer 90 nombres par la méthode rigoureuse, & que la division des secondes différences lui avoit fourni tous les autres sans erreur, même d'une tierce.

Il avoit fait d'abord cette remarque à l'occasion des logarithmes, dont les différences quoique très-inégales, fournissent des différences secondes beaucoup plus approchantes de l'égalité, & je ne doute pas que cette remarque dont il se dit le premier auteur, n'ait suffi seule pour le porter à calculer la Table des logarithmes de sinus & de tangentes qui est dans la bibliothèque de l'Académie: ce manuscrit précieux renferme toutes les secondes des quatre premiers degrés & des quatre derniers dans la même forme que les logarithmes de Briggs publiés en 1633, de dix en dix secondes seulement; & il est évident que pour en faire le calcul, M. Mouton n'a eu besoin que d'employer les secondes différences des logarithmes de Briggs, ou de les calculer de minute en minute seulement, avec un chiffre de plus pour en conclure tous les autres. Il seroit à souhaiter que cet ouvrage pût être publié pour la célérité de nos calculs; mais l'entreprise seroit immense, & les Astronomes n'auront de long temps un semblable secours.

M. Mouton ne s'arrêta pas à la supposition des secondes différences constantes, il examina le cas des troisièmes & des quatrièmes différences, & donna des préceptes pour remplir & étendre une Table dans laquelle on ne supposeroit constantes que les troisièmes ou les quatrièmes différences. Il examine même (*page 384*) le cas le plus général, *étant donnée une suite de nombres où il n'y ait de constant que les dernières différences quelconques, trouver un nombre quelconque de termes intermédiaires qui suivent la même loi*, il en attribue la solution à M. Regnaud, à qui il avoit proposé cette question; mais la méthode dans tous les cas consiste à faire une Table en lettres pour la remplir en nombres, je me propose dans ce Mémoire de trouver un terme quelconque sans passer par les précédents, & sans être obligé de connoître les autres.

Le triangle arithmétique de M. Pascal contient toutes les

suites de nombres dont il est question dans ce problème, la première colonne ne renferme que l'unité, ainsi la différence est toujours zéro, la seconde colonne renferme la suite des nombres naturels, & la différence est toujours 1, la troisième colonne formée par l'addition des termes de la précédente, est celle des nombres dont la seconde différence est 1, la quatrième colonne est celle des nombres, dont la troisième différence est 1, la cinquième colonne est celle des nombres dont la quatrième différence est 1, &c.

Triangle arithmétique.

1.									
1.	1.								
1.	2.	1.							
1.	3.	3.	1.						
1.	4.	6.	4.	1.					
1.	5.	10.	10.	5.	1.				
1.	6.	15.	20.	15.	6.	1.			
1.	7.	21.	35.	35.	21.	7.	1.		
1.	8.	28.	56.	70.	56.	28.	8.	1.	
1.	9.	36.	84.	126.	126.	84.	36.	9.	1.
&c.									

La somme d'un nombre m de termes pris dans la première colonne verticale, est m ; pris dans la seconde colonne, est $\frac{m \cdot (m+1)}{1 \cdot 2}$; dans la troisième colonne, $\frac{m \cdot (m+1) \cdot (m+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$. Dans la quatrième colonne, la somme d'un nombre m de termes, sera $\frac{m \cdot (m+1) \cdot (m+2) \cdot (m+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$, &c. Par exemple, on veut avoir la somme des six premiers termes dans la quatrième colonne, c'est-à-dire, dans celle dont les troisièmes différences sont constantes; on aura $\frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 126$.

128 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

La somme de six termes dans une colonne, est la même chose que le sixième terme de la colonne suivante, & ainsi des autres.

Dans la colonne des nombres, dont la seconde différence est l'unité, si l'on prend les nombres de deux en deux, par exemple, 1, 6, 15, 28, on aura une suite de nombres dont la seconde différence est 4; si on les prend de trois en trois, la seconde différence sera 9; si on les prend de quatre en quatre, elle sera 16: on peut démontrer d'une manière générale, que si on les prend m à m , la seconde différence sera m^2 .

En effet, lorsqu'on prend les nombres m à m , & qu'on en fait les différences & les secondes différences, on ajoute d'abord ensemble un nombre m de différences premières qui toutes croissoient de 1 sur la précédente; on ajoute donc $1 + 2 + 3 + 4$, &c. jusqu'à m , le total de cette suite est $\frac{m \cdot (m + 1)}{2}$; on ajoute ensuite des différences premières

jusqu'au nombre $2m$, dont la somme est $\frac{2m \cdot (2m + 1)}{2}$; &

ôtant la première, on a $\frac{3mm + m}{2}$ pour l'autre différence: or

ces deux différences premières $\frac{m \cdot m + 1}{2}$ & $\frac{3mm + m}{2}$, diffèrent évidemment de la quantité mm ; donc mm est la différence des différences, c'est-à-dire, la différence seconde.

On démontreroit par un raisonnement semblable, que si la différence d'un ordre quelconque n est l'unité, & que les nombres soient pris ensuite m à m , la différence de la nouvelle suite sera m^n .

Ainsi la troisième différence dans des nombres pris deux à deux sera 8, la quatrième différence sera 16, &c.

Après ces notions générales, nous allons donner la méthode pour trouver une partie proportionnelle exacte entre des nombres qui n'ont que les secondes différences de constantes.

Des

Des secondes Différences.

Supposons quatre nombres, comme pourroient être quatre longitudes ou quatre observations, de douze en douze heures, dont les différences vont en croissant, mais qui ont leurs secondes différences constantes, telles que 144,

H.	Nomb.	Diff.	Diff. 2 ^{es}
0.	0.		
12.	78.	78.	144.
24.	300.	222.	144.
36.	666.	366.	

& qu'on veuille chercher le nombre qui répond à une des heures intermédiaires quelconques; par exemple à 22, on concevra une suite nouvelle de nombres répondans à 14, 16, 18 & 22 heures, dont les secondes différences seront trente-six fois moindres que 144, puisque l'on subdivise l'intervalle en six parties.

Si on le partageoit en douze parties, la seconde différence de la nouvelle suite seroit 144 fois moindre que celle des nombres proposés, puisque 144 est le carré de 12.

Dans l'exemple proposé, la seconde différence se trouve donc en divisant 144 par 36, qui est le carré du nombre des six intervalles qu'on se propose de remplir, elle sera donc égale à 4.

Connoissant la seconde différence, il faut avoir les six différences premières, pour cet effet ayant pris la sixième partie de la différence 222 des nombres proposés, on aura 37; cette différence suffiroit, si les nombres croissoient uniformément, mais elle doit varier elle-même, puisque les nombres varient inégalement. Voici la règle: si vous avez deux intervalles, c'est-à-dire un nombre seulement à chercher, prenez la moitié de la seconde différence; si vous avez trois intervalles, c'est-à-dire deux nombres à trouver, prenez une fois la seconde différence; si vous avez trois nombres, ce sera $1\frac{1}{2}$; pour quatre nombres, ce sera deux fois; & en général, si m est le nombre des intervalles, $m - 1$ celui des quantités que l'on cherche, $\frac{m-1}{2}$ sera le nombre de fois qu'il faudra prendre, la seconde différence trouvée.

Mém. 1761.

R

130 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

Cette seconde différence ainsi multipliée, doit se retrancher de la partie proportionnelle si les différences premières vont en croissant, & s'ajouter si elles alloient en diminuant.

Dans l'exemple précédent, la seconde différence 4 étant prise deux fois & demi, on aura 10 à ôter de 37, qui est la partie proportionnelle ou la sixième partie de la différence des deux nombres; il reste 27, qui sera la première différence; on ajoutera 4, qui est la seconde différence trouvée, quatre fois de suite, parce qu'il y a cinq nombres à chercher, on aura 27, 31, 35, 39, 43, qui sont les cinq différences qui doivent donner les cinq nombres cherchés 101, 136, 171, 210, 253.

Après avoir conçu le cas particulier, on entendra facilement la méthode générale.

Soit d^2 la différence seconde des quantités données, m le nombre des intervalles qu'il s'agit de remplir, $\frac{d^2}{m^2}$ fera la différence seconde dans la nouvelle suite; si l'on nomme x la différence première, on aura les suivantes en ajoutant de suite $\frac{m^2}{d^2}$.

$$\text{Différences premières} \left\{ \begin{array}{l} x \\ x + \frac{d^2}{m^2} \\ x + \frac{2d^2}{m^2} \\ x + \frac{3d^2}{m^2} \\ \text{\&c.} \end{array} \right\} \text{ \& pour un nombre } m$$

d'intervalles, on aura, en additionnant toutes ces différences, $mx + \frac{d^2}{m^2} (1 + 2 + 3 + 4, \text{\&c.})$ qui toutes ensemble doivent faire la différence première qu'il y a entre les deux nombres donnés, que nous appellerons d .

$$\text{Donc } x = \frac{d}{m} - \frac{1 + 2 + 3 + 4, \text{\&c.}}{m} \cdot \frac{d^2}{m^2};$$

ainsi les différences premières seront

$$\begin{array}{l}
 \frac{d}{m} = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + \dots + m}{m} \cdot \frac{d^2}{m^2} \\
 \frac{d}{m} = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + \dots + m}{m} \cdot \frac{d^2}{m^2} + \frac{d^2}{m^2} \\
 \frac{d}{m} = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + \dots + m}{m} \cdot \frac{d^2}{m^2} + \frac{2d^2}{m^2} \\
 \frac{d}{m} = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + \dots + m}{m} \cdot \frac{d^2}{m^2} + \frac{3d^2}{m^2} \\
 \text{\textit{&c.}}
 \end{array}$$

Dans la série $1 + 2 + 3 + 4$, il y aura autant de termes que le nombre m en contient; ainsi la somme sera $\frac{m \cdot (m + 1)}{2}$; ainsi $\frac{1 + 2 + 3 + 4 + \dots + m}{m} = \frac{m + 1}{2}$.

Si l'on cherche le quatrième nombre, il est évident qu'il suffit d'ajouter les quatre premières différences avec le nombre donné; & en général, si l'on cherche le terme p , on aura $p \cdot \left(\frac{d}{m} - \frac{m + 1}{2} \cdot \frac{d^2}{m^2} \right) + (1 + 2 + 3 + \dots + p - 1) \cdot \frac{d^2}{m^2}$, en prenant dans cette dernière suite autant de termes qu'en contient $p - 1$, ainsi la série $(1 + 2 + 3 + \dots + p - 1) \cdot \frac{d^2}{m^2} = \frac{p \cdot p - 1}{2} \cdot \frac{d^2}{m^2}$; donc la différence entière sera

$$p \frac{d}{m} - p \left(\frac{m + 1}{2} - \frac{p - 1}{2} \right) \frac{d^2}{m^2},$$

mais $p \frac{d}{m}$ est la partie proportionnelle cherchée à la manière ordinaire, ou la correction dépendante de la première différence; donc celle des secondes différences est $\frac{p}{2} (m - p) \frac{d^2}{m^2}$,
C. Q. F. T.

Des troisièmes Différences.

Dans une suite de quantités dont les troisièmes différences sont constamment d^3 , si l'on en veut interpoler un nombre d'autres, & partager chaque intervalle en un nombre m de parties, la troisième différence constante de la nouvelle suite sera $\frac{d^3}{m^3}$.

132 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

Pour trouver les secondes différences de la nouvelle suite, il faut se rappeler ce que nous avons dit ci-dessus, que $\frac{d^2}{m^2}$ est la seconde différence constante d'une suite de termes interpolés, lorsque le nombre des intervalles est m , & que la différence seconde de la suite donnée est d^2 ; ainsi nous aurons pour les secondes différences cherchées,

$$\frac{d^2}{m^2} + \frac{d^3}{m^3}, \quad \frac{d^2}{m^2} + \frac{2d^3}{m^3}, \quad \frac{d^2}{m^2} + \frac{3d^3}{m^3}, \quad \&c.$$

Pour trouver les premières différences de la nouvelle suite, supposons la première x , ajoutant successivement les secondes différences que nous venons de trouver, nous aurons

$$\begin{aligned} x \\ x + \frac{d^2}{m^2} + \frac{d^3}{m^3} \\ x + \frac{2d^2}{m^2} + \frac{3d^3}{m^3} \\ x + \frac{3d^2}{m^2} + \frac{6d^3}{m^3} \\ x + \frac{4d^2}{m^2} + \frac{10d^3}{m^3}, \quad \&c. \end{aligned}$$

& comme toutes ces différences premières doivent faire la différence entière des deux nombres entre lesquels on interpole, nous aurons pour déterminer la valeur de x , cette équation,

$$5x + (1 + 2 + 3 + 4) \frac{d^2}{m^2} + (1 + 3 + 6 + 10) \frac{d^3}{m^3} = d.$$

Dans ces deux suites, il y aura toujours un nombre de moins que m ne contiendra d'unités.

$$x = \frac{d}{5} - \frac{1 + 2 + 3 + 4}{5} \frac{d^2}{m^2} - \frac{1 + 3 + 6 + 10}{5} \frac{d^3}{m^3}.$$

Substituant cette valeur de x , nous aurons pour les premières différences cherchées,

$$\begin{aligned} \frac{d}{5} - \frac{1 + 2 + 3 + 4}{5} \frac{d^2}{m^2} - \frac{1 + 3 + 6 + 10}{5} \frac{d^3}{m^3} \\ \frac{d}{5} - \frac{1 + 2 + 3 + 4}{5} \frac{d^2}{m^2} - \frac{1 + 3 + 6 + 10}{5} \frac{d^3}{m^3} \\ + \frac{d^2}{m^2} + \frac{d^3}{m^3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{5} - \frac{1+2+3+4}{5} \frac{d^2}{m^2} - \frac{1+3+6+10}{5} \frac{d^3}{m^3} \\ + \frac{2d^2}{m^2} + \frac{3d^3}{m^3} \\ \frac{d}{5} - \frac{1+2+3+4}{5} \frac{d^2}{m^2} - \frac{1+3+6+10}{5} \frac{d^3}{m^3} \\ + \frac{3d^2}{m^2} + \frac{6d^3}{m^3} \cdot \text{&c.} \end{aligned}$$

Il faut actuellement considérer qu'il y aura toujours autant de différences premières que d'intervalles dans la subdivision que l'on fait, c'est-à-dire, qu'à la place du diviseur 5, on mettra par-tout m .

Ce qui nous intéresse principalement, est de trouver la somme de toutes ces différences pour un terme donné, sans être obligé de les connoître chacune séparément. Soit p le nombre de termes auquel on veut s'arrêter, on aura pour la somme de toutes les différences précédentes,

$$p \left(\frac{d}{m} - \frac{1+2+3+4}{m} \frac{d^2}{m^2} - \frac{1+3+6+10}{m} \frac{d^3}{m^3} \right) \\ + (1+2+3) \frac{d^2}{m^2} + (1+3+6) \frac{d^3}{m^3}.$$

Dans les deux dernières suites il y aura toujours un nombre de moins que p ne contiendra d'unités; & substituant les valeurs de $1+2+3+4$, &c. $1+3+6$, &c.

$$p \left(\frac{d}{m} - \frac{m \cdot m - 1}{2 \cdot m} \frac{d^2}{m^2} - \frac{m + 1 \cdot m \cdot m - 1}{2 \cdot 3 \cdot m} \frac{d^3}{m^3} \right) \\ + \frac{p \cdot p - 1}{2} \frac{d^2}{m^2} + \frac{p + 1 \cdot p \cdot p - 1}{2 \cdot 3} \frac{d^3}{m^3}$$

ainsi la correction des secondes différences est comme ci-devant,

$$- p \cdot \frac{d^2}{m^2} \left(\frac{m-1}{2} - \frac{p-1}{2} \right), \text{ ou } - p \left(\frac{m-p}{2} \right) \frac{d^2}{m^2}$$

& celle des troisièmes différences fera

$$p \cdot \frac{d^3}{m^3} \left[\frac{(p+1) \cdot (p-1) - (m+1)(m-1)}{2 \cdot 3} \right]; \\ \text{ou } - p \frac{d^3}{m^3} \left(\frac{m^2 - p^2}{6} \right),$$

134 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

Exemple, soit une suite de quantités calculées de 24 en

HEURES.	QUANTITÉS.	DIFFÉRENCES.	2. ^{es} DIFFÉR.	3. ^{es} DIFFÉR.
0.	0.			
24.	2324.	2324.		
48.	18472.	16148.	13824.	
72.	62268.	43796.	27648.	13824.
96.	147536.	85268.	41472.	13824.

24 heures, & qu'il faille trouver la quantité qui répond à 50 heures, ou à la douzième partie de l'intervalle entre 48 heures & 72 heures, on aura $p = 1$, & $m = 12$, 1.^o on prendra la douzième partie de la différence première 43796, & l'on aura $3649\frac{2}{3}$; 2.^o $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{144}$ de la seconde différence 27648, c'est-à-dire, 1056; 3.^o comme $mm - pp$

$$= 143, \text{ on trouvera } p \cdot \frac{d^3}{m^3} \cdot \frac{m^2 - p^2}{6} = 190\frac{2}{3};$$

ajoutant donc la correction de la différence première, & retranchant les deux autres, on aura 20875 qui est la quantité cherchée, répondante à 50 heures.

Si l'on fait $p = \frac{1}{2} m$, on trouvera que l'expression précédente se réduit à $\frac{1}{16} d^3$; & c'est la plus grande erreur que l'on puisse commettre, en supposant nulles les troisièmes différences.

On pourroit étendre facilement cette théorie aux quatrièmes différences, mais le calcul est trop compliqué, & les quantités qui en résultent sont trop petites, pour que dans l'Astronomie pratique l'on ait jamais besoin d'en faire usage; en effet, je trouve que la plus grande erreur qui puisse avoir lieu en les négligeant, n'est que $\frac{3}{128}$ de la quatrième différence; & comme l'on prendra un milieu entre les troisièmes différences dans les cas où l'on négligeroit les quatrièmes, on ne craindrait jamais qu'une erreur de la quatre-vingt-cinquième partie de la quatrième différence, quantité qui pour des lieux de la Lune calculés de 24 en 24 heures seulement, ne peut aller qu'à environ une ou deux secondes dans les cas extrêmes,

quantité enfin dont on ne tiendra jamais compte, tant que les Tables de la Lune ne seront calculées qu'en secondes.

Prenons pour exemple l'équation du centre de la Lune de 13 en 13 degrés dans les points où elle varie le plus inégalement, comme dans la Table suivante.

	ÉQUATION du centre.	Premières DIFFÉRENCES.	Secondes DIFFÉR.	Trois. ^{es} DIFFÉR.	Quatr. ^s DIFFÉR.
6 ^h 28 ^d	3 ^d 9' 1"	1 ^d 12' 39"			
7. 11	4. 21. 40	0. 57. 2	15' 37"	4' 7"	
7. 24	5. 18. 42	0. 38. 46	18. 16	2. 39	1' 28"
8. 7	5. 57. 28	0. 19. 8	19. 38		
8. 20	6. 16. 36				

On voit que la différence quatrième ne va qu'à 88 secondes, ainsi l'erreur que l'on commettrait en la supposant nulle, ne seroit que de 1 seconde, on en trouveroit à-peu-près autant en examinant la Table des variations & des érections, mais il faut bien considérer qu'il suffiroit de supposer deux de ces équations défectueuses seulement d'une seconde chacune pour diminuer de 11 secondes la quatrième différence, ainsi l'on ne sauroit répondre à 30 ou 40 secondes près de cette quatrième différence, parce que le calcul fait avec des Tables qui ne sont calculées qu'en secondes, n'est pas susceptible d'une précision plus grande que 3 ou 4 secondes.

Il n'est pas difficile de faire voir que l'usage même des secondes différences, avec des calculs faits de 24 en 24 heures, est suffisant dans les recherches ordinaires de l'Astronomie, & dans toutes celles de la Navigation, car les troisièmes différences que l'on néglige ne pouvant être que d'environ 10 minutes de 24 en 24 heures, la seizième partie n'est jamais de 40 secondes, ainsi en la négligeant & prenant un milieu entre les secondes différences correspondantes, on ne peut pas se tromper de 20 secondes, qui souvent dans l'Astronomie, & toujours dans la Navigation, sont une quantité imperceptible: d'ailleurs il est fort rare que la différence aille si loin, il n'y a que certains

136 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

mois où l'évection se combine avec l'équation du centre & la variation, de manière à augmenter cette inégalité, ordinairement elles se détruisent en partie. Je prendrai pour exemple quelques lieux de la Lune calculés très-rigoureusement pour le mois de Janvier 1763, temps auquel j'ai trouvé la marche la plus irrégulière que j'eusse remarqué entre plusieurs années.

1763.	LONGITUDE de la LUNE.	MOUVEM. femi-diurne.	2. ^{es} DIFFÉR.	3. ^{es} DIFFÉR.
JANV. 28 à midi.	3 ^r 24 ^d 30' 12"	7 ^d 26' 31"		
à minuit.	4. 1. 56. 43	7. 30. 15	+3' 44"	1' 13"
29 à midi.	4. 9. 26. 58	7. 32. 46	+2. 31	1. 21
à minuit.	4. 16. 59. 44	7. 33. 56	+1. 10	1. 16
30 à midi.	4. 24. 33. 40	7. 33. 50	-0. 6	1. 32
à minuit.	5. 2. 7. 30	7. 32. 19	-1. 31	1. 2
31 à midi.	5. 9. 39. 42	7. 29. 46	-2. 33	0. 52
à minuit.	5. 17. 9. 35	7. 26. 21	-3. 25	
FÉVR. 1 à midi.	5. 24. 35. 56			

Pour juger de l'erreur qu'il y auroit à négliger les troisièmes différences de 24 en 24 heures, choisissons dans les calculs précédens les longitudes pour le midi de chaque jour, & nous en déduirons par les règles d'interpolation qui ont été données ci-dessus, les longitudes à minuit, nous verrons qu'elles ne different pas sensiblement de celles qui ont été calculées rigoureusement.

1763.	Longit. de la LUNE pour le midi.	MOUVEMENT diurne.	MOUVEM. femi-diurne.	Différences	le Quart.	Milieu.
JANV. 28.	3 ^r 24 ^d 30' 12"	14 ^d 56' 46"	7 ^d 28' 23"			
29.	4. 9. 26. 58	15. 6. 42	7. 33. 21	+4' 48"	+1' 12"	-34"
30.	4. 24. 33. 40	15. 6. 9	7. 33. 4 ¹ / ₂	-0. 16 ¹ / ₂	-0. 4	+40
31.	5. 9. 39. 49			-5. 1	-1. 15 ¹ / ₂	
FÉVR. 1.	5. 24. 35. 56	14. 56. 7	7. 28. 3 ¹ / ₂			
I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.

Cette

Cette Table fournit un exemple des calculs que l'on doit faire pour conclurre avec facilité les longitudes à minuit de celles qu'on a calculées rigoureusement pour le midi de chaque jour. Voici la méthode que M. Pingré employoit dans son État du Ciel, & qu'il me conseilla de suivre lorsque j'entrepris de faire la même chose pour la Connoissance des Temps.

1.^o On écrit entre les longitudes leurs premières différences ou le mouvement diurne, 2.^o on en prend la moitié, & on l'écrit à côté dans la colonne suivante, c'est le mouvement semi-diurne, 3.^o on prend les différences de ces mouvemens semi-diurnes, en observant de mettre $+$ à côté, lorsque le mouvement semi-diurne croît, & $-$ lorsqu'il va en diminuant, ce qui signifie que cette différence est positive ou négative, 4.^o on prend le quart de ces secondes différences, & on l'écrit à côté; 5.^o on prend un milieu entre ces quarts, & on écrit ce milieu en changeant le signe vis-à-vis de l'intervalle, par exemple le milieu entre $+$ 1' 12" & $-$ 4", feroit $+$ 34, on écrit donc entre ces deux nombres $-$ 34 secondes, 6.^o on retranche ce nombre lorsqu'il est négatif, on l'ajoute, lorsqu'il est positif au mouvement semi-diurne qui lui correspond dans la quatrième colonne, par exemple, on ôte 34 secondes de $7^d 33' 21''$, on ajoute 40 secondes avec $7^d 33' 4''\frac{1}{2}$, & l'on a le mouvement semi-diurne vrai entre midi & minuit, $7^d 32' 47''$ pour le 29, & $7^d 33' 44''\frac{1}{2}$ pour le 30; ainsi en ajoutant ces mouvemens semi-diurnes avec les longitudes pour midi, on a $4^f 16^d 59' 45''$, & $5^f 2^d 7' 24''\frac{1}{2}$ pour les longitudes à minuit, qui diffèrent l'une d'une seconde, l'autre de 5 secondes $\frac{1}{2}$ du calcul rigoureux qui se trouve dans la Table précédente. Si l'on observe après cela que j'ai fait choix d'un cas particulier où l'inégalité m'avoit paru la plus grande que j'eusse encore remarquée, on sera persuadé qu'il n'y a aucune erreur à déduire les longitudes de la Lune pour toute la journée de celles qu'on a calculées pour le midi, dès qu'on y fait entrer l'équation des secondes différences.

Il est aisé de remarquer dans l'opération précédente un cas

Mém. 1761.

S

de la formule $\frac{p}{2} (m - p) \frac{d^2}{m^2}$, qui lorsque $m = 1$ & $p = \frac{1}{2}$ se réduit à $\frac{1}{8} d^2$; les nombres qui sont dans la sixième colonne, sont toujours le quart de la différence du mouvement semi-diurne, & par conséquent la huitième partie de la seconde différence du mouvement diurne; donc ces nombres sont la correction qui doit s'appliquer à la partie proportionnelle ou au mouvement semi-diurne, pour avoir la véritable partie proportionnelle ou le vrai mouvement entre midi & minuit: on change les signes des nombres de cette sixième colonne, parce que nous avons vû que la correction étoit négative, quand les différences premières croissoient: enfin on prend le milieu entre les nombres de la sixième colonne, parce que voulant négliger les troisièmes différences, il faut du moins prendre un milieu entre les secondes différences. Telle est la manière la plus commode pour trouver les longitudes de la Lune à minuit lorsqu'on les a calculées rigoureusement pour le midi de chaque jour, & l'on voit par ce qui précède, que l'erreur possible en suivant cette méthode est insensible, excepté peut-être pour ceux qui veulent employer les observations à rectifier les Tables; on ne sauroit alors employer trop de soin à calculer les longitudes pour le moment précis de chaque observation, & il ne suffiroit pas dans ce cas-là de les avoir calculées même de 12 en 12 heures.

J'ai donné dans la *Connoissance des Mouvements Célestes pour l'année 1762 & pour l'année 1763*, une Table calculée par la formule précédente pour éviter aux Navigateurs toute sorte de calcul algébrique; elle sert à trouver pour une heure quelconque la quantité qui doit être ajoutée à la partie proportionnelle, à raison des secondes différences du mouvement de la Lune de 12 en 12 heures, elle suppose que l'on ait les longitudes calculées de 12 en 12 heures, comme je les ai calculées dans chaque volume de cet ouvrage depuis 1761 inclusivement, jusqu'en 1763, dont on vient d'achever l'impression.

J'ai ajouté dans la *Connoissance des Mouvements Célestes*

pour l'année 1763, page 119, une autre Table, qui est l'inverse de la précédente, dont je vais donner ici la construction, parce qu'elle est comme une suite de ce qui précède. Lorsqu'on cherche à quelle heure la Lune doit arriver dans une certaine position; par exemple, en conjonction avec une étoile, on prend le mouvement pour 12 heures; & en le supposant uniforme, on cherche par une partie proportionnelle le temps qu'il faut à la Lune pour parcourir l'arc dont elle étoit, à midi ou à minuit, éloignée du point proposé. Cette méthode exige donc une correction à raison de l'inégalité qui a lieu dans le mouvement semi-diurne que l'on suppose uniforme.

Soit d^2 , la différence seconde de 12 en 12 heures, & que l'on ait trouvé la conjonction à 1 heure, par la simple partie proportionnelle, il est évident par ce qui a été démontré ci-dessus, que $\frac{1}{12} \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{d^2}{2}$ seroit la correction à faire dans la longitude trouvée, à raison des secondes différences; & si d est le mouvement en 12 heures, on aura cette proportion

$d : 12 \text{ heures} :: \frac{1}{12} \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{d^2}{2}$ est à un quatrième terme

qui sera la correction du temps de la conjonction trouvée pour une heure par la partie proportionnelle. Comme cette correction ne va qu'à deux minutes de temps, lorsqu'elle est la plus forte, on peut supposer pour la trouver, que le mouvement de la Lune est uniforme, il ne peut y avoir qu'un vingtième d'erreur dans cette supposition, j'ai calculé de demi-heure

en demi-heure la valeur de $\frac{12^h}{d} \cdot \frac{p}{2} (m - p) \frac{d^2}{m^2}$, & j'en ai formé la Table dont il s'agit.

*V. la Connoiss.
des Mouvem. cé-
lestes pour l'année
1763, p. 119.*

