MÉMOIRE SUR LES INÉGALITÉS DE MARS PRODUITES PAR L'ACTION DE JUPITER, *En raiſon inverſe du carré de la diſtance.*

Par M. DE LA LANDE.

7 Juin 1758.

L'ÉQUATION $\frac{p}{r} = 1 - e$ coſ. mu exprime le rapport entre le rayon vecteur & l'anomalie vraie dans une orbite elliptique, dont e eſt l'excentricité en parties de la moyenne diſtance, p le demi-paramètre, r le rayon vecteur, u l'anomalie vraie, le mouvement de l'apſide étant à celui de la Planète comme $1 - m$ eſt à 1; ſi le mouvement de l'apſide eſt nul, on aura $\frac{p}{r} = 1 - e$ coſ. u; ſi la Planète en décrivant ſon orbite, eſt attirée par une autre Planète, on décompoſe aiſément cette force perturbatrice en deux parties, l'une dans la direction du rayon vecteur, l'autre perpendiculaire au rayon vecteur. Cela étant, nommons φ la première de ces deux forces, ϖ la ſeconde, M la ſomme des maſſes du Soleil & de la Planète troublée, & Ω la quantité ſuivante,

$$\frac{1}{M\left(1 + 2\int\frac{\Pi r^3 du}{pM}\right)}\left(\Phi rr + \frac{\Pi r dr}{du} - 2\int\frac{\pi r^3 du}{p}\right).$$

M. Clairaut démontre (ſoit dans les Mémoires de l'Académie de 1748, *page 435,* ſoit dans l'ouvrage ſur la théorie de la Lune que l'Académie Impériale de Péterſbourg a couronné en 1752) que pour exprimer tout l'effet de ces deux forces perturbatrices ſur le mouvement de la Planète, il ſuffiſoit d'ajoûter à l'équation $\frac{p}{r} = 1 - e$ coſ. u, la quantité ſin. $u\int\Omega$ coſ. $u\,du$ — coſ. $u\int\Omega$ ſin. $u\,du$.

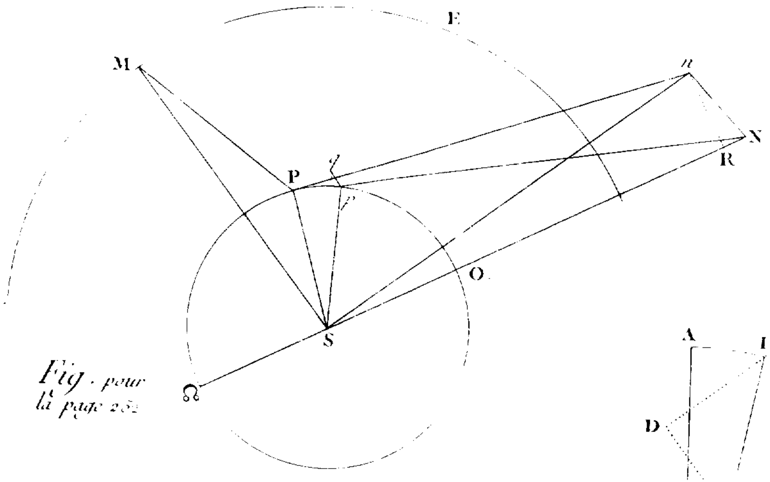


Fig. pour la page 252.

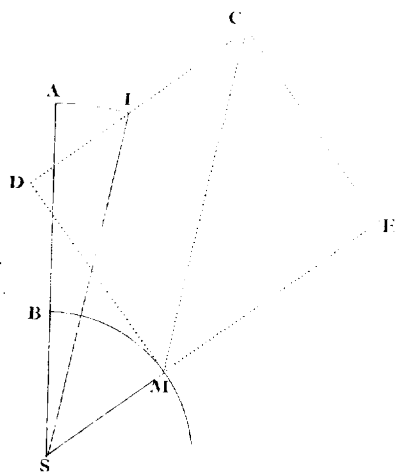


Fig. qui se rapporte à la page 18.

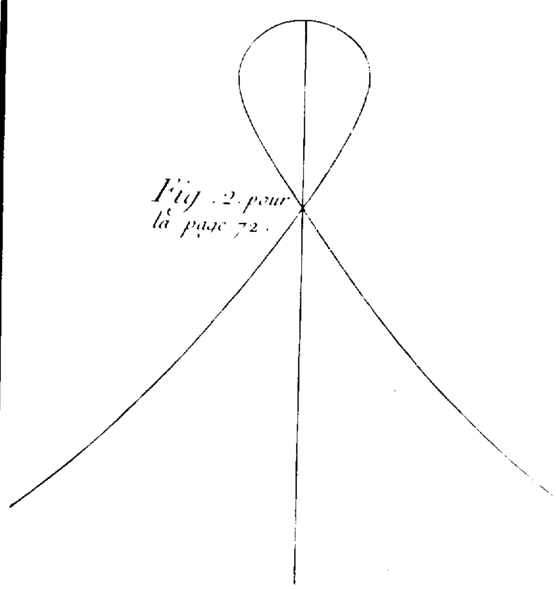


Fig. 2. pour la page 72.

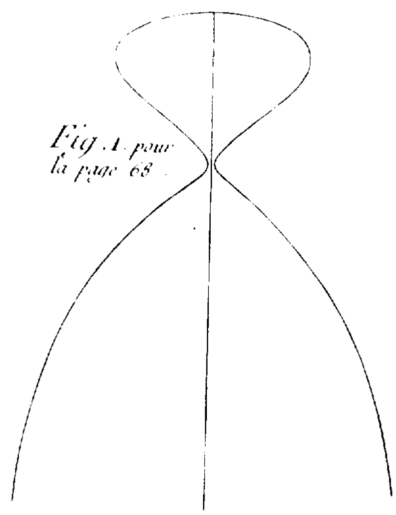


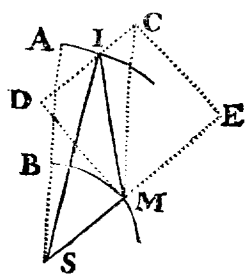
Fig. 1. pour la page 68.

J. Ing. del. et Sc.

Si la valeur de Ω eſt exprimée dans cette forme cof. mu, M. Clairaut démontre encore que cette quantité ſin. $u\int\Omega$ cof. $u\,du$ — cof. $u\int\Omega$ ſin. $u\,du$ ſe réduit aux deux termes ſuivans, $\frac{1}{1-mm}$ cof. mu — $\frac{1}{1-mm}$ cof. u; le dernier terme n'affecte que le mouvement de l'apſide. Par-là tout le calcul des perturbations céleſtes ſe trouve réduit à l'opération très-ſimple d'exprimer Ω en coſinus de multiples de u.

L'application de cette belle théorie a déjà été faite par ſon auteur, ſoit aux calculs de la Lune dont il a le premier démontré l'exactitude & l'accord avec l'obſervation, ſoit aux inégalités que la Terre éprouve par les attractions de Jupiter, de Vénus & de la Lune.

Les recherches que j'ai faites en 1755, ſur les Élémens de l'orbite de Mars, ne ſauroient être complètes, ni les Tables de cette Planète devenir abſolument exactes, à moins qu'on n'y faſſe entrer les inégalités que Jupiter produit dans le mouvement de Mars; & quoiqu'on puiſſe les omettre dans les calculs ordinaires, on ne doit pas les négliger, lorſque par des obſervations choiſies on entreprend de déterminer ſcrupuleuſement la poſition & la grandeur de ſon ellipſe. C'eſt dans cette vûe que j'ai calculé avec le plus grand ſoin, comme on en jugera par le détail, les inégalités de Mars provenantes de Jupiter, ſans omettre celles qui dépendent des excentricités de l'une & de l'autre Planète : j'ai même examiné les équations qui ſont produites par le carré de l'excentricité de Mars, la grandeur des termes qui proviennent de l'excentricité elle-même m'ayant fait craindre que les autres n'euſſent quelque valeur ſenſible, mais j'ai reconnu qu'elles étoient négligeables.



Pour trouver les forces ϕ & π, ſoit I le lieu de Jupiter, M le lieu de Mars, S le Soleil, la diſtance $IS = f$, la diſtance $SM = r$, l'angle $BSM = u$, l'angle de commutation $ISM = t$, la diſtance IM entre Jupiter & Mars $= s$, I la masse de Jupiter; la force avec laquelle Mars est attiré par Jupiter de M en I, est $\frac{I}{s^2}$. Cette force étant dans la diagonale du parallélogramme $SMCI$, elle est composée d'une force qui tireroit de M en S, & d'une force qui tireroit de M en C ou de S en I, ce qui revient au même. Puisque MC est parallèle à SI, la première est $\frac{Ir}{s^3}$; la seconde est $-\frac{If}{s^3}$, car la force IM est à la force SM, comme s est à r: donc la force SM est égale à la force IM multipliée par $\frac{r}{s}$. De même la force IM est à la force MC ou SI, comme s est à f; donc la force SI est égale à la force IM multipliée par $\frac{f}{s}$, c'est-à-dire, $-\frac{If}{s^3}$: celle-ci est négative, parce qu'elle tend à diminuer la force centrale de Mars.

De la force SI il faut retrancher la force $\frac{I}{f^2}$ que Jupiter exerce sur le Soleil, car il ne trouble Mars qu'en vertu de la différence de ces deux forces, c'est-à-dire, en attirant Mars plus ou moins que le Soleil; on aura donc $-\frac{If}{s^3} - \frac{I}{f^2}$ pour la force perturbatrice qui agit de S en I ou de M en C; MC est la diagonale du parallélogramme dont MD & ME sont les côtés, ainsi la force MC est à la force ME, comme le rayon est au cosinus de l'angle CME ou ISM, c'est-à-dire, de l'angle t; donc la force ME sera $-\left(\frac{If}{s^3} + \frac{I}{f^2}\right)$ cos. t. La force MD sera par la même raison $-\left(\frac{If}{s^3} + \frac{I}{f^2}\right)$ sin. t négative, parce qu'elle tend à diminuer l'aire décrite par la Planète ou la longitude que nous comptons depuis la ligne ABS; c'est cette force MD qui dans la formule ci-dessus est appelée π. Pour avoir la force φ, il faut ajoûter les deux forces que nous avons vû être dirigées suivant SM, & l'on aura

$$\varphi = \frac{Ir}{s^3} - \left(\frac{If}{s^3} + \frac{I}{f^2}\right) \text{cos. } t.$$

De l'expreffion de ces deux forces φ & π, il faut faire évanouir s qui eft la diftance des deux Planètes, & qui peut s'exprimer par le moyen de $r, f, t,$ afin de diminuer le nombre des inconnues. Dans le triangle *SIM* dont on connoît deux côtés & l'angle compris, le troifième côté aura pour valeur $s = \sqrt{(f^2 - 2fr \operatorname{cof.} t + r^2)}, \frac{1}{s^3} = (f^2 - 2fr \operatorname{cof.} t + r^2)^{-\frac{3}{2}}$ fi l'on fait $a = 2fr \operatorname{cof.} t - r^2$, on aura $(f^2 - a)^{-\frac{3}{2}}$ $= \frac{1}{f^3} + \frac{3a}{2f^5} + \frac{15a^2}{8f^7} + \frac{35a^3}{16f^9} + \frac{315a^4}{128f^{11}}$, &c.

$a^2 = r^4 + 4f^2r^2 \operatorname{cof.} t^2 - 4fr^3 \operatorname{cof.} t = r^4 + 2f^2r^2 - 4fr^3 \operatorname{cof.} t + 2f^2r^2 \operatorname{cof.} 2t.$

$a^3 = 8f^3r^3 \operatorname{cof.} t^3 - 12f^2r^4 \operatorname{cof.} t^2 + 6fr^5 \operatorname{cof.} t - r^6 = - r^6 - 6f^2r^4 + (6f^3r^3 + 6fr^5) \operatorname{cof.} t - 6f^2r^4 \operatorname{cof.} 2t + 2f^3r^3 \operatorname{cof.} 3t.$

$a^4 = 16f^4r^4 \operatorname{cof.} t^4 - 32f^3r^5 \operatorname{cof.} t^3 + 24f^2r^6 \operatorname{cof.} t^2 - 8fr^7 \operatorname{cof.} t + r^8 = r^8 + 12f^2r^6 + 6f^4r^4 - (8fr^7 + 24f^3r^5) \operatorname{cof.} t + (12f^2r^6 - 6f^2r^4 + 8f^4r^4) \operatorname{cof.} 2t + (2f^3r^3 - 8f^3r^5) \operatorname{cof.} 3t + 2f^4r^4 \operatorname{cof.} 4t.$

Si l'on fubftitue ces valeurs dans les termes de la férie, on aura $\frac{3a}{2f^5} = - \frac{3r^2}{2f^5} + \frac{3r}{f^4} \operatorname{cof.} t$,

$\frac{15a^2}{8f^7} = \frac{15r^4}{8f^7} + \frac{15r^2}{4f^5} - \frac{15r^3}{2f^6} \operatorname{cof.} t + \frac{15r^2}{4f^5} \operatorname{cof.} 2t$,

$\frac{35a^3}{16f^9} = - \frac{105r^4}{8f^7} - \frac{35r^6}{16f^9} + \left(\frac{105r^3}{8f^6} + \frac{105r^5}{8f^8}\right) \operatorname{cof.} t - \frac{105r^4}{8f^7} \operatorname{cof.} 2t + \frac{35r^3}{8f^6} \operatorname{cof.} 3t$,

$\frac{315a^4}{128f^{11}} = \frac{315r^8}{128f^{11}} + \frac{12 \cdot 315r^6}{128f^9} + \frac{6 \cdot 315r^4}{128f^7} - \left(\frac{315r^7}{16f^{10}} + \frac{315 \cdot 3r^5}{16f^8}\right) \operatorname{cof.} t + \left(\frac{315 \cdot 12r^6}{128f^9} + \frac{315 \cdot r^4}{16f^7}\right) \operatorname{cof.} 2t - \frac{315r^5}{16f^8} \operatorname{cof.} 3t + \frac{315r^4}{64f^7} \operatorname{cof.} 4t.$

En raſſemblant tous ces termes, on négligera ceux où t eſt multiplié par un nombre plus grand que 3, & $\frac{1}{f}$ élevé à une puiſſance plus grande que 7, & l'on aura $\frac{1}{s^3} = \frac{1}{f^3} + \frac{9r^2}{4f^5} + \frac{225r^4}{64f^7} + \left(\frac{3r}{f^4} + \frac{45r^3}{8f^6}\right)$ cof. t $+ \left(\frac{15r^2}{4f^5} + \frac{105r^4}{16f^7}\right)$ cof. $2t$ $+ \frac{35r^3}{8f^6}$ cof. $3t$. Cette quantité multipliée par r, donnera la première partie de φ; multipliée par f cof. t & changeant de ſigne, elle donnera la ſeconde partie de φ; multipliée par f ſin. t & changeant auſſi de ſigne, elle donnera la valeur de π, en ajoûtant $\frac{1}{f^2}$,

$$\varphi = -I\left(\frac{r}{2f^3} + \frac{9r^3}{16f^5} - \frac{225r^5}{64f^7}\right) - I\left(\frac{9r^2}{8f^4} + \frac{75r^4}{64f^6}\right) \text{cof. } t$$
$$- I\left(\frac{3r}{2f^3} + \frac{5r^3}{4f^5} - \frac{105r^5}{16f^7}\right) \text{cof. } 2t.$$

$$\Pi = -I\left(\frac{3r^2}{8f^4} + \frac{15r^4}{64f^5}\right) \text{ſin. } t + \left(\frac{3r}{2f^3} + \frac{5r^3}{8f^5}\right) \text{ſin. } 2t.$$

Reprenons la quantité Ω, nous obſerverons d'abord que le diviſeur $1 + 2\int\frac{\pi r^3 du}{pM}$ approchant beaucoup de l'unité, parce que Π eſt une quantité très-petite, la valeur de Ω, qui par elle-même eſt déjà très-petite, n'en ſera pas ſenſiblement diminuée; car en général $\frac{x}{1+\alpha}$, α étant une quantité très-petite, eſt égale à $x - x\alpha$, *&c.* c'eſt-à-dire, que x n'eſt diminué que d'une quantité qui eſt à x comme α eſt à 1. On ſuppoſera donc $\Omega = \frac{\varphi rr}{M} + \frac{\Pi r dr}{M du} - 2\int\frac{\pi r^3 du}{M}$, & l'on cherchera ſucceſſivement les valeurs des trois quantités dont Ω eſt compoſé,

$$\frac{\varphi rr}{M} = -\frac{I}{M}\left(\frac{r^3}{2f^3} + \frac{9r^5}{16f^5} - \frac{225r^7}{64f^7}\right)$$
$$-\frac{I}{M}\left(\frac{9r^4}{8f^4} + \frac{75r^6}{64f^6}\right) \text{cof. } t$$
$$-\frac{I}{M}\left(\frac{3r^3}{2f^3} + \frac{5r^5}{4f^5} - \frac{105r^7}{16f^7}\right) \text{cof. } 2t.$$

Mais

Mais puisque le premier terme ne renferme point l'angle t, il ne dépend point de la position de Jupiter; ainsi il ne peut affecter que le moyen mouvement & le lieu de l'aphélie, c'est pourquoi nous n'y aurons point égard ici.

La seconde quantité qui entre dans Ω est $\frac{\Pi r dr}{M du} =$

$$- \frac{I}{M} \frac{dr}{du} \left(\frac{3r^3}{8f^4} + \frac{15r^5}{64f^6} \right) \text{fin.}\, t - \frac{I}{M} \frac{dr}{du} \left(\frac{3r^2}{2f^3} + \frac{5r^4}{8f^5} \right) \text{fin.}\, 2t.$$

La troisième quantité de Ω est $- 2\int \frac{\Pi r^3 du}{M}$; supposons-la $= - 2\rho$, & prenons le paramètre pour l'unité & pour la moyenne distance, comme M. Clairaut dans sa théorie de la Lune: puisque l'on a $\Pi = - I \left(\frac{3r^2}{8f^4} + \frac{15r^4}{64f^6} \right) \text{fin.}\, t - I \left(\frac{3r}{2f^3} + \frac{5r^3}{8f^5} \right) \text{fin.}\, 2t$, on aura $\rho =$

$$- \int \frac{I}{M} \left(\frac{3r^5}{8f^4} + \frac{15r^7}{64f^6} \right) \text{fin.}\, t du - \int \frac{I}{N} \left(\frac{3r^4}{2f^3} + \frac{5r^6}{8f^5} \right) \text{fin.}\, 2t du.$$

Pour faire disparoître de toutes les quantités précédentes r & t, c'est-à-dire, pour les exprimer par le moyen de u, on reprendra l'équation de l'ellipse $\frac{p}{r} = 1 - e \text{ cof.}\, mu$; supposant $p = 1$, on élevera $1 - e \text{ cof.}\, mu$ aux puissances -1, -2, -3, &c. pour avoir les valeurs de r & de ses puissances; ce qui donnera, en négligeant tous les termes où il y auroit e^2,

$$r = 1 + e \text{ cof.}\, mu \qquad r^2 = 1 + 2e \text{ cof.}\, mu \qquad r^3 = 1 + 3e \text{ cof.}\, mu$$
$$r^4 = 1 + 4e \text{ cof.}\, mu \qquad r^5 = 1 + 5e \text{ cof.}\, mu$$

Pour avoir la valeur de t qui est l'angle de commutation ou l'angle au Soleil entre Mars & Jupiter, il ne faut que retrancher la longitude vraie de Jupiter de celle de Mars; si l'anomalie vraie de Mars est mu, son anomalie moyenne sera $mu + 2e \text{ fin.}\, mu$: quand le mouvement de Mars est 1, je suppose celui de Jupiter $1 - n$, & la différence des deux égale à n; ainsi le rapport de 1 à $1 - n$ est le rapport des mouvemens de Mars & de Jupiter; on aura donc la longitude moyenne de Jupiter, en faiſant abſtraction du mouvement de l'aphélie, $mu - nu + 2e\,(1 - n)\ \text{ſin.}\,mu$; nous la ſuppoſerons pour le préſent égale à ſa longitude vraie, cette ſuppoſition ſera diſcutée dans la ſuite de ce Mémoire : retranchant la longitude de Jupiter de celle de Mars mu, on aura $nu - 2e\,(1 - n)\ \text{ſin.}\,mu = t$, c'eſt la commutation.

Pour chercher les ſinus & les coſinus de t & de $2t$, on emploïera les formules ſuivantes, dans leſquelles on ſuppoſe deux arcs A & B dont A eſt le plus grand : nous allons mettre de ſuite toutes celles dont on fera uſage dans ce Mémoire, ou qu'on a déjà ſuppoſées plus haut.

$$\text{ſin.}\,(A - B) = \text{ſin.}\,A\ \text{coſ.}\,B - \text{ſin.}\,B\ \text{coſ.}\,A$$
$$\text{coſ.}\,(A - B) = \text{coſ.}\,A\ \text{coſ.}\,B - \text{ſin.}\,B\ \text{ſin.}\,A$$
$$\text{ſin.}\,(A + B) = \text{ſin.}\,A\ \text{coſ.}\,B + \text{coſ.}\,A\ \text{ſin.}\,B$$
$$\text{coſ.}\,(A + B) = \text{coſ.}\,A\ \text{coſ.}\,B - \text{ſin.}\,A\ \text{ſin.}\,B$$
$$\text{ſin.}\,A\ \text{coſ.}\,B = \tfrac{1}{2}\,\text{ſin.}\,(A + B) + \tfrac{1}{2}\,\text{ſin.}\,(A - B)$$
$$\text{ſin.}\,B\ \text{coſ.}\,A = \tfrac{1}{2}\,\text{ſin.}\,(A + B) - \tfrac{1}{2}\,\text{ſin.}\,(A - B)$$
$$\text{ſin.}\,A\ \text{ſin.}\,B = \tfrac{1}{2}\,\text{coſ.}\,(A - B) - \tfrac{1}{2}\,\text{coſ.}\,(A + B)$$
$$\text{coſ.}\,A\ \text{coſ.}\,B = \tfrac{1}{2}\,\text{coſ.}\,(A + B) + \tfrac{1}{2}\,\text{coſ.}\,(A - B)$$
$$\text{ſin.}\,A\ \text{coſ.}\,A = \tfrac{1}{2}\,\text{ſin.}\,2A$$
$$\text{ſin.}\,A^2 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\,\text{coſ.}\,2A$$
$$\text{coſ.}\,A^2 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\,\text{coſ.}\,2A$$
$$\text{ſin.}\,A^3 = \tfrac{3}{4}\,\text{ſin.}\,A - \tfrac{1}{4}\,\text{ſin.}\,3A$$
$$\text{coſ.}\,A^3 = \tfrac{3}{4}\,\text{coſ.}\,A + \tfrac{1}{4}\,\text{coſ.}\,3A$$
$$\text{ſin.}\,A^4 = \tfrac{3}{8} - \tfrac{1}{2}\,\text{coſ.}\,2A + \tfrac{1}{8}\,\text{coſ.}\,4A$$
$$\text{coſ.}\,A^4 = \tfrac{3}{8} + \tfrac{1}{2}\,\text{coſ.}\,2A + \tfrac{1}{8}\,\text{coſ.}\,4A.$$

Dans l'application de ces formules à la quantité $nu - 2e\,(1 - n)\ \text{ſin.}\,mu = t$, nous ſuppoſerons le coſinus de $-\,2e\,(1 - n)\ \text{ſin.}\,mu$ égal à l'unité, cet arc n'étant jamais fort grand, & nous ſuppoſerons ſon ſinus égal à la quantité elle-même, alors on trouvera

$$\text{ſin.}\,t = \text{ſin.}\,nu + e\,(1 - n)\ \text{ſin.}\,(n + m)u - e\,(1 - n)\ \text{ſin.}\,(n - m)u$$
$$\text{coſ.}\,t = \text{coſ.}\,nu + e\,(1 - n)\ \text{coſ.}\,(n + m)u - e\,(1 - n)\ \text{coſ.}\,(n - m)u$$

$\text{fin. } 2t = \text{fin. } 2nu + 2e\,(1-n)\,\text{fin. }(2n+m)u - 2e\,(1-n)\,\text{fin. }(2n-m)u$

$\text{cof. } 2t = \text{cof. } 2nu + 2e\,(1-n)\,\text{cof. }(2n+m)u - 2e\,(1-n)\,\text{cof. }(2n-m)u$

Suppoſons d'abord $t = nu$, prenant dans les Tables aſtronomiques de Halley ces valeurs de e, de $\frac{1}{f}$ & de $1 - n$, c'eſt-à-dire de l'excentricité de Mars, du rapport des diſtances moyennes de Mars & de Jupiter & du rapport de leurs moyens mouvemens, on aura les logarithmes ſuivans: nous ſuppoſons $m = 1$ en négligeant le mouvement de l'aphélie,

e......	89684732	$\frac{1}{1-nn}$.....	05652715
$\frac{1}{f}$...	94668115	$\frac{1}{1-4nn}$.....	97371678
n.....	99249865	$\frac{1}{1-(n-m)^2}$...	99892067
$m - n$...	92003878	$\frac{1}{1-(2n-m)^2}$...	07725649

$\left(\frac{9r^4}{8f^4} + \frac{75r^6}{64f^6}\right)$ cof. $t = 0{,}0090279$ cof. nu $+$ $0{,}0017480 53$ cof. $(n-m)u$ $+$ $0{,}001748053$ cof. $(n+m)u$,

$\left(\frac{3r^3}{2f^3} + \frac{5r^5}{4f^5} - \frac{105r^7}{16f^7}\right)$ cof. $2nu = 0{,}03919806$ cof. $2nu$ $+$ $0{,}0054929$ cof. $(2n-m)u$ $+$ $0{,}0054929$ cof. $(2n+m)u$.

Nous avons vû que $r = 1 + e$ cof. mu, mais on ſait qu'en général la différencielle de $+ e$ cof. mu eſt $- mdu$ fin. mu; ainſi $dr = - mdu$ fin. mu, $\frac{dr}{du} = - m$ fin. mu, $\frac{dr}{du}$ fin. $nu = - \frac{e}{2}$ cof. $(n-m)u$ $+ \frac{e}{2}$ cof. $(n+m)u$, $\frac{dr}{du}$ fin. $2nu = - \frac{e}{2}$ cof. $(2n-m)u$ $+ \frac{e}{2}$ cof. $(2n+m)u$: d'où l'on tire les deux valeurs ſuivantes,

$$\left(\frac{3r^3}{8f^4} + \frac{3r^5}{64f^6}\right) \text{ſin. } nu \frac{dr}{du} = 0{,}000135336 \text{ coſ. } (n + m)u - 0{,}000135336 \text{ coſ. } (n - m)u,$$

$$\left(\frac{3r^2}{2f^3} + \frac{5r^4}{8f^5}\right) \text{ſin. } 2nu \frac{dr}{du} = 0{,}00181647 \text{ coſ. } (2n + m)u - 0{,}00181647 \text{ coſ. } (2n - m)u.$$

Pour avoir la valeur de ρ, il ſuffit d'obſerver que l'intégrale de du ſin. mu eſt $- \frac{1}{m}$ coſ. mu,

$$\left(\frac{3r^5}{8f^4} + \frac{15r^7}{64f^6}\right) \text{ſin. } nu = 0{,}0029 1052 \text{ ſin. } nu + 0{,}00069046 \text{ ſin. } (n + m)u + 0{,}00069046 \text{ ſin. } (n - m)u.$$

En diviſant ces termes par leurs multiples reſpectifs n, $n + m$, $n - m$ pour l'intégration, on obſervera que $n - m$ eſt une quantité négative,

$$-2\int \left(\frac{3r^5}{8f^4} + \frac{15r^7}{64f^6}\right) \text{ſin. } nu \frac{dr}{du} = 0{,}0069184 \text{ coſ. } nu + 0{,}00074952 \text{ coſ.} (n + m)u - 0{,}0087052 \text{ coſ.} (n - m)u,$$

$$\left(\frac{3r^4}{2f^3} + \frac{5r^6}{8f^5}\right) \text{ſin. } 2nu = 0{,}03906479 \text{ ſin. } 2nu + 0{,}00739 13 \text{ ſin. } (2n - m)u + 0{,}0073913 \text{ ſin. } (2n + m)u,$$

$$-2\int \left(\frac{3r^4}{2f^3} + \frac{5r^6}{8f^5}\right) \text{ſin. } 2nu\,du = 0{,}000021757 \text{ coſ. } 2nu + 0{,}0000101461 \text{ coſ. } (2n - m)u + 0{,}0000025821 \text{ coſ. } (2n + m)u.$$

En raſſemblant toutes les quantités que l'on vient de trouver pour les différentes parties de Ω, on aura avant que de les avoir multipliées par $- \frac{N}{M}$,

$$0{,}0159463 \text{ coſ. } nu + 0{,}085626 \text{ coſ. } 2nu - 0{,}00709251 \text{ coſ. } (n - m)u + 0{,}002632909 \text{ coſ.} (n + m)u + 0{,}025327 \text{ coſ. } (2n - m)u + 0{,}0128196 \text{ coſ. } (2n + m)u.$$

On multipliera tous ces termes par $-\frac{N}{M}$ qui est le rapport de la masse de Jupiter à la somme des masses du Soleil & de Mars, ou, ce qui revient au même, à la masse seule du Soleil, qui est dix millions de fois plus grande que celle de Mars, ce rapport est $\frac{1}{1067}$, comme M. Newton l'a déduit des révolutions & des distances des Satellites de Jupiter & des planètes, ensuite on divisera chacun de ces coëfficiens par $1 - nn$, $1 - 4nn$, $1 - (n - m)^2$ &c. respectivement pour avoir le terme qui en résulte dans l'équation de l'orbite $\frac{1}{r} = 1 - c \text{ cos. } u$, comme nous l'avons dit en commençant, & l'on observera que le second $1 - 4nn$, le quatrième & le sixième sont négatifs; nous appelons Z cette correction de l'équation primitive. La quantité Z nous donne pour équation de l'orbite $\frac{1}{r} = 1 - e \text{ cos. } mu + Z$, d'où l'on conclud $rr = 1 + 2e \text{ cos. } mu - 2Z - 6eZ \text{ cos. } mu$, en négligeant les puissances supérieures de Z: il s'agit d'en déduire la correction du temps ou de la longitude moyenne.

Dans la théorie de la Lune de M. Clairaut, (*page 10*) on trouve l'élément du temps $= \frac{rrdu}{\surd(f^2 + 2\int \Pi r^3 du)}$, ou, ce qui revient au même $\frac{rrdu}{M \surd(\frac{f^2}{M^2} + \frac{2}{M^2} \int \Pi r^3 du)}$; mais $\frac{f^2}{M}$ est le paramètre de l'orbite troublée, dans l'équation générale de M. Clairaut. Nous le pouvons supposer égal à l'unité, car il ne diffère de la moyenne distance connue par observation & supposée égale à l'unité, que de la quantité e^2: supposant aussi l'unité pour la masse du Soleil M, élevant le dénominateur de la fraction à la puissance $-\frac{1}{2}$, & négligeant les puissances de $\int \pi r^3 du$, on aura l'expression du temps $dx = rrdu (1 - \int \pi r^3 du) = rrdu (1 - \rho)$, en faisant $\rho = \int \pi r^3 du$. Substituant dans cette expression à la place de rr, les termes qui renferment Z dans la valeur de rr, on aura la quantité dont Z influe dans la correction du temps ou de la longitude moyenne, $-\int(2Z + \rho)du - \int(6eZ - 2\rho)$ cos. $mudu$

$\rho = 0{,}000003242$ cos. $nu + 0{,}000021557$ cos. $2nu$ $- 0{,}000004079$ cos. $(n-m)u + 0{,}00000035 12$ cos. $(n+m)u + 0{,}000010146$ cos. $(2n-m)u$ $+ 0{,}000002582$ cos. $(2n+m)u$.

La première partie $-(2Z + \rho) = + 0{,}0001066$ cos. $nu - 0{,}000109183$ cos. $2nu - 0{,}0000088 89$ cos. $(n-m)u - 0{,}0000024124$ cos. $(n+m)u$ $+ 0{,}000078676$ cos. $(2n-m)u - 0{,}0000064594$ cos. $(2n+m)u$.

On multipliera par du, on intégrera en divisant chaque terme par son multiple, on ajoûtera le logarithme 5,3144251332 qui sert à réduire en secondes les arcs qui se trouvent naturellement exprimés en décimales du rayon, dans toutes les formules précédentes, & l'on aura la correction de l'expression de la longitude vraie, ou les équations qu'il faut ajoûter à la longitude moyenne, qui sont d'une dénomination contraire à celles de la correction du temps ou de l'expression de la longitude moyenne, $-26'',13$ sin. $nu + 13'',38$ sin. $2nu$ $- 11'',55$ sin. $(n-m)u + 0'',27$ sin. $(n+m)u$ $- 23'',77$ sin. $(2n-m)u + 0'',50$ sin. $(2n+m)u$.

La seconde partie de l'expression du temps ou de la longitude moyenne $-(6eZ + 2e\rho)$ cos. $mudu$, ne renferme que deux termes qui puissent être considérables; ce sont ceux qui proviennent des deux grands termes de Z, c'est-à-dire, nu & $2nu$ multipliés par $-6e$ cos. mu, & ce seront par conséquent $(m-n)u$ & $(2m-n)u$: car les termes $(m+n)u$ & $(2m+n)u$ sont beaucoup moindres, parce que ces diviseurs sont plus grands & rendent les termes moindres dans chaque intégration: quoi qu'il en soit, les voici tous,

$-(6eZ + 2e\rho) = 0{,}00000175$ cos. $nu + 0{,}00001073$ cos. $2nu$ $+ 0{,}00001502$ cos. $(n-m)u + 0{,}00001502$ cos. $(n+m)u$ $- 0{,}0000142$ cos. $(2n-m)u - 0{,}0000142$ cos. $(2n+m)u$;

ce qui donnera après l'intégration les équations ſuivantes,

$-0'',43$ ſin. nu $+ 1'',31$ ſin. $2nu - 19'',53$ ſin. $(n-m)u$ $+ 1'',68$ ſin. $(n+m)u - 4'',29$ ſin. $(2n-m)u$ $- 1'',09$ ſin. $(2n+m)u$, qu'il faut ajoûter aux précédentes.

Examinons actuellement ce que peuvent produire les termes négligés dans le calcul précédent. Dans l'expreſſion $\left(\frac{9r^4}{8f^4} + \frac{75r^6}{64f^6}\right)$ coſ. t, on a ſuppoſé coſ. $t =$ coſ. nu au lieu de coſ. $nu - e(1-n)$ coſ. $(n+m)u + e(1-n)$ coſ. $(n-m)u$; ces deux derniers termes produiſent $-0{,}0001332$ coſ. $(n+m)u + 0{,}0001 3318$ coſ. $(n-m)u$, on néglige $n+2m$, $n-2m$. En prenant ainſi les deux termes négligés dans coſ. $2t$, ſin. t, ſin. $2t$, on aura les valeurs ſuivantes

pour $\left(\frac{3r^3}{2f^3} + \frac{5r^5}{4f^5} - \frac{105r^7}{16f^7}\right)$ coſ. $2t$, $-0{,}0011565$ coſ. $(2n+m)u + 0{,}0011565$ coſ. $(2n-m)u$,

pour $\frac{dr}{du}\left(\frac{3r^3}{8f^4} + \frac{15r^5}{64f^6}\right)$ ſin. $t - 0{,}000003992$ coſ. nu $- 0{,}000000288$ coſ. $(n-m)u - 0{,}000000288$ coſ. $(n+m)u$,

pour $\left(\frac{3r^2}{2f^3} + \frac{5r^4}{8f^5}\right)\frac{dr}{du}$ ſin. $2nu - 0{,}000107192$ coſ. $2nu + 0{,}000005 1562$ coſ. $(2n+m)u$ $- 0{,}0000051562$ coſ. $(2n-m)u$,

pour $\left(\frac{3r^5}{8f^4} + \frac{15r^7}{64f^6}\right)$ ſin. $t - 0{,}000023301$ coſ. $(n+m)u$ $- 0{,}00027067$ coſ. $(n-m)u$,

pour $\left(\frac{3r^4}{2f^3} + \frac{5r^6}{8f^5}\right)$ ſin. $2t - 0{,}00042964$ coſ. $(2n+m)u$ $+ 0{,}0016882$ coſ. $(2n-m)u$.

Ayant ajoûté tous ces termes à la valeur de Ω, on aura

$Z = - 0{,}00005491$ cof. $nu + 0{,}000043759$ cof. $2nu$ $+ 0{,}000058677$ cof. $(n - m)u + 0{,}00000099662$ cof. $(n + m)u - 0{,}000040557$ cof. $(2n - m)u$ $+ 0{,}000001893$ cof. $(2n + m)u$.

Les équations dépendantes de $-(2Z + \rho)$ feront $-26'',13 + 13'',40 - 10'',28 + 0'',27 - 21'',92 + 0'',52$; les équations provenantes de $-(6eZ + 2e\rho)$ cof. $mudu$ $-0'',39 + 1'',19 - 19'',43 + 1'',68 - 4'',30 - 1'',09$.

Une autre omiffion que nous avons faite dans les calculs précédens, confifte dans les termes affectés de e^2 qui eft le carré de l'excentricité de Mars; car puifque $\frac{1}{r} = 1 - e$ cof. mu,

on a $r^2 = 1 + 2e$ cof. $mu + \frac{3}{2}e^2$ cof. $2mu$.

$r^3 = 1 + 3e$ cof. $mu + 3e^2$ cof. $2mu$.

$r^4 = 1 + 4e$ cof. $mu + 5e^2$ cof. $2mu$.

$r^5 = 1 - 5e$ cof. $mu + \frac{15e^2}{2}$ cof. $2mu$.

ainfi le terme $\frac{9r^4}{8f^4}$ cof. t recevra dans fa valeur le nouveau terme $\frac{45e^2}{8f^4}$ cof. nu cof. $2mu = \frac{45e^2}{16f^4}$ cof. $(n + 2m)u$ $+ \frac{45e^2}{16f^4}$ cof. $(n - 2m)u$: or ce dernier terme qui eft le plus confidérable de ceux qui proviendroient de e^2, ne donne pour Z que $0{,}0000000097$ cof. $(n - 2m)u$, fraction fi petite qu'on doit être pleinement raffuré fur la petiteffe de ces termes; ainfi toutes les équations qui dépendent de la diftance de Jupiter, de la commutation & de l'excentricité de Mars, fe réduifent aux fuivantes $- 25'',74$ fin. nu $+ 12'',21$ fin. $2nu + 9'',25$ fin. $(n - m)u - 1'',41$ fin. $(n + m)u$ $- 17'',62$ fin. $(2n - m)u + 1'',61$ fin. $(2n + m)u$, dans lefquelles nu exprime la commutation, & mu l'anomalie de Mars.

De

Des termes qui dépendent de l'excentricité de Jupiter.

On a ſuppoſé dans les calculs précédens que l'orbite de Jupiter étoit circulaire & concentrique, en ſorte que ſa diſtance au Soleil fût conſtante, & ſon mouvement uniforme; la valeur de $\frac{1}{s^3}$ & celle de ſin. t qui entrent dans l'expreſſion des forces φ & π, ſeront un peu différentes ſi nous y faiſons entrer cette nouvelle conſidération; mais les termes que nous avons employés ci-devant, reſteront les mêmes, il faudra ſeulement y en ajoûter de nouveaux, & pour cet effet nous chercherons la valeur de $\frac{1}{s^3}$ en ſubſtituant pour f, qui eſt la diſtance moyenne de Jupiter au Soleil, une diſtance vraie priſe dans l'ellipſe excentrique de cette Planète, & la valeur de t, en retranchant de l'anomalie moyenne de Mars, non pas l'anomalie moyenne de Jupiter, mais ſon anomalie vraie, pour avoir un angle de commutation affecté de l'inégalité de Jupiter.

Soit z l'anomalie vraie de Jupiter, c ſon excentricité, l'équation du centre eſt à très-peu près $2c$ ſin. z, du moins les termes que l'on néglige dans cette expreſſion ſont inſenſibles, comme je le ferai voir dans mon *Aſtronomie;* & parce que l'équation du centre s'ajoûte à l'anomalie vraie pour avoir l'anomalie moyenne, on aura $z + 2c$ ſin. z, anomalie moyenne de Jupiter.

Le moyen mouvement de Jupiter étant à celui de Mars comme $1 - n$ eſt à 1, il faut diviſer l'anomalie moyenne de Jupiter par $1 - n$, pour avoir celle de Mars ſuppoſé concentrique, qui ſera $\frac{z}{1-n} + \frac{2c}{1-n}$ ſin. z; ſi de cette anomalie de Mars nous ôtons celle de Jupiter ſuppoſée $= z$, il reſtera pour la différence ou pour l'angle de commutation,

$$\frac{z}{1-n} - z + \frac{2c}{1-n} \text{ſin.}\, z = \left(\frac{1}{1-n} - 1\right) z + \frac{2c}{1-n} \text{ſin.}\, z,$$

nous appellerons p la différence des moyens mouvemens, en

prenant celui de Mars pour unité, c'est-à-dire, $p = \frac{1}{1-n} - 1$,
ainsi nous aurons l'angle de commutation $t = pz + \frac{2c}{1-n}$ sin. z,
sin. t = sin. $pz + \frac{2c}{1-n}$ sin. z cos. pz = sin. $pz + \frac{c}{1-n}$ sin. $(p+1)z - \frac{c}{1-n}$ sin. $(p-1)z$, & de même
cos. t = cos. $pz - \frac{2c}{1-n}$ sin. z sin. pz = cos. $pz - \frac{c}{1-n}$ cos. $(p-1)z + \frac{c}{1-n}$ cos. $(p+1)z$,

cos. $2t$ = cos. $2pz - \frac{2c}{1-n}$ cos. $(2p-1)z + \frac{2c}{1-n}$ cos. $(2p+1)z$,

cos. $3t$ = cos. $3pz - \frac{3c}{1-n}$ cos. $(3p-1)z + \frac{3c}{1-n}$ cos. $(3p+1)z$, &c.

Dans la valeur de $\frac{1}{s^3} = \frac{1}{f^3}$ + &c. trouvée ci-dessus, on substituera pour f & ses puissances, les valeurs suivantes,

$$\frac{1}{f^3} = \frac{1 - 3c \text{ cos. } z}{f^3}, \quad \frac{1}{f^4} = \frac{1 - 4c \text{ cos. } z}{f^4}, \text{ &c.}$$

Le logarithme de c est 8,6832078, & celui de $\frac{1}{f}$ est 9,4668115; ainsi l'on aura $\frac{1}{f^3}$ = 0,02514 — 0,003637 cos. z,

$\frac{9r^2}{4f^5}$ = 0,004856 — 0,001170 cos. z,

$\frac{225r^4}{64f^7}$ = 0,0006511 + 0,0002198 cos. z, &c.

$\frac{1}{s^3}$ = 0,03065 — 0,005027 cos. z
+ (0,025656 — 0,005291 cos. z) cos. t
+ (0,009307 — 0,002361 cos. z) cos. $2t$
+ (0,002766 — 0,0008002 cos. z) cos. $3t$,

& réduisant les produits de sinus en sinus de multiples, on aura

$$\frac{1}{s^3} = 0{,}03065 - 0{,}005027 \text{ cof. } z + 0{,}025656 \text{ cof. } t$$
$$+ 0{,}009307 \text{ cof. } 2t + 0{,}002766 \text{ cof. } 3t - 0{,}002645 \text{ cof. } (t+z)$$
$$- 0{,}002645 \text{ cof. } (t-z) - 0{,}001180 \text{ cof. } (2t+z) - 0{,}001180 \text{ cof. } (2t-z)$$
$$- 0{,}0004 \text{ cof. } (3t+z) - 0{,}0004 \text{ cof. } (3t-z).$$

Prenons les trois plus grands termes qui font t, $2t$, $3t$, & pour les difcuter avec plus de foin, fubftituons dans ces trois termes les valeurs de cof. t, $2t$, $3t$, trouvées ci-deffus, après avoir appelé α, β, γ les coëfficiens numéraires 0,025656, &c. alors on aura dans la valeur de $\frac{1}{s^3}$ les termes fuivans,

$$- \frac{c\alpha}{1-n} \text{ cof. } (p-1)z + \frac{c\alpha}{1-n} \text{ cof. } (p+1)z$$
$$- \frac{2c\beta}{1-n} \text{ cof. } (2p-1)z + \frac{2c\beta}{1-n} \text{ cof. } (2p+1)z$$
$$- \frac{3c\gamma}{1-n} \text{ cof. } (3p-1)z + \frac{3c\gamma}{1-n} \text{ cof. } (3p+1)z.$$

Ainfi réduifant ces valeurs en nombres, on trouvera

$$\frac{1}{s^3} = 0{,}03065 - 0{,}005027 \text{ cof. } z + 0{,}025656 \text{ cof. } pz$$
$$+ 0{,}009307 \text{ cof. } 2pz + 0{,}002766 \text{ cof. } 3pz - 0{,}010445$$
$$\text{cof. } (p-1)z + 0{,}005155 \text{ cof. } (p+1)z - 0{,}006838$$
$$\text{cof. } (2p-1)z + 0{,}004478 \text{ cof. } (2p+1)z - 0{,}002922$$
$$\text{cof. } (3p-1)z + 0{,}002122 \text{ cof. } (3p+1)z.$$

Pour avoir la valeur de π, il faut multiplier cette valeur par fin. t, nous chercherons feulement les termes qui ont la forme $p-1$ & $2p-1$, parce que ce font ceux dont il doit réfulter les équations les plus confidérables; multipliant donc par $\text{fin. } pz + \frac{c}{1-n} \text{ fin. } (p+1)z - \frac{c}{1+n} \text{ fin. } (p-1)z$, & raffemblant les termes du produit, on trouvera

$$\frac{a}{s^3} \text{ fin. } t = -0{,}002813 \text{ cof. } (p-1)z - 0{,}01857 \text{ cof. } (2p-1)z,$$

& $\rho = -0{,}0006535 \text{ fin. } (p-1)z - 0{,}001933 \text{ fin. } (2p-1)z.$

Pour trouver auffi la valeur de φ, il faut multiplier $\frac{1}{s^3}$ par

$\text{cof.}\, p z = -\frac{c}{1-n} \text{cof.}(p-1)z + \frac{c}{1-n} \text{cof.}(p+1)z$, & l'on aura les termes $-0{,}010163\ \text{cof.}(p-1)z - 0{,}002005\ \text{cof.}(2p-1)z$, qui ôtés des termes correſpondans de $\frac{1}{s^3} = -0{,}010445\ \text{cof.}(p-1)z - 0{,}006838\ \text{cof.}(2p-1)z$, donnent pour la valeur de φ, $-0{,}00844\ \text{cof.}(p-1)z + 0{,}003325\ \text{cof.}(2p-1)z$, & $\Omega = -0{,}007133\ \text{cof.}(p-1)z + 0{,}007191\ \text{cof.}(2p-1)z$, $Z = 0{,}0004070\ \text{cof.}(p-1)z - 0{,}00007876\ \text{cof.}(2p-1)z$; donc $2Z + \rho = 0{,}0001605\ \text{cof.}(p-1)z - 0{,}002091\ \text{cof.}(2p-1)z$: on multiplie par $du = \frac{dz}{1-n}$, on diviſe par $p-1$ & $2p-1$ pour intégrer, & l'on multiplie par la maſſe de Jupiter & par l'arc égal au rayon, pour avoir enfin les deux équations provenantes de l'excentricité de Jupiter,

$$+0'',045\ \text{ſin.}(t-z) - 0'',26\ \text{ſin.}\,2t-z:$$

leur valeur eſt trop petite pour mériter d'être employée dans les calculs.

Les inégalités que l'action de la Terre produit ſur le mouvement de Mars, doivent être auſſi ſenſibles, peut-être même plus grandes que celles dont j'ai donné le calcul dans ce Mémoire ; mais la recherche de ces équations formera l'objet d'un autre Ouvrage. *Voy. Mém. Acad. 1761.*

Nota. Nous devons obſerver ici que dans la figure inſérée ci-deſſus *page 13*, il s'eſt gliſſé une légère erreur; la ligne *MC* doit être parallèle à la ligne *SI*, qui eſt le rayon vecteur de Jupiter, au lieu qu'on l'a rendue parallèle à la ligne *SA*; celle-ci ne marque autre choſe, ſi ce n'eſt le point d'où l'on ſuppoſe que les deux planètes *I* & *M* ſont parties, leurs mouvemens ſimultanés étant exprimés par les angles *ASI* & *ASM*; la ligne *IM* doit être la diagonale du parallélograme *SMCI*.