MÉMOIRE

Dans lequel on détermine le mouvement des Nœuds de chacune des six Planètes principales par l'action de toutes les autres; l'inégalité de la précession moyenne des Équinoxes, & le changement de latitude des Étoiles fixes, dans le principe de la gravitation universelle.

PREMIÉRE PARTIE *.

Par M. DE LA LANDE.

7 Décembre 1758.

SOIT la distance au Soleil d'une Planète pour laquelle on cherche le mouvement des Nœuds, exprimée par l'unité, D la distance de celle dont on demande l'action, M sa masse, celle du Soleil étant prise pour unité, s la distance variable d'une planète à l'autre, qui change suivant l'angle de commutation x; que la quantité $\frac{1}{s^3}$ soit exprimée par la série $A + B \operatorname{cos.} x + C \operatorname{cos.} 2x$, &c. je dis que le mouvement des Nœuds de la Planète, pendant une de ses révolutions, sera $M.B.D.90$ degrés.

Pour démontrer ce théorème, j'emploierai la théorie de M. Clairaut; elle a servi entre ses mains à déterminer, de la manière la plus élégante & la plus scrupuleuse, toutes les inégalités du mouvement des Nœuds de la Lune, mais on peut négliger tout ce qui est périodique dans la recherche à laquelle j'entreprends de l'appliquer.

Voy. la Pl. III qui est à la page 13.

Le cercle PO représente l'orbite de la planète troublée P, M la planète perturbatrice, S le Soleil, SN la ligne d'intersection de leurs orbites; $SM = D$, $SP = 1$, Pp le

* La seconde Partie est dans le Volume de 1761.

mouvement de la planète sur son orbite dans un instant très-petit dt; pq parallèle à SM, l'action de la planète M pour éloigner la planète P de son orbite, parallèlement à SM; ayant tiré la diagonale Pq, elle représentera la direction composée du mouvement de la planète; ayant prolongé la tangente Pp, elle rencontrera la ligne des Nœuds en un point N, on tirera dans le plan de l'orbite ME une ligne Nn, parallèle à pq; par les points P & q on tirera une ligne Pq, prolongée jusqu'au plan de l'orbite ME, elle rencontrera ce plan en un point n de la ligne Nn, & formera deux triangles semblables Ppq, PNn, puisque pq est parallèle à Nn, alors Sn deviendra la ligne des Nœuds, & l'angle NSn sera l'élément de la variation des Nœuds que l'on cherche; nous l'appelerons dq. Soit $Pp = du$, l'orbite étant circulaire, la différencielle du représentera l'angle PSp, la force de la planète M sur la planète P, est $\frac{M}{s^2}$; décomposée suivant la direction MS, elle devient $\frac{M.D}{s^3}$; il en faut retrancher la force sur le Soleil, qui s'exerce dans la même direction, & l'on a $M\left(\frac{D}{s^3} - \frac{1}{D^2}\right)$ pour la force pertubatrice dans la direction SM ou pq; cette force étant apelée F, on a $pq = Fdt^2$, parce que les espaces parcourus en vertu d'une force accélératrice quelconque, sont comme les carrés des temps.

La ligne pq est parallèle au plan de l'orbite ME; puisqu'elle est parallèle au rayon vecteur SM, les triangles Ppq, PNn sont dans un plan parallèle à l'orbite ME; ainsi par les triangles semblables Ppq, PNn, on a $Nn = \frac{PN}{Pp} pq$ $= \frac{PN}{Pp} Fdt^2$, l'angle $nNR = MS☊$; donc nR $= \frac{PN}{Pp} Fdt^2 \text{ sin. } MS☊$.

La mesure d'un angle est l'arc divisé par le rayon, donc l'angle élémentaire NSn est $\frac{nR}{nS} = \frac{PN}{Pp \cdot NS} Fdt^2 \text{ sin. } MS☊$, mais $\frac{PN}{NS} =$ ſin. PSN, en ſuppoſant l'orbite PO circulaire; donc $dq = \frac{Fdt^2}{du}$ ſin.. $MS\Omega$ ſin.. PSN.; & comme dt eſt un temps ſuppoſé uniforme & proportionnel à du, on pourra mettre du^2 à la place de dt^2, & Fdu à la place de $\frac{Fdt^2}{du}$; on aura donc, en ſubſtituant pour F ſa valeur $M\left(\frac{D}{s^3} - \frac{1}{D^2}\right)$, $dq = Mdu\,(AD - \frac{1}{D^2}$ $+ B.D.$ coſ. $x + C.D.$ coſ. $2x$, &c.$)$ ſin. $(pu - q)$ ſin. $(u - q)$, mais $x = (1 - p)\,u$; ſin. $(pu - q)$ ſin. $(u - q) = \frac{1}{2}$ coſ. $(1 - p)\,u - \frac{1}{2}$ coſ. $(u + pu - 2q)$; ainſi l'on voit que $\frac{1}{2}$ coſ. $(1 - p)\,u$ étant multiplié par $B.D.$ coſ. x ou $B.D.$ coſ. $(1 - p)\,u$, donnera pour un des termes réſultants, $\frac{1}{4} - \frac{1}{4}$ coſ. $(2 - 2p)\,u$. Je néglige ici tous les autres termes dépendans des ſinus ou co-ſinus des angles t, q, u, pour m'arrêter au terme qui dépend de l'angle u lui-même, & qui par conſéquent va toujours en croiſſant; on a donc $dq = \frac{M.D.B.du}{4}$, &c. donc en intégrant, on aura $q = \frac{M.D.B.u}{4}$; or après une révolution de la planète P, l'angle $\frac{u}{4}$ ſera $= 90^d$; donc alors $q = M.D.B.$ 90 degrés. C. Q. F. D.

On demandera peut-être comment il arrive que l'inclinaiſon des deux orbites n'entre point dans la meſure du mouvement des Nœuds, quoique cette inclinaiſon en ſoit la première cauſe; en effet, on comprend aſſez que le mouvement des Nœuds augmenteroit ſi l'inclinaiſon devenoit plus grande, mais il faut obſerver que lorſque nous avons ſuppoſé $\frac{1}{s^3} = A + B$ coſ. $x + C$ coſ. $2x$, &c. x étant l'angle au Soleil, ce n'eſt pas exactement l'angle qui ſe trouve en retranchant la longitude d'une planète de la longitude de l'autre qu'on devroit prendre, mais il faudroit $A + B\,(1 - \frac{1}{2}\Psi)$ cos. x, &c. $1 - \Psi$ étant le co-sinus de l'inclinaison, & x la différence entre la longitude de la planète P dans son orbite & le lieu de la planète M dans la sienne. En suivant cette remarque, on auroit trouvé l'expression MBD 90 degrés, modifiée ainsi par le co-sinus de l'inclinaison, mais les inclinaisons des orbites sont si petites, que leur co-sinus ne diffère jamais sensiblement de l'unité; c'est pourquoi nous avons négligé d'y avoir égard.

Pour faire usage de notre théorème, il faut connoître la quantité B, & la recherche en est souvent très-difficile; dans le triangle MPS, dont on connoît deux côtés & l'angle compris, on a $PM = S = \sqrt{(1 + D^2 - 2D \text{ cos. } x)}$ $\frac{1}{s^3} = (1 + D^2 - 2D \text{ cos. } x)^{-\frac{3}{2}}$; & formant cette puissance par le binome de Newton & le développement des produits de sinus en sinus simples de multiples, on a $\frac{1}{s^3} = \frac{1}{D^3} + \frac{9}{4D^5} + \frac{225}{64D^7} + \left(\frac{3}{D^4} + \frac{45}{8D^6}\right)$ cos. x; si D est plus petit que 1, il faudra le mettre par-tout au numérateur, afin que les puissances les plus grandes produisent les quantités les plus petites. Nous avons négligé dans le coëfficient de cos. x les puissances de D qui sont au-dessus de la sixième, & cette supposition peut avoir lieu, si D est un nombre qui soit au moins égal à 3, comme il arrive à peu près entre Mars & Jupiter; car alors le terme $\frac{45}{8D^6}$ étant six fois plus petit que $\frac{3}{D^4}$, on peut négliger les suivans, qui le seroient bien davantage.

Mais si D est un nombre plus petit que 3, alors le second terme approche assez du premier pour qu'on ne puisse pas négliger les suivans; dans le cas, par exemple, de Jupiter comparé avec Saturne, $\frac{45}{8D^6}$ surpasse la moitié de $\frac{3}{D^4}$; ainsi la série feroit trop peu convergente pour pouvoir en faire ufage; il en faut dire autant dans la comparaifon de la Terre avec Mars, Vénus ou Mercure; de Vénus avec Mars, la Terre ou Mercure; & de Mercure avec Vénus & la Terre.

Ainfi dans tous ces cas, il a fallu recourir aux expédiens qui ont été imaginés pour trouver la valeur de B par des intégrations ou des quadratures; la méthode que M. Clairaut a employé dans fa théorie du Soleil *, m'étant la plus familière & m'ayant paru extrêmement exacte, je l'ai appliquée à tous les cas dont je viens de parler, malgré la longueur du calcul qu'exigent de pareilles opérations auffi multipliées.

* Mém. de l'Acad. 1754.

Soit Jupiter & Saturne, dont les diftances moyennes au Soleil foient a & b, les logarithmes de ces diftances, fuivant les Tables de Halley, 0,7160851 & 0,9795518, leur diftance réciproque $s = \sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab \text{ cof. } x)}$ $\frac{1}{s^3} = (a^2 + b^2 - 2ab \text{ cof. } x) = (2ab)^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{a^2 + b^2}{2ab} - \text{cof. } x\right)^{-\frac{1}{2}}$; on fuppofe cette quantité égale à $A + B \text{ cof. } x + C \text{ cof. } 2x$, &c. & l'on cherche les valeurs de A, B, &c. Soit en général cette férie égale à $(h - \text{cof. } x)^m$; puifque l'on cherche fa valeur pour les différentes valeurs dont x eft fufceptible pendant une révolution fynodique des deux planètes, on peut la confidérer comme l'ordonnée d'une courbe dont x eft l'abfciffe; fi donc on multiplie tout par dx, & qu'on prenne les intégrales, on aura $\int dx(h - \text{cof.})^m = Ax + B \text{ fin. } x$, &c. Lorfque x fera égal à 180 degrés, tous les termes s'évanouiront, excepté le premier; ainfi l'on aura $A = \int \frac{dx(h - \text{cof. } x)^m}{180^d}$.

Si au lieu de multiplier par dx on multiplie par $dx \text{ cof. } x$, il n'y aura que le fecond terme qui ne fe détruira pas, car $B \text{ cof. } x \text{ cof. } x . dx = Bdx(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{ cof. } 2x)$; or l'intégrale de $\frac{Bdx}{2}$ eft $\frac{Bx}{2}$, ainfi dans le cas où x fera $= 180$ degrés,

on

on aura $\int dx\,(h - \text{cof.}\,x)^m = \frac{Bx}{2}$ & $B = \int \frac{dx\,\text{cof.}\,x\,(h - \text{cof.}\,x)^m}{90^d}$. Si on multiplie par cof. $2x$, ce sera le terme $C.\,\text{cof.}\,2x$ qui restera, mais nous nous bornons ici au terme $B = \int \frac{dx\,\text{cof.}\,x\,(h - \text{cof.}\,x)^m}{90^d}$. Pour le réduire en nombres, il faut observer qu'au-delà de 90 degrés, les co-sinus deviennent négatifs; ainsi il y aura deux termes dans la valeur de B, $\int \frac{dx\,\text{cof.}\,x\,(h - \text{cof.}\,x)^m}{90^d}$ pour le premier quart, & $-\int \frac{dx\,\text{cof.}\,x\,(h + \text{cof.}\,x)^m}{90^d}$ pour le second quart: on observera encore que le coëfficient $(2ab)^{-\frac{3}{2}}$, aura deux valeurs numériques différentes, suivant que l'on prendra a ou b pour unité; le logarithme de $(2ab)^{-\frac{3}{2}}$ sera 9,153255, si la distance de Jupiter au Soleil est 1; il sera 9,943655, si c'est la distance de Saturne. Pour ce qui est de la quantité $\frac{a^2 + b^2}{2ab}$, elle est toujours dans les deux cas, 1,189728; ainsi j'ai ôté successivement de cette quantité les co-sinus de tous les degrés, depuis zéro jusqu'à 90 degrés; la différence élevée à la puissance $-\frac{3}{2}$ étant multipliée par le co-sinus, j'ai eu 91 ordonnées de la courbe cherchée, dont l'aire représente la valeur de B.

Pour avoir la surface de cette courbe, j'ai ajouté le tiers de la première & de la dernière, quatre tiers de la 2.^{e} 4.^{e} 6.^{e} *&c.* & deux tiers de la 3.^{e} 5.^{e} 7.^{e} *&c.* suivant la méthode que M. Clairaut emploie pour quarrer une courbe dont on connoît les ordonnées, en supposant que ces ordonnées, prises trois à trois, sont jointes par une ligne parabolique: en voici la démonstration.

Supposons un arc de parabole dont on a trois ordonnées, a, b, c, répondantes aux abscisses 0, 1, 2, je dis que l'aire de la courbe sera $\frac{1}{3}a + \frac{4}{3} + \frac{1}{3}c$; l'équation générale des courbes paraboliques, est $y = m + nx + px^2 + qx^3$, &c.

il faut, en conservant la même forme, la disposer de manière qu'en mettant zéro à la place de x, l'ordonnée ou l'équation devienne a; qu'en mettant 1 à la place de x, l'équation devienne b, & qu'en mettant 2 elle devienne c. Or pour cela, il faut supposer $y = a + (b - a)x + \left(\frac{a}{2} - b + \frac{c}{2}\right)x(x - 1)$; donc $ydx = adx + (b - a)xdx + \left(\frac{a}{2} - b + \frac{c}{2}\right)(xxdx - xdx)$, dont l'intégrale est $\int ydx = ax + \frac{b-a}{2}x^2 + \left(\frac{a}{2} - b + \frac{c}{2}\right)\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)$ égale à l'aire de la courbe; & substituant dans cette expression de l'aire, 2 à la place de x, on a $\frac{1}{3}a + \frac{4}{3}b + \frac{1}{3}c$.

Si l'on faisoit la même opération, en prenant l'ordonnée c avec les deux suivantes d, e, on auroit $\frac{1}{3}c + \frac{4}{3}d + \frac{1}{3}e$, & en continuant ainsi de suite, on voit que l'on aura $\frac{4}{3}$ de tous les nombres pairs, $\frac{2}{3}$ des impairs, & $\frac{1}{3}$ des extrêmes, comme on l'a supposé ci-dessus.

Dans l'exemple proposé, le tiers des extrêmes est 4,0342, les quatre tiers des ordonnées paires 231,6287, les deux tiers des impaires 111,8178; la somme étant divisée par 90 degrés, donne 3,860898 pour l'aire de la courbe cherchée dans le premier quart.

La même opération se fait pour le second quart, en ajoutant les co-sinus qui se retranchoient dans le premier, & l'on trouve pour l'aire totale, 0,236114; ainsi le terme B cherché, qui est la différence de ces deux aires, se trouve 3,6248.

Si au lieu de calculer les ordonnées de degrés en degrés, on ne le fait que de trois en trois, il faudra diviser par 30 degrés, & non plus par 90 degrés, puisque l'intervalle des ordonnées & l'aire de la courbe sont trois fois plus grands qu'on ne les suppose dans l'opération.

Cette détermination du coëfficient B est aussi exacte qu'on la puisse desirer pour les recherches les plus délicates de la théorie de Saturne, à plus forte raiſon pour celles du mouvement des Nœuds, auxquelles nous allons l'employer.

Entre la Terre & Vénus on a $(1{,}05284 - \text{co-ſin. } x)^{-\frac{3}{2}}$, $B = 15{,}4666$, les logarithmes de $(2ab)^{-\frac{3}{2}}$ ſont 975931, lorſque la diſtance de la Terre eſt l'unité, & 933747 lorſque c'eſt la diſtance de Vénus.

Entre la Terre & Mars, je trouve $(1{,}090 - \text{co-ſin. } x)^{-\frac{3}{2}}$, $B = 8{,}6147$; les logarithmes de $(2ab)^{-\frac{3}{2}}$ ſont 982261 & 927420, ſuivant que l'on prend pour unité la diſtance de Mars ou celle de la Terre.

Pour comparer Vénus & Mars, $(1{,}290 - \text{coſ. } x)^{-\frac{3}{2}}$ donne $B = 2{,}1322$; les logarithmes de $(2ab)^{-\frac{3}{2}}$ ſont 951466 & 0,48534, ſuivant que la diſtance de Vénus ou celle de Mars eſt priſe pour unité.

Lorſqu'on conſidère Mercure & la Terre, $(1{,}486 - \text{coſ. } t)^{-\frac{3}{2}}$ donne $B = 1{,}0748$; le logarithme de $(2ab)^{-\frac{3}{2}}$ eſt 0,16673 quand la diſtance de la Terre eſt 1; & 8,93019 lorſque la diſtance de Mercure eſt l'unité.

Enfin pour Vénus & Mercure, on a $(1{,}2018 - \text{coſ. } t)$, $B = 3{,}356$; les logarithmes de $(2ab)^{-\frac{3}{2}}$ ſont 9,14119 lorſque la diſtance de Mercure eſt 1, & 0,37772 quand on prend pour unité la diſtance de Vénus au Soleil.

La maſſe des planètes exige encore quelques réflexions. Les planètes de Saturne, Jupiter & la Terre ayant autour d'elles des Satellites, on détermine leur denſité par la comparaiſon des diſtances de ces Satellites & de la durée de leurs révolutions *(Newton, lib. III, prop. 8)*; à l'égard de Mars, Vénus & Mercure, il faut néceſſairement faire quelque conjecture ſur leur denſité avant que d'établir leur maſſe.

M. Euler, dans l'Ouvrage qui a remporté le Prix de l'Académie en 1756, ſur les inégalités mutuelles des Planètes, *(Part. II, §. 33)*, obſerve que les denſités de Saturne, de

Jupiter & de la Terre, étant exprimées par les nombres 67, 95 & 400, se trouvent être presque comme les racines des moyens mouvemens; & quoique cette proportion soit peu exacte, il en déduit les masses de Mars, de Vénus & de Mercure, 0,018, 0,420, 0,040, en nommant *I* celle de la Terre, & supposant encore le volume de Vénus un tiers de celui de la Terre; je les emploierai comme M. Euler, en attendant que j'aie examiné si la masse de Vénus ne doit pas être beaucoup augmentée, à raison de son diamètre, que M. Euler a peut-être supposé trop petit, je me propose seulement ici de trouver les mêmes résultats, pour en faire voir les démonstrations. Voici donc les logarithmes des fractions qui représentent les masses des Planètes, divisées chacune par celle du Soleil; j'y ai joint les logarithmes de leurs moyens mouvemens, divisés chacun par celui de la Terre.

	Masse.	*Mouvement.*
MERCURE.....	3,37345.	0,6182569.
VÉNUS........	4,39467.	0,2109867.
TERRE........	4,77139.	0,0000000.
MARS.........	3,02666.	9,7256694.
JUPITER......	6,97184.	8,9260572.
SATURNE......	6,51985.	8,5311460.

Ce logarithme du moyen mouvement étant ajouté à celui du mouvement du Nœud pendant une révolution de la planète, donne le mouvement du Nœud pour une année.

Les élémens étant ainsi établis, voici les résultats des calculs pour toutes les Planètes, c'est-à-dire, le mouvement des Nœuds de chacune, sur l'orbite de chacune des cinq autres, par rapport aux Étoiles fixes.

Mouvement annuel des Nœuds de SATURNE.

Par l'action de	JUPITER..................	17",902.
	MARS.....................	0,005.
	TERRE....................	0,002.
	VÉNUS....................	0,0005.
	MERCURE..................	0,00001.

Mouvement annuel des Nœuds de JUPITER.

Par l'action de	SATURNE	8",559.
	MARS	0,048.
	TERRE	0,065.
	VÉNUS	0,004.
	MERCURE	0,0001.

Mouvement des Nœuds de MARS.

Par l'action de	SATURNE	0",730.
	JUPITER	14,194.
	TERRE	3,826.
	VÉNUS	1,317.
	MERCURE	0,008.

Mouvement des Nœuds de la TERRE.

Par l'action de	SATURNE	0",378.
	JUPITER	6,924.
	MARS	0,094.
	VÉNUS	5,147.
	MERCURE	0,047.

Mouvement des Nœuds de VÉNUS.

Par l'action de	SATURNE	0",230.
	JUPITER	4,130.
	MARS	0,091.
	TERRE	14,469.
	MERCURE	0,201.

Mouvement des Nœuds de MERCURE.

Par l'action de	SATURNE	0,090.
	JUPITER	1,576.
	MARS	0,009.
	TERRE	1,871.
	VÉNUS	2,904.

Un des usages les plus curieux que l'on puisse faire de ces recherches, consiste à déterminer l'inégalité de la précession moyenne des Équinoxes & le changement des Étoiles fixes en latitude: M. Euler est le premier qui ait montré, soit dans sa Pièce qui a remporté le Prix en 1748, soit dans l'Histoire de l'Académie Royale des Sciences de Prusse, *année 1754, tome X*, que les étoiles fixes doivent avoir des latitudes sensiblement différentes de celles qu'elles avoient autrefois, & que la précession moyenne des Équinoxes, dans ce siècle-ci, est plus grande qu'elle ne l'a été dans les siècles passés; d'où résulte une espèce d'équation séculaire pour la longitude des étoiles, semblable à celles dont on avoit déjà parlé pour les planètes, & sur lesquelles j'ai donné un Mémoire.

Voy. Mém. de l'Acad. 1757.

En effet, puisque l'attraction de Jupiter fait rétrograder de $6'',924$ par an les points d'intersection de l'orbite de la Terre sur celle de Jupiter, il s'ensuit que le pôle de l'orbite de la Terre décrit un cercle autour du pôle de l'orbite de Jupiter en 140000 ans environ; & comme ces deux orbites font entr'elles un angle de $1^d\ 19'$, si on suppose l'orbite de Jupiter fixe, les étoiles qui sont actuellement situées vers le Nœud de Jupiter & dans l'écliptique, en seront éloignées de $1^d\ 19'$ lorsque le pôle de l'écliptique aura fait le quart de sa révolution autour du pôle de l'orbite de Jupiter.

Les étoiles situées à 90 degrés du Nœud ne changent point de latitude, tandis que les étoiles voisines du Nœud varient sensiblement; les longitudes des étoiles en sont aussi diversement affectées, tout ainsi que les ascensions droites des étoiles diffèrent des longitudes, à mesure que les pôles du monde tournent autour de ceux de l'écliptique.

L'obliquité de l'écliptique doit varier aussi, car la direction de l'équateur n'étant pas modifiée par cette cause qui affecte la direction de l'écliptique, l'équateur doit continuer d'être dirigé vers les mêmes étoiles, tandis que l'écliptique passe par des étoiles différentes.

Pour assigner la mesure de toutes ces variations, j'observe que toutes les fois qu'un pôle tourne autour d'un autre, les petits angles au pole fixe se réduisent à des angles au pôle tournant, si on les multiplie par le co-sinus de l'angle formé par les deux cercles, moins le produit du sinus de cet angle par le sinus de la distance au Nœud, comptée sur le cercle mobile, & par la tangente de la distance de l'astre à ce cercle.

Pour avoir le changement qui arrive dans la distance de l'astre par rapport au cercle mobile, on multiplie le mouvement du Nœud ou du pôle mobile par la tangente de l'angle d'inclinaison, & le co-sinus de la distance au Nœud comptée sur le cercle mobile.

Soit donc I l'angle d'inclinaison de l'orbite de la Terre sur l'orbite de Jupiter, M le mouvement du pôle de l'écliptique autour de celui de l'orbite de Jupiter pendant un siècle, compté sur l'orbite de Jupiter, D la distance d'un astre au Nœud de ces orbites vers le milieu du siècle, comptée sur l'écliptique, L la latitude de l'astre, alors le changement de longitude pendant ce siècle, sera $M \,.\, \text{cos}. \, I - M \, \text{cos}. \, I \, \text{tang}. \, I \, \text{sin}. \, D \, \text{tang}. \, L$, & le changement de latitude sera $M \,.\, \text{cos}. \, I \, \text{tang}. \, I \, \text{cos}. \, D = M \, \text{sin}. \, I \, \text{cos}. \, D$.

La partie $M \, \text{cos}. \, I$ est constante pour toutes les étoiles, il n'y a que la partie $M \, \text{cos}. \, I \, \text{tang}. \, I \, \text{sin}. \, D \, \text{tang}. \, L = M \, \text{sin}. \, I \, \text{sin}. \, D \,.\, \text{tang}. \, L$, qui peut faire varier la différence de longitude entre deux étoiles; cette variation seroit extrêmement grande pour des étoiles qui, étant voisines du pôle de l'écliptique, répondroient au Nœud de l'orbite, ou plutôt au colure des Nœuds, c'est-à-dire au cercle tiré du pôle de l'écliptique par les Nœuds.

Si le pôle de l'écliptique décrit un cercle autour de celui de l'orbite de Jupiter, il en décrit un aussi sensible autour de l'orbite de Vénus, & l'effet de ce nouveau mouvement doit être calculé par une opération séparée, puisque le Nœud de Vénus est à $2^s \, 14^d \frac{1}{2}$, tandis que celui de Jupiter est à $3^s \, 8^d \frac{1}{2}$. Il faudra pour avoir la valeur de D, retrancher de la longitude d'une étoile $2^s \, 14^d \frac{1}{2}$, en calculant le changement produit par Vénus, & en retrancher $3^s \, 8^d \frac{1}{2}$ lorsqu'on calculera l'effet de Jupiter ; de même l'inclinaiſon de Vénus étant $3^d\ 23'\ 20''$, cette quantité ſera la valeur de I pour Vénus, mais I ne ſera que de $1^d\ 19'$ pour Jupiter.

Ainſi, par l'action de Jupiter, le mouvement progreſſif du Nœud étant en un ſiècle $692'',24$, le changement de latitude qui en réſulte eſt $15'',91$ pour les étoiles ſituées à $3^f\ 8^d$ de longitude ; & pour les autres étoiles, ce ſera $15'',91$ coſ. (longit. — $3^f\ 8^d$), mais le co-ſinus de la différence de deux arcs eſt égal au produit des co-ſinus ajouté à celui des ſinus, & le co-ſinus de $3^f\ 8^d$ étant égal à celui de 82 degrés, pris négativement, on aura — $15'',91$ coſ. long. coſ. 82 degrés + $15'',91$ ſin. long. ſin. 82 degrés = $15'',75$ ſin. long. — $2'',213$ coſ. long. en ſuppoſant le lieu du Nœud toujours à $3^f\ 8^d$, comme il l'eſt ſenſiblement pour la durée de quelques ſiècles. On a de même

par Vénus. . .	$29'',25$	ſin. long.	$+\ 8'',386$	coſ. longit. étoile.
par Saturne . .	$1,54$		$-\ 0,60$	
par Mars. . . .	$0,23$		$+\ 0,20$	
par Mercure. .	$0,40$		$+\ 0,40$	

Le total des cinq actions pour changer la latitude d'une étoile, eſt donc + $47'',2$ ſin. long. + $6'',2$ coſ. long.

La latitude des étoiles boréales eſt croiſſante, celle des étoiles auſtrales décroît juſqu'à ce que la formule change de ſigne, car il faut bien obſerver dans l'application de cette formule que le premier terme devient négatif quand la longitude de l'étoile eſt entre 6 & 12 ſignes, & le ſecond terme lorſque la longitude eſt entre 3 & 9 ſignes.

La même formule ſervira à trouver l'équation ſéculaire de la longitude des étoiles fixes M ſin. I. ſin. D. tang. L, car M ſin. I eſt la même quantité employée ci-deſſus, & ſin. D = ſin. (long. — Nœud) ; mais le ſinus de la différence de ces deux arcs = ſin. long. coſ. Nœud — ſin. Nœud coſ. long. donc on aura pour Jupiter, M. ſin. I. ſin. D = — $2'',213$ ſin. long.
— $15'',75$

— 15",75 . coſ. long. expreſſion qui ne diffère de celle du changement de latitude que par le changement de co-ſinus en ſinus & de ſinus en co-ſinus, avec un ſigne contraire pour le co-ſinus de la longitude ; ainſi pour la ſomme des actions réunies, l'on aura — 47",2 coſ. long. + 6",2 ſin. long. dans ce ſiècle ci, qu'il faut enſuite multiplier par tang. latit. La Table que donne M. Euler, dans l'Hiſtoire de l'Académie, *tome X*, paroît avoir été conſtruite ſur ce principe, mais je ne la rapporte ici que pour remarquer que ce n'eſt pas exactement par rapport à la première étoile du Bélier que cette Table donne l'augmentation ou la diminution de longitude, mais bien par rapport à l'équinoxe lui-même ou à l'aſtre que l'on ſuppoſeroit avoir zéro de longitude & de latitude; & pour le XVIII.e ſiècle, ou tout au plus pour les ſiècles peu éloignés ; l'argument eſt la longitude actuelle, il faut changer les ſignes des trois derniers nombres de la quatrième colonne.

TABLE I. *Changement dans la Longitude des Étoiles fixes boréales pour le XVIII.e ſiècle & pour les ſiècles peu éloignés.*

Longit. en 1700.	♈ — / ♎ +	♉ — / ♏ +	♊ — / ♐ +	♋ + / ♑ —	♌ + / ♒ —	♍ + / ♓ —
	Sec.	Sec.	Sec.	Sec.	Sec.	Sec.
0	48	38	18	7	30	45
3	47	36	16	9	32	45
6	47	35	13	12	33	46
9	46	33	11	14	35	47
12	45	31	8	16	37	47
15	44	29	6	19	38	48
18	43	27	3	21	40	48
21	42	25	1	23	41	48
24	41	23	2	25	42	48
27	39	20	4	28	44	48
30	38	18	7	30	45	48

Il faut multiplier les nombres de cette Table par la tangente de la latitude, & changer les ſignes ſi la latitude eſt méridionale.

TABLE II. *Changement de la distance des Étoiles au pôle boréal de l'Écliptique pendant un siècle.*

Longit. en 1700.	0 — VI +	I — VII +	II — VIII +	III — IX +	IV — X +	V — XI +
	Sec.	Sec.	Sec.	Sec.	Sec.	Sec.
0	7	30	45	48	38	18
3	9	32	45	47	36	16
6	12	33	46	47	35	13
9	14	35	47	46	33	11
12	16	37	47	45	31	8
15	19	38	48	44	29	6
18	21	40	48	43	27	3
21	23	41	48	42	25	1
24	25	42	48	41	23	2
27	28	44	48	39	20	4
30	30	45	48	38	18	7

TABLE III. *Obliquité de l'Écliptique, en supposant la masse de Vénus, comme à la page 260.*

Années.	Obliquité moyenne. D. M. S.	Années.	Obliquité moyenne. D. M. S.
Avant J. C. 350	23. 44. 10	950	23. 34. 32
Après J. C. 50	23. 41. 15	1050	23. 33. 46
150	23. 40. 31	1150	23. 33. 00
250	23. 39. 47	1250	23. 32. 14
350	23. 39. 3	1350	23. 31. 27
450	23. 38. 19	1450	23. 30. 41
550	23. 37. 34	1550	23. 29. 54
650	23. 36. 49	1650	23. 29. 7
750	23. 36. 4	1750	23. 28. 20
850	23. 35. 17		

On trouveroit cette obliquité trois cents cinquante ans avant

J. C. ou au temps de Pithæas, de près de 24 degrés, si l'on supposoit la masse de Vénus égale à celle de la Terre, au lieu que nous l'avons supposée dans les calculs précédens beaucoup moindre que celle de la Terre, & probablement cette détermination de 24 degrés seroit meilleure.

TABLE IV. *Précession des Équinoxes pour les dix-huit premiers siècles de notre Ere, suivant la détermination de la page 268.*

Ann. de J. C.	*Précession séculaire.* D. M. S.	*Ann. de J. C.*	*Précession séculaire.* D. M. S.
0	1. 23. 20	900	1. 23. 38
100	1. 23. 22	1000	1. 23. 40
200	1. 23. 24	1100	1. 23. 42
300	1. 23. 26	1200	1. 23. 44
400	1. 23. 28	1300	1. 23. 46
500	1. 23. 30	1400	1. 23. 48
600	1. 23. 32	1500	1. 13. 50
700	1. 23. 34	1600	1. 23. 52
800	1. 23. 36	1700	1. 23. 54

Les signes $+$ & $-$ de la première Table, indiquent l'augmentation ou la diminution de longitude pour les siècles à venir.

Si l'on considère le pôle boréal de l'Équateur comme une étoile fixe, & qu'on examine, par nos formules, sa variation en longitude & en latitude, on aura le changement qui arrive dans la précession des équinoxes & dans l'obliquité de l'écliptique; la longitude de cette étoile étant 90 degrés & sa latitude $66^d \frac{1}{2}$; $-47'',2$ sera la variation de l'obliquité de l'écliptique, & $+6'',2$ tang. $66^d\ 32' = +14'',3$ sera le changement de la précession des équinoxes, qui se trouve de signe contraire à la précession moyenne, en sorte que celle-ci en sera diminuée, & si la longitude des étoiles peut croître de $1^d\ 23'\ 50''$ dans ce siècle-ci par l'action du Soleil & de la Lune, elle ne croîtra que de $1^d\ 23'\ 36''$, vu l'action des planètes que nous venons de confidérer. Nous ne parlons point de la quantité conftante M cof. I, car puifqu'elle affecte toutes les étoiles auffi-bien que le pôle de l'Équateur & le colure des folftices, elle ne peut pas influer fur la diftance d'une étoile à ce colure des folftices, & par conféquent ne change rien dans le ciel; il ne refte que la partie variable M fin. I fin. D tang. L que nous avions à évaluer. Ces variations ne font plus les mêmes fi l'on remonte à des fiècles éloignés, parce que la longitude des Nœuds de Jupiter & de Vénus, que nous avons fuppofée conftante, ceffe de l'être.

Les calculs rapportés ci-deffus pour le mouvement des Nœuds, ayant été réduits à l'écliptique, m'ont fait trouver la pofition du Nœud de chaque planète pour le milieu du premier fiècle de notre Ere, & par conféquent m'ont mis à portée d'appliquer à ce temps-là les formules précédentes pour l'augmentation de longitude & de latitude. Je donnerai dans un autre Mémoire la méthode & les calculs qu'exige ce changement, ou cette réduction à l'écliptique, d'où n'aît fouvent une très-grande différence dans le mouvement des Nœuds; mais en attendant, voici le lieu du Nœud des planètes, calculé fuivant ma méthode, pour l'an 50 de l'Ere vulgaire.

Longitude du Nœud afcendant pour l'an 50.	SATURNE...	3^{f}	1^{d}	$52'$
	JUPITER....	2.	11.	17
	MARS......	0.	29.	19
	VÉNUS....	2.	0.	26
	MERCURE....	0.	24.	09

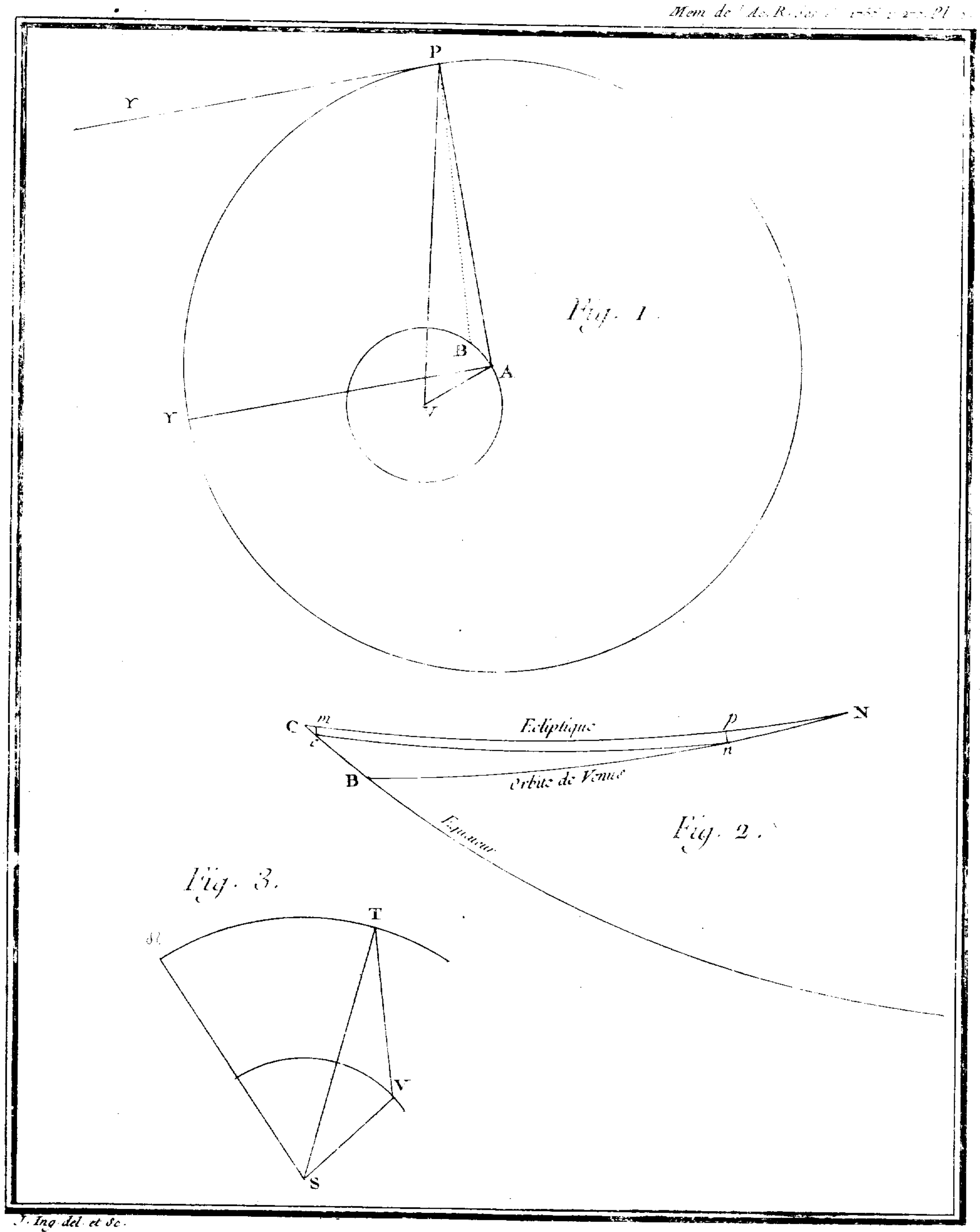
En employant ces longitudes dans les formules précédentes, on trouve que dans le premier fiècle l'obliquité de l'écliptique ne diminuoit que de $43'',6$ au lieu de $47'',2$, & la préceffion des équinoxes diminuoit de $48'',04$, c'eft-à-dire, de 34 fecondes plus que dans ce fiècle-ci, où nous avons vu que la diminution féculaire n'eft que de $14'',28$. En fuppofant donc la préceffion actuelle des équinoxes $50'',336$, comme je l'ai conclu des obfervations de Tycho-Brahé, comparées avec celles de M. l'abbé de la Caille, elle n'a dû être que de 50 secondes dans le premier siècle. Je me suis déjà servi de cette importante considération pour prouver qu'il n'y avoit point eu d'accélération physique depuis vingt siècles dans le mouvement de la Terre. Voy. Mém. de l'Acad. 1757.

Au reste, si M. Euler, dans l'endroit déjà cité, donne 59″ au lieu de 43″,6, que je viens de trouver pour la diminution séculaire de l'obliquité de l'écliptique dans le premier siècle de notre Ere, c'est qu'il n'a pas employé, comme je viens de le faire, le mouvement des Nœuds de Vénus, calculé dans le principe de l'attraction, & il le suppose moins avancé que moi de plus de 10 degrés *, savoir le Nœud de Jupiter $2^{s}\ 13^{d}\ 58'$, & celui de Vénus $1^{s}\ 19^{d}\ 20'$. L'on suppose dans les calculs précédens, que les inclinaisons des orbites n'ont pas changé dans l'intervalle de ces dix-sept siècles, supposition que je discuterai dans une autre occasion, car on voit par les formules ci-dessus, que si l'angle d'une orbite sur l'écliptique augmentoit avec le temps, son effet augmenteroit dans la proportion de son sinus. Il ne faut que comparer les latitudes des étoiles dans le catalogue de Ptolémée avec celles que l'on a observées dans ce siècle-ci, aussi-bien que les différences de longitudes entre différentes étoiles, pour voir la confirmation de la théorie précédente : par exemple, la première étoile de la constellation du Cocher, dans le catalogue de Ptolémée, a, suivant cet Auteur, $30^{d}\ 0'$ de latitude, tandis que dans le catalogue de Flamsteed elle a $30^{d}\ 49'$; au contraire, la quatorzième étoile des Gemeaux, dont la latitude est méridionale & a dû diminuer, se trouve dans Ptolémée à $1^{d}\ 30'$ de latitude, tandis qu'elle n'a plus que $0^{d}\ 56'$ dans le catalogue de Flamsteed. Il en est à peu près de même de toutes celles qui sont dans la même région du Ciel : quant à la différence des longitudes, prenant l'étoile n.° 27 de la grande Ourse & celle n.° 10 du Dragon, dont la latitude est de $81^{d}\ 48'$; on trouve que la différence de longitude entre ces deux étoiles a diminué de $1^{d}\ 21'$, ce qui s'accorde assez bien avec les formules ci-dessus.

* Voy. Hist. de l'Acad. de Berl. 1754, p. 320.

	Année 1700.	*Au temps de Ptolémée.*
η de la grande Ourſe.......	$5^s\ 12^d\ 34'$	$4^s\ 29^d\ 50'$
n.° 10 du Dragon.........	11. 29. 23.	11. 8. 0.
Différence en longitude......	6. 6. 49.	6. 8. 10.

Quant à l'utilité des calculs que nous avons donnés du mouvement des Nœuds, elle eſt aſſez juſtifiée par la différence énorme que l'on trouve entre les Tables de M. Caſſini & celles de M. Halley, dont l'un attribue 50 ſecondes, & l'autre 24 ſecondes de mouvement au Nœud de Jupiter. Une ſi grande incertitude ne pouvoit être levée qu'en remontant au principe & à la cauſe; les Annales de l'Aſtronomie ne ſont point aſſez anciennes & nos Obſervations ne ſont ni aſſez exactes ni aſſez multipliées pour tenir lieu de ces recherches.



J. Ing. del. et Sc.