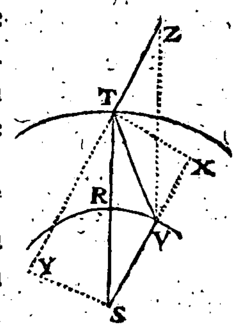
CALCUL
DES INÉGALITÉS DE VÉNUS,
PAR L'ATTRACTION DE LA TERRE.

Par M. DE LA LANDE.

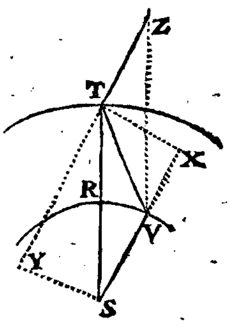
LES obſervations auxquelles on ſe prépare pour le célèbre paſſage de Vénus devant le diſque du Soleil, & dans leſquelles il ſera néceſſaire de bien connoître la théorie de cette Planète, ont été l'occaſion des calculs dont je vais rendre compte; le réſultat fera voir des inégalités qui vont juſqu'à une demi-minute, en plus & en moins, beaucoup plus grandes par conſéquent que celle de l'aberration & de la nutation que les Aſtronomes emploient dans leurs calculs; ce ſeroit donc renoncer d'une manière inconſéquente à toute la préciſion de nos recherches, que de négliger les inégalités qui réſultent de l'attraction mutuelle des Planètes les unes ſur les autres. 16 Juillet 1760.

Parmi le grand nombre de termes qui ſe rencontrent dans l'expreſſion des forces perturbatrices, & dont on doit évidemment négliger la plupart, parce que l'effet n'en ſauroit être ſenſible; j'ai choiſi les plus conſidérables, & je les ai réduits ſous des formules, dont l'application devient extrêmement facile, même dans d'autres cas & pour d'autres Planètes.

I. Soit S le Soleil, T la Terre, & V la Planète de Vénus, dont les orbites ſont concentriques; la force que la Terre exerce ſur Vénus, ſuivant la ligne VT qui les joint, étant en raiſon directe de la maſſe, & en raiſon inverſe du carré de la diſtance, ſera $\frac{T}{VT^2}$, en ſuppoſant que T exprime la maſſe de la Terre; ſi l'on conſidère VT comme la diagonale d'un parallélograme $ZTSV$, on



verra que la force agiſſant de V en T équivaut à deux forces qui agiroient de V en S & de V en Z, qui ſeroient entr'elles comme VS eſt à VZ, & qui ſeroient à la force qui agit de V en T, comme VS & VZ ſont à VT.



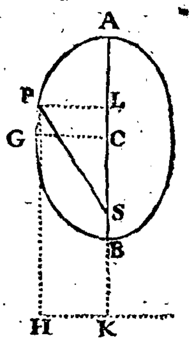
Ainſi, à la place de la force agiſſante de V en T, on en aura deux autres; l'une de V en Z, ou, ce qui revient au même, de S en T, puiſque VZ eſt parallèle à ST, qui ſera $\frac{T}{VT^2} \cdot \frac{TS}{VT}$, & qui tend à éloigner Vénus du Soleil; l'autre de V en S, qui ſera $\frac{T}{VT^2} \cdot \frac{SV}{VT}$, & qui tend à rapprocher Vénus du Soleil; la première doit être retranchée de la force de la Terre ſur le Soleil, parce que la Terre ne peut cauſer d'altération dans le mouvement de Vénus, qu'en tant qu'elle agit plus ou moins ſur le Soleil que ſur Vénus; & il n'y auroit aucune inégalité; ſi l'action étoit égale ſur le Soleil & ſur Vénus, rien ne pourroit alors changer la ſituation reſpective de Vénus par rapport au Soleil, & ſon mouvement ſeroit le même que s'il n'y avoit eu aucune force perturbatrice.

Ainſi la force perturbatrice eſt $\frac{T}{VT^2} \cdot \frac{TS}{VT} - \frac{T}{ST^2}$, conſidérée ſuivant la direction ST; ſi du point T on abaiſſe une perpendiculaire ſur le rayon vecteur prolongé SV, & qu'on achève le parallélograme $TXSY$, la force de S en T pourra ſe décompoſer en deux autres, l'une de S en X, l'autre de S en Y ou, ce qui revient au même, de X en T; mais comme TX eſt perpendiculaire ſur SX, TX ſera le ſinus de l'angle TSV, & SX en ſera le coſinus; ainſi la force de X en T ſera $(\frac{T}{VT^2} \cdot \frac{TS}{VT} - \frac{T}{ST^2})$ ſin. TSV, qui tend à diminuer la viteſſe de Vénus dans ſon orbite, & la force de S en V sera $\left(+\frac{T}{VT^2}\cdot\frac{TS}{VT}-\frac{T}{ST^2}\right)$ cof. TSV, qui tend à éloigner Vénus du Soleil; mais nous avons déjà eu ci-devant une autre force suivant VS, $\frac{T}{VT^2}\cdot\frac{SV}{VT}$, qui tendoit à rapprocher Vénus du Soleil, il ne faudra prendre que la différence des deux, & l'on aura $\frac{T}{VT^2}\cdot\frac{SV}{VT}-\left(\frac{T}{VT^2}\cdot\frac{TS}{VT}-\frac{T}{ST^2}\right)$ cof. TSV pour la force qui agit suivant le rayon vecteur, qui tend à rapprocher Vénus du Soleil & qui augmente par conséquent la force centrale du Soleil.

Nous avons donc la force perturbatrice totale décomposée en deux parties, dont l'une agit suivant le rayon vecteur de Vénus, & l'autre perpendiculairement à ce même rayon; la première, que M. Clairaut appelle φ, & qui n'affecte que la force centrale; la seconde, qu'il appelle π, & qui affecte la vîtesse; si l'on suppose que la distance VS de Vénus au Soleil soit r, la distance TS de la Terre f, l'angle de commutation $TSV = t$, & la distance TV de la Terre à Vénus $= s$, on aura $\varphi = T\frac{r}{s^3} - T\left(\frac{f}{s^3} - \frac{1}{f^2}\right)$ cof. t & $\pi = -T\left(\frac{f}{s^3} - \frac{1}{f^2}\right)$ fin. t: celle-ci a le signe $-$ parce qu'elle tend à diminuer les aires décrites par la Planète de R en V; elle auroit le signe $+$ si la Planète troublante étoit plus près du Soleil que la Planète troublée; quant à la force φ, elle a toujours les mêmes signes.

II. Lorsqu'une Planète tourne autour du Soleil sans éprouver aucune force étrangère, elle décrit une ellipse parfaite; si l'on nomme p le demi-paramètre du grand axe, a le demi-grand axe, e la distance entre le centre & le foyer, r le rayon vecteur, u l'anomalie vraie, on aura cette équation $\frac{p}{r} = 1 - e$ cof. u.

En effet, soit SP le rayon vecteur dans l'ellipse APB, CS l'excentricité, ASP l'anomalie vraie, $CL = x$, $PL = y$; soit fait $CK = \frac{aa}{e}$; KL sera $\frac{aa}{e} + x$, $= \frac{aa + ex}{e} = PH$, $SK = \frac{aa}{e} - e = \frac{aa - ee}{e}$; CG étant le petit axe de l'ellipse, on a $CG^2 = aa - ee$; par la propriété générale de l'ellipse, $CG^2 : PL^2 :: a^2 : aa - xx$, ou $aa - ee : y^2 :: a^2 : aa - xx$, $y^2 = \frac{(aa - ee)(aa - xx)}{a^2}$.



Donc $SP^2 = \frac{a^2 e^2 + 2 a^2 ex + a^2 x^2 + a^4 - a^2 e^2 - a^2 x^2 + e^2 x^2}{aa}$, $SP = \frac{a^2 + ex}{a} = a + \frac{ex}{a}$; ainsi $SP : PH :: \frac{a^2 + ex}{a} : \frac{aa + ex}{e} :: e : a$; mais $PH = SL + SK = r \text{ cof. } u + \frac{aa - ee}{e}$; donc $r : r \text{ cof. } u + \frac{aa - ee}{e} :: e : a$; donc $r = \frac{er \text{ cof. } u + aa - ee}{a}$, $ar - er \text{ cof. } u = aa - ee$, $\frac{aa - ee}{r} = a - e \text{ cof. } u$; mais $p = \frac{a^2 - ee}{a}$; donc $\frac{p}{r} = 1 - \frac{e}{a} \text{ cof. } u$, ou bien $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{c}{p} \text{ cof. } u$, en mettant au lieu de $\frac{e}{a}$ la lettre c, qui exprimera une fraction de la distance moyenne CA.

M. Clairaut a démontré * que par l'effet des forces perturbatrices, on aura $\frac{p}{r} = 1 - c \text{ cof. } u + \text{fin. } u \int \Omega \, du \text{ cof. } u - \text{cof. } u \int \Omega \, du \text{ fin. } u$, Ω étant égal à $\frac{1}{M\left(1 + 2\int \frac{\pi r^3 du}{pM}\right)}$ $\left(\varphi rr + \pi \frac{r dr}{du} - 2\int \frac{\pi r^3 du}{p}\right)$, M est la somme des masses du Soleil & de la Planète troublée.

* Voy. Mém. de l'Acad. 1748, p. 437.

III.

III. Si la valeur de Ω eſt exprimée dans cette forme $\cos. mu$, M. Clairaut a trouvé que la quantité $\sin. u \int \Omega\, du \cos. u - \cos. u \int \Omega\, du \sin. u$ ſe réduit alors aux deux termes ſuivans $\frac{1}{mm-1} \cos. u - \frac{1}{mm-1} \cos. mu$; comme il n'a point donné la démonſtration de ce lemme, on ſera bien aiſe de la trouver ici.

Puiſque $\Omega = \cos. mu$, $\Omega \cos. u = \cos. u \cos. mu = \frac{1}{2} \cos. (m+1) u + \frac{1}{2} \cos. (m-1) u$, $\Omega\, du \cos. u = \frac{1}{2} \cos. (m+1)\, u du + \frac{1}{2} \cos. (m-1)\, u du$; $\int \Omega\, du \cos. u = \frac{1}{2(m+1)} \sin. (m+1) u + \frac{1}{2(m-1)} \sin. (m-1) u$, de même $\Omega \sin. u du = \cos. mu \sin. u du = \frac{1}{2} \sin. (m+1) u du - \frac{1}{2} \sin. (m-1)\, u du$, $\int \Omega \sin. u du = \frac{1}{2(m+1)} \cos. (m+1) u + \frac{1}{2(m-1)} \cos. (m-1) u$. Pour compléter cette intégrale, il faut faire $u = 0$; alors, comme le coſ. de zéro eſt $= 1$, on aura $\frac{1}{2(m-1)} + \frac{1}{2(m-1)} = \frac{1}{m^2-1} = -\frac{1}{1-m^2}$; ainſi l'intégrale complète eſt $\frac{1}{2(m+1)} \cos. (m+1) u + \frac{1}{2(m-1)} \cos. (m-1) u - \frac{1}{m^2-1}$, $- \cos. u \int \Omega \sin. u du = - \frac{1}{2(m+1)} \cos. (m+1) u \cos. u - \frac{1}{2(m-1)} \cos. (m-1) u \cos. u + \frac{\cos. u}{m^2-1}$, $\sin. u \int \Omega \cos. u du = \frac{1}{2(m-1)} \sin. (m+1) u \sin. u + \frac{1}{2(m-1)} \sin. (m-1) u \sin. u$; ces deux termes, pris enſemble, renferment le produit des ſinus moins le produit des coſinus, ce qui équivaut au coſinus de la différence pris en moins;

$$\frac{1}{2(m+1)} \text{ fin. } (m+1)\,u \text{ fin. } u - \frac{1}{2(m+1)} \text{ cof. } (m+1)\,u \text{ cof. } u = \frac{1}{2(m+1)} \text{ cof. } m\,u$$

$$\frac{1}{2(m-1)} \text{ fin. } (m-1)\,u \text{ fin. } u - \frac{1}{2(m-1)} \text{ cof. } (m-1)\,u \text{ cof. } u = -\frac{1}{2(m-1)} \text{ cof. } m\,u;$$

ainſi l'expreſſion propoſée fin. $u \int \Omega\, d\,u$ cof. u — cof. $u \int \Omega\, d\,u$ fin. u ſera $\frac{1}{2(m+1)}$ cof. $m\,u - \frac{1}{2(m-1)}$ cof. $m\,u + \frac{\text{cof. } u}{m^2 - 1}$; mais $\frac{1}{2(m+1)} - \frac{1}{2(m-1)} = \frac{-1}{m^2-1}$; donc on aura enfin $\frac{1}{m^2-1}$ cof. $u - \frac{1}{m^2-1}$ cof. $m\,u$. Tout ſe réduit donc à exprimer Ω en termes qui aient tous cette forme cof. $m\,u$; comme Ω eſt compoſé de φ & de π, que φ & π ſont compoſés principalement des quantités t & s, il faut exprimer t & s ſous une forme qui ne contienne que cof. $m\,u$.

IV. On ſait que dans un triangle obtuſangle STV, dont on connoît deux côtés f, r, & l'angle compris t, le troiſième côté $s = \sqrt{(f^2 + r^2 - 2\,f\,r \text{ cof. } t)}$; donc $\frac{1}{s^3} = 2\,f^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{2f} + \frac{f}{2} - \text{cof. } t\right)^{-\frac{3}{2}}$, en ſuppoſant $r = 1$.

Cette valeur renferme, comme on le voit, l'angle t qui change très-inégalement, & de plus elle renferme la puiſſance $-\frac{3}{2}$ d'un binome, dont le premier terme $\frac{1}{2}f + \frac{f}{2}$ approche trop de l'unité, pour qu'on puiſſe eſpérer de convertir ce binome en une ſérie convergente; il faudroit en prendre une multitude énorme de termes, & encore ne ſeroit-on pas raſſuré ſur les autres; il eſt donc néceſſaire de trouver par un artifice de calcul, quelque moyen d'évaluer ce binome, ſans recourir à la formule ordinaire.

M. Euler ſe tira de cette difficulté d'une manière très-ingénieuſe, dans la Pièce ſur les inégalités de Saturne, qui remporta le Prix de l'Académie en 1748.

Voici une autre méthode très-élégante & très-ſimple, de M. Clairaut, qu'il n'a démontrée nulle part; je vais donc, avant d'en faire l'application, en expliquer, avec un certain détail, toute la théorie.

Supposons un binome indéterminé $(h - \text{cof.}\, t)^m$, dont il faut trouver la valeur, en supposant que h & m soient données, & que l'angle t ait passé par tous les degrés possibles; supposons cette valeur égale à la férie suivante,

$A + B\,\text{cof.}\, t + C\,\text{cof.}\, 2\,t + D\,\text{cof.}\, 3\,t + C\,\text{cof.}\, 4\,t$, &c.

La question se réduira à trouver la valeur des quantités A, B, C, D, &c. pour la trouver, imaginons une courbe dont t soit l'abscisse, & l'ordonnée $(h - \text{cof.}\, t)^m$; multiplions l'ordonnée par dt, pour avoir l'élément de cette courbe, & nous aurons $\int (h - \text{cof.}\, t)^m\, dt = \int (A\,dt + B\,\text{cof.}\, t\,dt + C\,\text{cof.}\, 2\,t\,dt)$ &c.

En intégrant tous les termes du second membre, on aura $At + B\,\text{fin.}\, t + \frac{1}{2} C\,\text{fin.}\, 2\,t$, &c.

Et lorsque t vaudra deux angles droits (ce que nous exprimerons par $2\,q$), comme tous les sinus s'évanouiront, la formule se réduira à $2\,q\,A$.

Donc alors $A = \frac{\int (h - \text{cof.}\, t)^m\, dt}{2\,q \text{ ou } 180^d}$; tel est l'artifice dont on se sert pour avoir une valeur de A exprimée par la quadrature d'une courbe, dont on peut avoir autant d'ordonnées qu'on voudra; on le verra bien-tôt par des exemples.

Pour avoir la valeur de B, on considère que dans la férie $A + B\,\text{cof.}\, t + C\,\text{cof.}\, 2\,t + D\,\text{cof.}\, 3\,t$, &c. Si l'on multiplie tout par $\text{cof.}\, t$, le terme $B\,\text{cof.}\, t$ sera le seul qui donnera un terme dégagé de sinus, parce que $\text{cof.}\, t \cdot \text{cof.}\, t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\text{cof.}\, 2\,t$; or $\frac{1}{2} B\,dt$ a pour intégrale $\frac{1}{2}\,Bt$, & lorsque t sera $= 2\,q$; ce terme sera Bq, tous les autres s'évanouiront;

Et l'on aura $\int dt\,\text{cof.}\, t\, (h - \text{cof.}\, t)^m = B \cdot 90^d$.

$\frac{\int dt\,\text{cof.}\, t\, (h - \text{cof.}\, t)^m}{q} = B$.

Si l'on multiplioit de même la férie par $\text{cof.}\, 2\,t$, ce seroit le terme $C\,\text{cof.}\, 2\,t$, qui donneroit un terme dégagé de sinus, lequel resteroit seul en faisant $t = 2q$, en sorte que $C = \frac{\int dt \operatorname{cos.} 2t (h - \operatorname{cos.} t)^m}{q}$.

De même $D = \frac{\int dt \operatorname{cos.} 3t (h - \operatorname{cos.} t)^m}{q}$, &c. mais nous allons voir que connoissant les deux premiers A & B, on n'a pas besoin des quadratures pour trouver les autres C, D, &c. ils suivent une progression uniforme, dont voici la démonstration.

V. Supposons qu'on ait la valeur de

$$\int (h - \operatorname{cos.} t)^m \operatorname{cos.} p\, t\, d\, t = X$$

& celle de $\int (h - \operatorname{cos.} t)^m \operatorname{cos.} (p+1)\, t\, dt = X'$

on demande la valeur de $\int (h - \operatorname{cos.} t)^m \operatorname{cos.} (p+2)\, t\, dt = X''$.

Soit $(h - \operatorname{cos.} t)^{m+1} \operatorname{sin.} (p+1)\, t = y$; en prenant la différentielle de cette équation, on aura $dy = (m+1)(h - \operatorname{cos.} t)^m \operatorname{sin.} t\, dt \,.\, \operatorname{sin.} \overline{p+1}\, t + (h - \operatorname{cos.} t)^{m+1} (p+1)\, dt \operatorname{cos.} \overline{p+1}\, t = (m+1) \cdot (h - \operatorname{cos.} t)^m \operatorname{sin.} \overline{p+1}\, t \operatorname{sin.} t\, dt + h\, (p+1) \operatorname{cos.} \overline{p+1}\, t\, (h - \operatorname{cos.} t)^m\, dt - (p+1) \operatorname{cos.} t \operatorname{cos.} \overline{p+1}\, t\, (h - \operatorname{cos.} t)^m\, dt$; mais $\operatorname{sin.} \overline{p+1}\, t \operatorname{sin.} t = \frac{1}{2} \operatorname{cos.} p\, t - \frac{1}{2} \operatorname{cos.} (p+2)\, t$, & $\operatorname{cos.} t \operatorname{cos.} \overline{p+1}\, t = \frac{1}{2} \operatorname{cos.} (p+2)\, t + \frac{1}{2} \operatorname{cos.} p\, t$; donc $dy = \frac{m+1}{2} (h - \operatorname{cos.} t)^m \operatorname{cos.} p\, t\, dt - \frac{m+1}{2} (h - \operatorname{cos.} t)^m \operatorname{cos.} (p+2)\, t\, dt + h\, (p+1) \operatorname{cos.} \overline{p+1}\, t\, (h - \operatorname{cos.} t)^m\, dt - \frac{p+1}{2} (h - \operatorname{cos.} t)^m \operatorname{cos.} (p+2)\, t\, dt - \frac{p+1}{2} (h - \operatorname{cos.} t)^m \operatorname{cos.} p\, t\, dt$;

Donc $y = \frac{m+1}{2} X - \frac{m+1}{2} X'' + h\, (p+1)\, X' - \frac{p+1}{2} X'' - \frac{p+1}{2} X = \frac{m-p}{2} X + h\, (p+1)\, X' - \frac{m+p+2}{2} X''$;

Donc $X'' = \frac{2h(p+1)X' + (m-p)X - 2y}{2+p+m}$;

Mais si $x = 180^d$, y sera nul parce qu'il renferme un sinus, donc $X'' = \frac{2h(p+1)X' + (m-p)X}{2+p+m}$, formule générale.

Ainsi étant donné $A = \frac{\int dt\,(h - \text{cof.}\,t)^m}{2q}$ & $B = \frac{\int dt\,\text{cof.}\,t\,(h - \text{cof.}\,t)^m}{q}$, on aura $p = 0$ dans la formule générale, $X = 2Aq$, $X' = Bq$, $X'' = Cq$;

donc $C = \frac{2Bh + 2Am}{2+m}$.

VI. Étant donnés B, & C, on fera $p = 1$ dans la formule générale, & l'on aura $X'' = \frac{4hX' + (m-1)X}{m+3}$, $X = Bq$, $X' = Cq$, $X'' = Dq$;

Donc $D = \frac{4hC + (m-1)B}{m+3}$:

On aura de même
$$E = \frac{6hD + (m-2)C}{m+4}$$
$$F = \frac{8hE + (m-3)D}{m+5}$$
$$G = \frac{10Fh + (m-4)E}{m+6}$$
$$H = \frac{12Gh + (m-5)F}{m+7}$$
$$I = \frac{14Hh + (m-6)G}{m+8}.$$

Si dans ces expressions, l'on fait $m = -\frac{3}{2}$ qui est le cas particulier *(Art. IV)* dont j'ai besoin dans ce Mémoire; on aura

$$\left.\begin{aligned} C &= 4Bh - 6A \\ D &= \frac{8CH - 5B}{3} \\ E &= \frac{12Dh - 7C}{5} \end{aligned}\right\} \text{\&c.}$$

$$\left.\begin{aligned} F &= \frac{16\,Eh - 9\,D}{7} \\ G &= \frac{20\,Fh - 11\,E}{9} \\ H &= \frac{24\,Gh - 13\,F}{11} \\ I &= \frac{28\,Hh - 15\,G}{13} \\ K &= \frac{32\,Ih - 17\,H}{15} \end{aligned}\right\}\text{\&c.}$$

VII. Pour connoître la valeur entière de la ſérie $A +$ B coſ. $t + C$ coſ. $2\,t$, &c. il ſuffira donc de chercher par les quadratures, les valeurs de A & de B; c'eſt ce que nous allons entreprendre.

Puiſque $A = \frac{\int (h - \text{cof } t)^{-\frac{1}{2}}\, dt}{2\,q}$, il faudra prendre, par exemple, dt pour un degré, & ſuppoſant à t toutes les valeurs depuis zéro juſqu'à cent quatre-vingt degrés, on calculera pour ces cent quatre-vingt-une ſuppoſitions, la valeur $(h - \text{coſ. } t)^{-\frac{1}{2}}$, & l'on aura toutes les ordonnées de la courbe dont la quadrature, c'eſt-à-dire la ſurface, exprimera la valeur de A.

La valeur de h eſt $\frac{1}{2f} + \frac{f}{2}$ (*art. IV*) f eſt la diſtance moyenne de la Terre au Soleil, en ſuppoſant celle de Vénus égale à l'unité; ainſi $f = 1{,}382495$, $\frac{1}{2f} = 0{,}361665$; donc $\frac{1}{2f} + \frac{f}{2} = 1{,}052912 = h$.

Suppoſons d'abord $t = 0$, alors coſ. $t = 1$, $h -$ coſ. t $= 0{,}052912$, ſi l'on en prend le logarithme, qu'on y ajoute ſa moitié & qu'on en prenne enſuite le complément, on aura pour la valeur de $(h - \text{coſ. } t)^{-\frac{1}{2}}$ le nombre qui ſera la première ordonnée de la courbe indiquée *art. IV*.

log. 0,0529	8,7235542
moitié	9,3617771
somme	8,0853313
complément	1,9146687
auquel répond	82,1616

Telle est la première des cent quatre-vingt-une ordonnées que nous avons à chercher. Pour avoir la seconde ordonnée, t étant $=$ 1 degré, & le cosinus de 1 degré $=$ 0,999848; on aura h — cos. $t = 0{,}053064$, & $(h - \text{cos.}\, t)^{-\frac{1}{2}} = 81{,}8088$ pour la seconde ordonnée, & ainsi de toutes les autres, sur quoi il faut observer que quand t surpassera 90 degrés, les cosinus changeront de signe, & qu'il faudra les ajouter avec 1,052912, pour avoir h — cos. t.

VIII. Lorsqu'on a plusieurs ordonnées d'une courbe, dont l'intervalle est l'unité, & qu'on veut trouver la surface comprise par ces ordonnées; il faut supposer une courbe parabolique qui passe par toutes ces ordonnées. Soient a, b, c, d, &c. les ordonnées dont il s'agit, l'équation des lignes paraboliques est $y = m + nx + px^2 + qx^3$, &c. si on la dispose de manière qu'à l'abscisse 0 réponde a, à l'abscisse 1 réponde b, à l'abscisse 2 réponde c, &c; on trouvera $y = a + (b - a)x + (\frac{a}{2} - b + \frac{c}{2})x(x - 1)$; pour avoir l'aire, il faut intégrer $y\,dx = a\,dx + (b - a)x\,dx + (\frac{a}{2} - b + \frac{c}{2})(xx\,dx - x\,dx)$,

$\int y\,dx = ax + \frac{b-a}{2}x^2 + (\frac{a}{2} - b + \frac{c}{2})(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2})$, formule générale.

Si l'on a trois ordonnées, il faut dans cette formule générale, substituer 2 à la place de x, & l'on aura pour la surface $\frac{1}{3}a + \frac{4}{3}b + \frac{1}{3}c$. Par la même raison, la surface comprise par les ordonnées c, d, e sera $\frac{1}{3}c + \frac{4}{3}d + \frac{1}{3}e$,

& celle qui est comprise par les ordonnées e, f, g sera $\frac{1}{3} e + \frac{4}{3} f + \frac{1}{3} g$, ainsi des autres; rassemblant donc toutes ces portions de surfaces, on aura $\frac{1}{3} a + \frac{4}{3} b + \frac{2}{3} c + \frac{4}{3} d + \frac{2}{3} e + \frac{4}{3} f + \frac{1}{3} g$, c'est-à-dire, que pour avoir la surface de la courbe entière; il faut prendre le tiers des extrêmes, les $\frac{4}{3}$ de tous les termes pairs, & les $\frac{2}{3}$ de tous les termes impairs.

IX. Par exemple, soient les ordonnées de dix en dix degrés, depuis $t = 90^d$, jusqu'à $t = 180^d$.

Degrés.		Degrés.	
90	0,9257	140	0,4076
100	0,7361	150	0,3762
110	0,6070	160	0,3555
120	0,5168	170	0,3438
130	0,4529	180	0,3400

Et qu'on propose de trouver la surface de la courbe qui joint toutes ces ordonnées, on aura pour le tiers des extrêmes, 4,219, les $\frac{4}{3}$ des termes pairs, c'est-à-dire qui répondent à 100, 120, &c. 2,6881, & les $\frac{2}{3}$ des termes impairs 110, 130, &c. = 1,1866, dont la somme 4,2966 est l'aire totale, en supposant l'unité 10 degrés; mais comme il faut que l'unité soit 1 degré, & que le résultat soit divisé par 180 degrés, on divisera cette aire par 18, & l'on aura 0,2387 pour l'aire cherchée; on trouveroit ainsi par parties toutes les portions dont est composée la surface qui exprime la valeur de A; on demandera peut-être pourquoi l'unité doit être ici 1 degré, & pourquoi j'ai divisé par 18; la raison en est évidente, lorsqu'on fait attention que pour avoir la valeur de A (*art. IV*) nous avons supposé $t = 1$ degré, & par conséquent un degré pour l'unité; donc en supposant ici 10^d pour l'unité, j'ai eu une surface dix fois trop petite, qu'il falloit par conséquent multiplier par dix, en même temps

temps que la surface de la courbe $A = \frac{\int (h - \text{cos.}\, t)\, dt}{180^d}$ doit être divisée par 180 degrés (*art. IV*) ; il suffisoit donc pour faire les deux opérations ensemble, de diviser par 18.

X. C'est ainsi que par de simples additions, au moyen des cent quatre-vingt-une ordonnées, que j'ai toutes calculées, je suis parvenu à trouver la valeur totale de A, elle est 8,702 ; la valeur de B exige un calcul semblable, avec cette différence que tous les termes y doivent être multipliés par cos. t, & le total divisé, non pas par 180 degrés, mais par 90 degrés; car la formule (*art. IV*) est $\frac{\int dt \text{ cos.}\, t\, (h - \text{cos.}\, t)^m}{q} = B$. Par exemple, t étant égal à un degré, on aura $(h - \text{cos.}\, t)^{-\frac{3}{2}} = 81{,}8081$, qui, multiplié par cos. t, dont le logarithme est 9,9999338, donne 81,7956; pour la seconde ordonnée, on aura ainsi 181 ordonnées, en observant que cos. t change de signe lorsque t surpasse 90 degrés, & qu'alors il doit être ajouté avec h; on prendra le tiers de la première qui répond à $t = 0$, & de la dernière qui répond à 180 degrés, les quatre tiers de la seconde qui répond à un degré de la quatrième, &c. jusqu'à la cent quatre-vingtième inclusivement, qui répond à 180 degrés; enfin les deux tiers des impairs, c'est-à-dire de la troisième qui répond à deux degrés de la cinquième, &c. jusqu'à la cent soixante-dix-neuvième inclusivement, qui répond à 178 degrés de l'angle t, & ces trois sommes ajoutées ensemble, donneront la valeur de $B = 15{,}4666$. Connoissant ainsi les valeurs de A & de B, on en conclura par les formules qui sont à la fin de l'*article VI*, $C = 12{,}9235$, $D = 10{,}5061$, $E = 8{,}4541$; Ainsi l'on aura (*art. IV*) $(\frac{1}{2f} + \frac{f}{2} - \text{cos.}\, t)^{-\frac{3}{2}} = 8{,}702 + 15{,}4666 \text{ cos.}\, t + 12{,}9235 \text{ cos.}\, 2t + 10{,}5061 \text{ cos.}\, 3t + 8{,}4541 \text{ cos.}\, 4t$, &c. Pour en conclure la valeur de $\frac{1}{s^3}$, il faut multiplier tous ces termes par $(2f)^{-\frac{3}{2}}$ (*art. IV*) dont le logarithme est 9,3374598;

& l'on aura enfin $\frac{1}{s^3} = 1{,}8926 + 3{,}3639$ cof. $+ 2{,}8108$ cof. $2t + 2{,}285$ cof. $3t + 1{,}7973$ cof. $4t$; ce font ces derniers nombres que nous appellerons A, B, &c. dans l'*article XVI* ci-après ; nous n'aurons pas befoin des termes ultérieurs, à beaucoup près.

XI. Pour paffer à l'expreffion des forces φ & π, on fe rappellera que fur la fin de l'*article I.er* nous avons eu $\varphi = T \frac{1}{s^3} - T\left(\frac{f}{s^3} - \frac{1}{f^2}\right)$ cof. t, & $\pi = -T \left(\frac{f}{s^3} - \frac{1}{f^2}\right)$ fin. t; pour réduire en nombres ces deux valeurs, on a $\frac{1}{f^2} = 0{,}523$; $\frac{f}{s^3} = 2{,}094 + 4{,}651$ cof. $t + 3{,}886$ cof. $2t + 3{,}159$ cof. $3t$

$\left(\frac{f}{s^3} - \frac{1}{f^2}\right)$ cof. $t = 1{,}943$ cof. $t + 1{,}579$ cof. $2t$;

car il faut fe rappeler que cof. t . cof. $t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ cof. $2t$, (toutes les formules des produits de finus & de cofinus, qu'il faut avoir très-familières dans ces fortes de calculs, font rapportées dans mon Mémoire *fur les inégalités de Mars*, *Mém. de l'Acad. pour 1758, p. 18*); on aura donc la quantité $\frac{1}{s^3} - \left(\frac{f}{s^3} - \frac{1}{f^2}\right)$ cof. $t = -0{,}673$ cof. $t - 1{,}093$ cof. $2t$, qui étant multipliée par T, c'eft-à-dire par la maffe de la Planète troublante, donnera la valeur de φ; on trouvera de même $-\left(\frac{f}{s^3} - \frac{1}{f^2}\right)$ fin. $t = -0{,}151$ fin. $t - 0{,}746$ fin. $2t$,

$$\text{Ainfi} \begin{cases} \varphi = -T\,(0{,}673 \text{ cof. } t + 1{,}093 \text{ cof. } 2t) \\ \pi = -T\,(0{,}151 \text{ fin. } t + 0{,}746 \text{ fin. } 2t). \end{cases}$$

XII. Pour avoir la valeur de Ω, c'eft-à-dire de

$$\frac{1}{M(1+2)\int\frac{\pi r^3 du}{pM}}\left(\varphi rr + \frac{\pi r dr}{du} - 2\int\frac{\pi r^3 du}{p}\right),$$

on observe d'abord que le diviseur $\frac{\int \pi r^3 du}{p M}$ ne renfermant que des termes extrêmement petits, qui multiplient des termes aussi petits qu'eux, il n'en résultera que des termes d'un ordre inférieur ; ainsi l'on peut en toute sûreté le négliger : on observera secondement, que $\frac{\pi r dr}{du}$ peut se négliger, parce que l'excentricité de Vénus est si petite, qu'on doit la supposer nulle dans les recherches dont il s'agit ; ainsi r sera constamment égale à l'unité, & dr n'aura pas lieu dans les calculs : les quantités constantes n'ont point de différentielles ; il ne reste donc pour la valeur de Ω que $\frac{1}{M}(\varphi - 2\int \pi du)$, M exprimant la somme des masses du Soleil & de la Planète perturbatrice, en sorte que $\frac{T}{M}$ soit $= \frac{1}{16928}$, & u l'angle décrit autour du Soleil par la Planète troublée, que nous supposons aussi uniforme, à cause du peu d'excentricité de Vénus, en sorte que $p = r = 1$.

XIII. Soit 1 le mouvement de Vénus, $1 - n$ le mouvement de la Terre ; en sorte que quand Vénus aura décrit autour du Soleil un angle u, la Terre ait fait $u - nu$, & qu'alors leur distance vue du Soleil, c'est-à-dire l'angle de commutation soit nu, le même que nous avons appelé t dans les articles précédens ; le logarithme du mouvement annuel de la Terre en secondes, est 6,1123165, & celui du mouvement de Vénus, 6,3233032 ; ainsi $1 - n = 0{,}615196$, $n = 0{,}384804$,

$$\pi du = -T(+ 0{,}151 \text{ sin. } nudu + 0{,}746 \text{ sin. } 2nudu,)$$

$$\int \pi du = + T(\; 0{,}3924 \text{ cos. } nu + 0{,}9693 \text{ cos. } 2nudu) ;$$

$$\text{donc } \Omega = -\frac{T}{M}(1{,}458 \text{ cos. } nu - 3{,}032 \text{ cos. } 2nu)$$

divisant le premier terme par $1 - nn = 0{,}8519$, le second par $1 - 4nn = - 0{,}4077$; on aura la valeur des termes ajoutés à l'équation $\frac{p}{r} = 1 - c \text{ coſ. } u$, par l'effet des forces φ & π (*art. II*) ; nous appellerons Z ces derniers termes; nous n'avons pas beſoin de conſidérer les autres, parce que l'inégalité elliptique de Vénus eſt repréſentée dans les Tables ordinaires;

$$Z = \frac{T}{M} (1{,}711 \text{ coſ. } nu + 7{,}437 \text{ coſ. } 2nu).$$

XIV. Connoiſſant l'équation de l'orbite, il s'agit de trouver l'expreſſion du temps ou de la longitude moyenne; M. Clairaut a démontré que l'élément de la longitude moyenne eſt $= \frac{rr\,du}{\sqrt{(f^2 + 2\int \pi r^3 du)}}$; ainſi connoiſſant la valeur de r dans l'expreſſion de l'article précédent, on en peut conclure celle de la longitude moyenne.

Puiſque $\frac{1}{r} = 1 - c \text{ coſ. } u + Z$, on aura à peu près $r^2 = 1 - 2Z$, en négligeant les termes affectés de l'excentricité, ou des puiſſances de Z, de même $\frac{1}{\sqrt{(f^2 + 2\int \pi r^3 du)}} = f - \int \pi r^3 du$, en négligeant les puiſſances du ſecond terme qui n'eſt qu'une fraction très-petite;

donc $\int \frac{rr\,du}{\sqrt{(f^2 + 2\int \pi r^3 du)}} = -(2Z + \int \pi r^3 du)\,du$;

or nous avons eu dans les articles précédens, les valeurs de Z & de $\int \pi r^3 du$, ou ſimplement $\pi\,du$, car $r^3 = 1$, il ſuffira donc de multiplier par du, & d'intégrer pour avoir l'expreſſion du temps,

$$(2Z + \int \pi r^3 du)\,du = -\frac{T}{M} (3{,}030 \text{ coſ. } nu + 13{,}905 \text{ coſ. } 2nu)\,du;$$

or pour intégrer coſ. $nu\,du$, il ſuffit d'écrire $\frac{\text{ſin. } nu}{n}$; ainſi l'on aura l'intégrale qu'il faudra multiplier par $\frac{T}{M}$, & de plus par le nombre de ſecondes auquel la longueur du rayon est égale, parce que tout le calcul précédent ne donne les quantités cherchées qu'en parties décimales du rayon ; ces parties se réduisent en secondes par l'addition du logarithme 5,3144251.

$3{,}030$ cosin. nu	logar.	$0{,}48144$
	ôtez logar. n	$-9{,}58523$
	ajoutez logar. $\frac{T}{M}$	$4{,}77139$
	ajoutez logar. 57^d, &c.	$5{,}31442$
$+ 9'',6$ sin. nu	résultat	$0{,}98202$
$13{,}905$ cos. $2\,nu$	logar.	$1{,}14333$
	ôtez logar. $2\,n$	$9{,}88626$
	ajoutez logar. $\frac{T}{M}$	$4{,}77139$
	ajoutez logar. 57^d, &c.	$5{,}31442$
$+ 22'',0$ sin. $2\,nu$	résultat	$1{,}34288$

Ayant ainsi l'expression de la longitude moyenne en longitude vraie, il faut renverser la question pour trouver la longitude vraie exprimée en longitude moyenne.

XV. Soit, par exemple, en général $x = u + \alpha$ sin. mu, & que l'on veuille avoir u exprimé en x, le coëfficient α étant supposé très-petit, on peut d'abord supposer grossièrement u égal à x dans le terme qui est fort petit, l'on aura donc $u = x - \alpha$ sin. mx, $mu = mx - m\alpha$ sin. mx, sin. $mu =$ sin. mx cos. $(m\alpha$ sin. $mx)$ — cos. mx sin. $(m\alpha$ sin. $mx)$ $=$ sin. $mx - \frac{1}{2}\, m\alpha$ sin. $2\,mx$, en supposant égal à l'unité le cosinus d'une quantité $m\alpha$ sin. mx, qui est supposée très-petite ; ainsi α sin. $mu = \alpha$ sin. $mx - \frac{1}{2}\, m\alpha^2$ sin. $2\,mx$
$u = x - \alpha$ sin. $mx + \frac{1}{2}\, m\alpha^2$ sin. $2\,mx$
$mu = mx - \alpha m$ sin. $mx + \frac{1}{2}\, m^2\alpha^2$ sin. $2\,mx$
sin. $mu =$ sin. mx cos. $(\alpha m$ sin. $mx - \frac{1}{2}\, m^2\alpha^2$ sin. $2\,mx)$
— cos. mx $(\alpha m$ sin. $mx - \frac{1}{2}\, m^2\alpha^2$ sin. $2\,mx)$
mais le cosinus d'un arc u est $1 - \frac{1}{2}\, u^2$ à peu-près ; ainsi le cosinus de αm sin. mx sera $1 - \frac{1}{2}\,\alpha^2 m^2$ sin. mx^2 $= 1 - \frac{1}{4}\,\alpha^2 m^2 + \frac{1}{4}\,\alpha^2 m^2$ cos. $2\,mx$; donc sin. mu

$= \text{fin. } m x \left(1 - \frac{1}{4} \alpha^2 m^2 + \frac{1}{4} \alpha^2 m^2 \text{ cof. } 2 m x\right) + \frac{1}{4} \alpha^2 m^2 \text{ fin. } 3 m x - \frac{1}{2} \alpha m \text{ fin. } 2 m x + \frac{1}{4} \alpha^2 m^2 \text{ fin. } m x;$ on néglige les termes α^3 qui doivent être encore incomparablement plus petits.

$$\begin{aligned} \text{Donc fin. } m u = \text{fin. } m x &- \tfrac{1}{4} \alpha^2 m^2 \text{ fin. } m x - \tfrac{1}{2} \alpha m \text{ fin. } 2 m x + \tfrac{1}{8} \alpha^2 m^2 \text{ fin. } 3 m x \\ &- \tfrac{1}{8} \alpha^2 m^2 \text{ fin. } m x \qquad\qquad + \tfrac{1}{4} \alpha^2 m^2 \text{ fin. } 3 m x \\ &+ \tfrac{1}{4} \alpha^2 m^2 \text{ fin. } m x \end{aligned}$$

$$= \left(1 - \tfrac{1}{8} \alpha^2 m^2\right) \text{fin. } m x - \tfrac{1}{2} \alpha m \text{ fin. } 2 m x + \tfrac{1}{8} \alpha^2 m^2 \text{ fin. } 3 m x$$

Ainfi la valeur cherchée de u, exprimée en x, fera $x - \alpha \left(1 - \frac{1}{8} \alpha^2 m^2\right) \text{ fin. } m x + \frac{1}{2} \alpha^2 m \text{ fin. } 2 m x - \frac{3}{8} \alpha^3 m^2 \text{ fin. } 3 m x$; on peut voir le réfultat de ces fortes d'expreffions dans la Pièce de M. Clairaut qui remporta le prix à Péterfbourg en 1751 : comme dans l'expreffion précédente, on ne voit que des termes affectés de α^2 qui doivent devenir extrêmement petits par rapport à α, puifque α lui-même eft une fraction extrêmement petite, on aura dans le cas préfent $u = x - \alpha$ fin. $m x$, c'eft-à-dire qu'il fuffira de changer les fignes des équations trouvées dans l'article précédent pour avoir celles qu'on doit appliquer à la longitude moyenne lorfqu'on veut chercher la longitude vraie, & comme par $n u$ & $2 n u$ nous avons entendu ci-devant l'angle t, c'eft-à-dire l'angle au Soleil ou l'angle de commutation, nous aurons les équations fuivantes :

$$- 9'',6 \text{ fin. } t - 22'',0 \text{ fin. } 2 t,$$

l'angle t étant ce qui refte après qu'on a retranché la longitude héliocentrique de la Terre de la longitude héliocentrique de Vénus.

XVI. Comme pour parvenir au réfultat précédent, nous avons négligé une multitude de termes, quelquefois fans donner les raifons qui prouvent que ces termes doivent fe négliger, nous allons reprendre l'expreffion algébrique & la conduire jufqu'au réfultat fans y appliquer les nombres; par-là nous arriverons à une formule générale, où l'on verra d'un coup d'œil tout ce qui a été employé, & par conféquent tout ce qui a été négligé.

$$\frac{1}{s^3} = A + B \text{ cof. } t + C \text{ cof. } 2 t + D \text{ cof. } 3 t \cdots$$

$$\frac{f}{s^3} - \frac{1}{f^2} = fA - \frac{1}{f^2} + fB \text{ cof. } t + fC \text{ cof. } 2t + fD \text{ cof. } 3t$$

$$\left(\frac{f}{s^3} - \frac{1}{f^2}\right) \text{cof. } t = \left(fA - \frac{1}{f^2}\right) \text{cof. } t + fB \text{ cof. } t^2 + fC \text{ cof. } t \text{ cof. } 2t + fD \text{ cof. } 3t \text{ cof. } t$$

$$= \left(fA - \frac{1}{f^2} + \frac{fC}{2}\right) \text{cof. } t + \frac{fB}{2} + \frac{fD}{2} \text{ cof. } 2t.$$

Nous négligeons ici les termes $3t$, $4t$ &c. parce que, comme on le verra ci-après, il faudra diviser plusieurs fois chaque terme par le quarré de ce coëfficient de t, qui seroit 9, 16, &c. pour les termes $3t$, $4t$, &c. ce qui les réduiroit à rien en comparaison des précédens.

Nous négligeons aussi les termes qui ne renferment point l'angle t, parce que ces termes-là ne donneront point d'inégalités périodiques, telles que nous les cherchons ici.

XVII. Cette expression de la distance nous donne celle des forces:

$$\varphi = \frac{T}{s^3} - T\left(\frac{f}{s^3} - \frac{1}{f^2}\right) \text{cof. } t = T\left(B - fA - \frac{1}{f^2} - \frac{fC}{2}\right) \text{cof. } t$$
$$+ T\left(C - \frac{fB}{2} - \frac{fD}{2}\right) \text{cof. } 2t$$

$$\left(\frac{f}{s^3} - \frac{1}{f^2}\right) \text{fin. } t = \left(fA - \frac{1}{f^2}\right) \text{fin. } t + fB \text{ cof. } t \text{ fin. } t + fC \text{ cof. } 2t \text{ fin. } t + fD \text{ cof. } 3t \text{ fin. } t$$

$$\pi = -T\left(fA - \frac{1}{f^2} - \frac{fC}{2}\right) \text{fin. } t - T\left(\frac{fB}{2} - \frac{fD}{2}\right) \text{fin. } 2t$$

$$\int \frac{\pi\, du}{M} = -\frac{T}{M}\int\left(fA - \frac{1}{f^2} - \frac{fC}{2}\right) \text{fin. } nu\, du - \frac{T}{M}\int\left(\frac{fB}{2} - \frac{fD}{2}\right) \text{fin. } 2nu\, du$$
$$= \frac{T}{M}\left(\frac{fA}{n} - \frac{1}{nf^2} - \frac{fC}{2n}\right) \text{cof. } nu + \frac{T}{M}\left(\frac{fB}{4n} - \frac{fD}{4n}\right) \text{cof. } 2nu$$

Car on sait que pour intégrer α fin. $nu\, du$, il suffit d'écrire $-\frac{\alpha}{n}$ cof. nu.

$$\Omega = \frac{\varphi}{M} - 2\int \frac{\pi\, du}{M} = \frac{T}{M}\left(B - fA + \frac{1}{f^2} - \frac{fC}{2} - \frac{2fA}{n} + \frac{2}{nf^2} + \frac{2fC}{2n}\right) \text{cof. } nu$$
$$+ \frac{T}{M}\left(C - \frac{fB}{2} - \frac{fD}{2} - \frac{fB}{2n} + \frac{fD}{2n}\right) \text{cof. } 2nu$$

$$Z = \frac{T}{M} \cdot \frac{1}{1 - nn}\left(B - fA + \frac{1}{f^2} - \frac{fC}{2} - \frac{2fA}{n} + \frac{2}{nf^2} + \frac{2fC}{2n}\right) \text{cof. } nu$$
$$+ \frac{T}{M} \cdot \frac{1}{1 - 4nn}\left(C - \frac{fB}{2} - \frac{fD}{2} - \frac{fB}{2n} + \frac{fD}{2n}\right) \text{cof. } 2nu$$

Donc $\int(2Z + \int \frac{\pi du}{M}) du$ qui eſt l'équat. cherchée =

$$\left[\frac{2T}{M(1-nn)n}\left(B - fA + \frac{1}{f^2} - \frac{fC}{2} + \frac{fC}{n} + \frac{2}{nf^2} - \frac{2fA}{n}\right) + \frac{T}{M}\left(\frac{fA}{n^2} - \frac{1}{n^2 f^2} - \frac{fC}{2n^2}\right)\right] \text{ſin. } nu$$

$$+ \left[\frac{2T}{M(1-4nn)2n}\left(C - \frac{fB}{2} - \frac{fD}{2} + \frac{fD}{2n} - \frac{fB}{2n}\right) + \frac{T}{M}\left(\frac{fB}{8nn} - \frac{fD}{8nn}\right]\right. \text{ſin. } 2nu.$$

Telle eſt la valeur générale des équations qui ont été trouvées (*art. XIV*), & que l'on retrouvera exactement ſi l'on prend la peine de réduire cette formule en nombres, & de la convertir en ſecondes ſuivant la remarque de l'article XIV.

Les détails que je viens de donner, ſe trouveront expliqués d'une manière encore plus élémentaire & plus détaillée dans le XXII.e Livre de mon Aſtronomie *.

XVIII. Si l'on veut ſavoir dans quel cas ces deux inégalités donneront un *maximum*, on égalera à zéro la différentielle de $9'',6$ ſin. t — $22''$ ſin. t, l'on aura $9'',6$ coſ. t = $44''$ coſ. $2t$, c'eſt-à-dire qu'il faut que le coſinus de l'élongation ſimple ſoit au coſinus du double comme 440 eſt à 96, ou enfin que t ſoit environ de $49^d\ 10'$; de-là on tire une conſéquence, la plus grande digreſſion de Vénus arrive lorſque l'angle de commutation eſt d'environ $43^d\frac{2}{3}$, & l'on a toujours eu ſoin d'éviter ces ſortes d'obſervations lorſqu'on a voulu déterminer les élémens de l'orbite de Vénus : il y a donc lieu de croire que les élémens des Tables ne ſeront pas affectés de toute cette erreur ; cependant comme à 30 degrés de commutation, qui répond à 19 degrés d'élongation, l'équation eſt encore de 24 ſecondes, & que c'eſt à peu-près là un des points les plus favorables pour les obſervations, il eſt clair qu'on devra néceſſairement y faire uſage des inégalités que nous venons de trouver.

* Depuis la lecture de ce Mémoire, ce Traité d'Aſtronomie a paru, en deux Volumes in-4.° *à Paris*, chez Deſaint & Saillant, rue Saint-Jean-de-Beauvais & rue du Foin.

Les

Les deux équations précédentes $10'' \text{ſin.}\, t - 22'' \text{ſin.}\, 2t$ ſont contenues dans la Table qui ſuit, dont l'argument eſt *la Longitude moyenne héliocentrique de Vénus moins la Longitude moyenne du Soleil, vue de la Terre.*

TABLE DES INÉGALITÉS DE VÉNUS, produites par l'action de la Terre.

ARGUMENT. Longitude héliocentrique de Vénus — la longitude moyenne du Soleil.

Longitude héliocentr. de Vénus — longit. du Soleil.	O.	I.	II.	III.	IV.	V.	
	ôtez	ôtez	ôtez	ajoutez	ajoutez	ajoutez	
Degrés.	*Secondes*	*Secondes*	*Secondes*	*Secondes*	*Secondes*	*Secondes*	
0.	0.	14.	10.	10.	28.	24.	30.
5.	3.	15.	8.	14.	29.	21.	25.
10.	6.	16.	5.	18.	30.	17.	20.
15.	8.	15.	2.	20.	29.	14.	15.
20.	11.	14.	2.	23.	28.	10.	10.
25.	13.	13.	6.	26.	27.	5.	5.
30.	14.	10.	10.	28.	24.	0.	0.
	ajoutez	ajoutez	ôtez	ôtez	ôtez	ôtez	Longitude héliocentr. de Vénus — longit. du Soleil.
	XI.	X.	IX.	VIII.	VII.	VI.	

On obſervera que les ſignes de cette Table, *ajoutez*, *ôtez*, ont lieu lorſqu'il s'agit de convertir la longitude moyenne héliocentrique de Vénus en apparente; il faudroit faire le contraire de ce qui y eſt indiqué, ſi l'on vouloit convertir la longitude héliocentrique apparente déduite de l'obſervation, en longitude moyenne.

Il faut aussi observer que le trait qui divise la colonne de II^{f} ou de IX^{f}, indique un changement de signe; par exemple, pour IX^{f} 10^{d}, on a 2″ à ôter; mais pour IX^{f} 25^{d}, il y a 8″ à ajouter, parce qu'ayant passé le trait, il faut changer de dénomination.

L'argument de cette Table est, comme on l'a dit, la longitude moyenne héliocentrique de Vénus, moins la longitude géocentrique du Soleil; mais pour éviter à ceux qui pourroient faire usage de cette Table, la peine d'en calculer l'argument, nous allons placer à la suite de la Table, tant les époques principales, que le mouvement d'année en année qui sert à conclure toutes les autres époques.

Les mêmes formules pour la valeur de Z *(art. XVII)*, donneroient aisément les variations que l'attraction de la Terre doit causer dans les distances de Vénus au Soleil: ces inégalités entraînent aussi des différences dans l'élongation de Vénus vue de la Terre, & par conséquent dans sa longitude géocentrique; mais ces inégalités de la distance sont aisées à calculer d'après les valeurs que j'ai données ci-dessus. Je réserve ces détails pour un autre Mémoire, il me suffit d'avoir montré dans celui-ci que les inégalités les plus considérables dans la longitude de Vénus ne sont pas sensibles lorsqu'elle paroît sur le Soleil: le Passage que nous attendons pour 1761, a été le principal objet des calculs que je viens de rapporter; or l'on voit bien que dans ces passages, l'angle t & son multiple $2t$ s'évanouissent, & qu'ainsi les deux équations sont nulles. Au reste, quand on aura calculé les inégalités de la distance, la Table suivante servira aussi à en trouver l'argument, qui sera toujours la différence entre la longitude héliocentrique de Vénus & le lieu du Soleil.

TABLE de la Longitude moyenne heliocentrique de Vénus — celle du Soleil, & du Mouvement de Vénus — celui du Soleil.

ANNÉES.	LONGITUDE.
B. 1664.	6ˢ 22ᵈ 22′
B. 1672.	6. 23. 51
B. 1680.	6. 25. 19
B. 1688.	6. 26. 48
B. 1696.	6. 28. 17
C. 1700.	0. 27. 25
B. 1708.	0. 29. 53
B. 1716.	1. 1. 21
B. 1724.	1. 2. 50
B. 1732.	1. 4. 18
B. 1740.	1. 5. 47
B. 1748.	1. 6. 15
B. 1756.	1. 7. 43
B. 1760.	7. 8. 28
C. 1761.	2. 23. 30
C. 1762.	10. 8. 31
C. 1763.	5. 23. 33
B. 1764.	1. 9. 12
C. 1765.	8. 24. 14
C. 1766.	4. 9. 16
C. 1767.	11. 24. 17
B. 1768.	7. 9. 57
C. 1769.	5. 24. 58
C. 1770.	10. 10. 0
C. 1771.	4. 25. 2
B. 1772.	1. 10. 41
C. 1773.	8. 25. 42
C. 1774.	4. 10. 44
C. 1775.	11. 25. 46
B. 1776.	7. 11. 25

ANNÉES complètes.	MOUVEMENT.
1.	7ˢ 15ᵈ 1′
2.	3. 0. 4
3.	10. 15. 5
B. 4.	6. 0. 44
5.	1. 15. 46
6.	9. 0. 48
7.	4. 15. 49

Mois compl.	Mouvement
Janvier.	0. 19. 7
Février.	1. 6. 23
Mars.	1. 25. 30
Avril.	2. 13. 59
Mai.	3. 3. 6
Juin.	3. 21. 36
Juillet.	4. 10. 43
Août.	4. 29. 49
Septembre	5. 17. 19
Octobre.	6. 7. 26
Novembre	6. 25. 55
Décembre.	7. 15. 2

Jours compl.	Mouvement.
1.	0ˢ 37ᵈ
2.	1. 14.
3.	1. 51.
4.	2. 28.
5.	3. 5.
6.	3. 42.
7.	4. 19.

JOURS complets.	MOUVEMENT.
8.	4ˢ 56ᵈ
9.	5. 33.
10.	6. 10.
11.	6. 47.
12.	7. 24.
13.	8. 1.
14.	8. 38.
15.	9. 15.
16.	9. 52.
18.	10. 29.
19.	11. 6.
20.	11. 43.
21.	12. 20.
22.	13. 34.
23.	14. 11.
24.	14. 48.
25.	15. 25.
26.	16. 2.
27.	16. 39.
28.	17. 16.
29.	17. 53.
30.	18. 30.
31.	19. 7.

Dans les années Bissextiles, on retranche un jour de la date proposée, parce que dans ces années-là les époques sont pour le 1.ᵉʳ Janvier à midi; au lieu que dans les autres années elles sont pour la veille.

De la Masse de la Terre.

Suivant les premiers principes de la gravitation, 1.° la force que la Terre exerce sur la Lune, est à la force qu'elle exerceroit si la Lune étoit aussi éloignée que le Soleil, comme le quarré de la distance du Soleil est au quarré de la distance de la Lune; 2.° la force du Soleil sur la Terre est à la force de la Terre sur la Lune, comme les distances divisées par le quarré des temps périodiques.

Si donc l'on appelle T le temps périodique de la Terre, & t celui de la Lune, D la distance du Soleil à la Terre, d celle de la Lune à la Terre, & qu'on appelle 1 la force du Soleil, celle de la Terre pour une même distance, ou, ce qui revient au même, la masse de la Terre sera $\frac{d^3}{D^3} \cdot \frac{T^2}{t^2}$; si l'on suppose donc le temps périodique 13,368 pour la Lune, sa parallaxe moyenne 57′ 43″, & celle du Soleil 10″, on aura $\frac{1}{232400}$ pour la masse de la Terre, ce qui ne fait qu'environ les $\frac{3}{4}$ de celle que Newton établit, car il la suppose $\frac{1}{169282}$; il est vrai que Newton a supposé la parallaxe du Soleil de 10″ $\frac{1}{2}$, & celle de la Lune beaucoup plus petite que moi; mais comme une seule seconde sur la parallaxe du Soleil peut faire toute cette différence de trois à quatre, je n'ai pas cru devoir changer la détermination de Newton, connue de tous les Astronomes; il faudroit d'ailleurs y faire entrer le calcul des perturbations, que Newton a négligé, & ces recherches sont superflues, jusqu'à ce que l'on connoisse mieux la parallaxe du Soleil; on pourroit entreprendre, il est vrai, de déterminer ces inégalités, par des observations très-exactes, pour vérifier par elles la parallaxe du Soleil; mais comme les inégalités de Mars sont beaucoup plus considérables, elles feront aussi beaucoup plus propres à remplir cet objet; car une seconde sur la parallaxe du Soleil, en produira dans certains cas plus de quarante sur la différence en longitude de Mars, pourvu que l'on choisisse deux positions telles que je les indiquerai en déterminant les inégalités de cette Planète.

Nota. Depuis la lecture de ce Mémoire, le Calcul des inégalités de Mars, produites par l'action de la Terre, m'a fait trouver des équations de 28", de 30", de 68", dont la combinaison pourra servir à vérifier la parallaxe du Soleil (*Voy. les Mém. de 1761, p. 259*). On trouvera aussi dans le même Écrit la suite des formules nécessaires pour le calcul des attractions planétaires, dont je n'ai pas eu besoin dans ce Mémoire, à cause du peu d'excentricité de Vénus; Mars étant au contraire parmi toutes les Planètes l'une des plus excentriques, m'a donné lieu de développer de nouvelles considérations & d'éclaircir de nouvelles difficultés dans ces sortes de Calculs. Il reste encore à faire tant d'applications utiles des mêmes recherches & des mêmes formules, que j'ai cru les devoir exposer avec une espèce de prolixité, encore ai-je supprimé bien des éclaircissemens qui auroient peut-être paru trop élémentaires dans nos Mémoires, mais qui se trouvent dans mon Astronomie, de même que la démonstration du théorème fondamental que j'ai supposé ci-dessus, *art. II.*