EXAMEN DES ERREURS

Que l'on peut commettre dans la mesure des hauteurs méridiennes, ou des hauteurs correspondantes; Avec les Tables de corrections qui en résultent.

Par M. DE LALANDE.

LORSQU'ON observe la hauteur d'un astre avec un quart-de-cercle qui porte un micromètre, on suppose naturellement que le fil horizontal est avec l'oeil dans un plan parallèle à l'horizon, & qu'il est indifférent, pour la hauteur, de considérer l'astre au milieu ou aux extrémités du champ de la lunette: les Astronomes savent assez que cela n'est vrai qu'à peu près; mais comme l'erreur est petite, on a négligé d'en examiner les circonstances & d'en donner des Tables. M. Cassini y avoit fait attention comme on le voit, dans son Traité *De la grandeur & de la figure de la Terre*, qui sert de suite aux Mémoires de l'Académie de 1718, « nous nous aperçumes » plusieurs fois, dit-il, *page 225*, que notre instrument étant placé » exactement sur le méridien, quelques-unes des étoiles que nous » observions, paroissoient s'abaisser en s'approchant du méridien, » & s'élever en s'éloignant, en sorte que dans le temps de leur » passage par le méridien on trouvoit leur hauteur plus petite qu'avant & après ». M. Cassini prit soin d'éviter l'erreur qui pouvoit en résulter, ainsi il n'eut pas besoin d'en discuter les circonstances ni la mesure, mais il y a des cas où l'on est forcé d'y avoir égard, comme on le verra tout-à-l'heure: cependant je ne vois pas que depuis ce temps-là il en ait été question parmi les Astronomes, si ce n'est dans le Calendrier astronomique de Berlin, composé par feu M. Grischow pour l'année 1749; mais ce calendrier, le seul livre où l'on en ait traité en détail, contient à ce sujet une méprise qui rend l'équation deux cents mille fois plus grande qu'elle n'est réellement; c'est-là ce qui m'a fait examiner de plus près ce point de l'Astronomie pratique.

Soit *ZSH* le vertical d'un astre *S*, *ZMO* un autre vertical très-proche du premier, *SM* un petit arc parallèle à l'horizon, en sorte que *ZS* soit égal à *ZM*, l'on voit aisément que l'œil de l'observateur & l'axe de la lunette doivent toûjours se trouver dans le plan d'un grand cercle perpendiculaire au vertical, tel que *SLV*; ainsi le petit arc *SL*, qui est une portion de ce grand cercle, doit représenter ce qu'on appelle le fil horizontal de la lunette. Si lorsque la lunette est dirigée à la hauteur *SH* avec un fil qui comprenne la largeur *SL*, on n'observe l'astre que quand il sera parvenu à l'extrémité *L* du fil, il n'aura alors qu'une hauteur *LO*, & par conséquent la hauteur *HS* que marquera l'instrument, sera trop grande de la quantité *LM*; en effet, le fil vertical de la lunette étant dans le plan *ZSH*, le fil-à-plomb marquera sur le limbe la hauteur *SH*, & cependant l'astre n'aura de hauteur que *LO*. C'est la différence *LM* qu'il s'agit de calculer. Fig. 1.

Si la verticale *ZH* est supposée le méridien de l'observateur, la même erreur aura toûjours lieu, & il y aura quelque chose à retrancher à cet égard de la hauteur indiquée sur le quart-de-cercle; mais dans le cas de la hauteur méridienne, il y aura encore une autre correction à faire, qui, dans un cas, compensera la première. L'astre arrivé en *L* ayant passé le méridien, a nécessairement moins de hauteur que lorsqu'il étoit en *S*; ainsi il faudra ajoûter à la hauteur trouvée par la correction précédente, la quantité dont la hauteur varie près du méridien, pour avoir la hauteur méridienne que l'on cherche. Cette équation est composée de deux parties, l'une qui dépend de la déclinaison & l'autre de la hauteur. Je vais donner les formules & les Tables de toutes ces équations.

THÉOREME.

Dans un triangle sphérique *ABC*, *fig. 2*, rectangle en *B* dont le côté *BC* est fort petit, la quantité dont son n...

thénuse AC excède le côté AB, est sensiblement égale à $\frac{BC^2 \text{ cotang. } AB}{114^d\ 35'\ 29'',6}$.

DÉMONSTRATION.

Soit pris l'arc AD égal à AB, DC sera la différence que l'on cherche, & l'hypothénuse sera $AB + DC$; par la propriété des triangles sphériques rectangles, on a cos. $(AB + DC) =$ cos. $AC =$ cos. AB cos. $BC =$ cos. AB cos. $DC -$ sin. AB sin. $DC =$ cos. $AD - DC$ sin. AD, parce que le cosinus d'un petit arc est sensiblement égal à l'unité, & son sinus sensiblement égal à l'arc même, cos. $BC = 1 - \frac{1}{2} BC^2$, comme on le démontre dans les expressions des sinus & des cosinus en séries*. Ainsi cos. AB cos. $BC =$ cos. $AB - \frac{1}{2}$ cos. $AB \cdot BC^2$, (en substituant pour cos. BC, sa valeur, $1 - \frac{1}{2} BC^2$) $=$ cos. $AB - DC$ sin. AB, comme on l'a vû ci-dessus; donc DC sin. $AB = \frac{1}{2}$ cos. $AB \cdot BC^2$, $DC = \frac{\text{cos. } AB \cdot BC^2}{2 \text{ sin. } AB} = \frac{BC^2}{2 \text{ tang. } AB} = \frac{1}{2} BC^2$ cot. AB.

Dans cette expression, BC^2 est regardé comme une fraction du rayon supposé $= 1$, puisqu'on a supposé cos. $BC = 1 - \frac{1}{2} BC^2$; mais si l'on veut exprimer BC en secondes, il faut nécessairement le diviser par le nombre de secondes que contient le rayon; car en exprimant BC^2 en parties aliquotes de la circonférence, on suppose par-là même que le rayon, dont BC^2 étoit partie, n'est plus $= 1$, mais qu'il est aussi une partie de la circonférence. Or, l'arc égal au rayon est $57^d\ 17'\ 44'',8$; donc $\frac{\frac{1}{2} BC^2 \text{ cot. } AB}{57^d\ 17'} = \frac{BC^2 \text{ cot. } AB}{114^d\ 35'\ 29'',6}$; ainsi l'on pourra ajoûter toûjours le logarithme constant 438454 avec ceux de BC^2 & de cotang. AB pour avoir le logarithme de DC.

On pourroit démontrer aussi la même propriété du triangle

* *Voyez* Wolf, *Elementa Mathefeos*, tome I; & Principes du calcul différentiel. *A Paris, chez Thibout & Després, 1754, in-12.*

ABC, en le considérant sur la sphère. Soit E le centre de la sphère *(fig. 3)*, DF & BF les tangentes à la sphère des cercles AB, AD qui se rencontrent en F avec la commune section des deux plans; du point F, comme centre, si l'on conçoit décrit l'arc DC, AC étant égal à AD, & qu'on achève le cercle DC, dont FC sera le rayon, la perpendiculaire DB sera moyenne proportionnelle entre BC & le reste du diamètre, qui est sensiblement égal au double de FB ou de la tangente de AB; ainsi l'on aura $BD^2 = 2BC \text{ tang. } AB$. Or, on sait, par la Trigonométrie ordinaire, que $\frac{1}{\text{tang.}} = \text{cotang.}$ Donc $BC = \frac{1}{2} BD^2 \text{ cotang. } AB$, comme on l'a trouvé ci-dessus.

Pour appliquer la formule à la question dont il s'agit, il faut observer que le triangle ZSL, dont nous avons parlé au commencement de ce Mémoire, est rectangle en S, & que $ZS = ZM$; ainsi la différence LM entre le côté ZS & l'hypothénuse ZL, sera égale au quarré de SL multiplié par la tangente de la hauteur SH, & divisé par 114 degrés; c'est ce que donne la Table I. Fig. 1.

L'on déterminera par la même formule la quantité dont un astre change de hauteur lorsqu'il est près du méridien, quelle que soit sa déclinaison. Soit EQ l'équateur *(fig. 4)*, SC un parallèle à l'équateur, SA un parallèle à l'horizon, SQ le grand cercle, dans le plan duquel se trouve l'axe de la lunette, alors le triangle rectangle ZSB donnera la valeur de $AB = \frac{BS^2 \text{ tang. } SH}{114^d}$, de même dans le triangle rectangle PSD, puisque PS est égal à PC, on trouvera la différence DC entre l'hypothénuse PD & le côté PS égal à $\frac{BS^2 \text{ tang. } ES}{114^d}$. DC est sensiblement égal à BC; car l'angle BCD étant extrêmement petit, BD doit être aussi très-petit par rapport à BC, aussi-bien que la différence entre BC & DC.

Si donc on ajoûte BC avec AB dans les déclinaisons méridionales, & si l'on retranche BC de AB pour les déclinaiſons boréales, on aura la différence totale entre le parallèle à l'équateur & le parallèle à l'horizon; cette différence AC ſe trouve dans la Table II. L'on s'en ſervira dans les cas où un quart-de-cercle mobile n'eſt pas dirigé exactement dans le méridien, ſi l'on a pris la hauteur de l'aſtre quand il paſſoit au fil vertical de la lunette quelques minutes avant ou après la véritable culmination; ce cas arrive ſouvent lorſqu'on prend ſéparément le paſſage à un inſtrument fixe dans le méridien, & la hauteur à un quart-de-cercle mobile, ſe contentant de marquer l'inſtant où cette hauteur a été priſe.

Quant à la Table III, elle renferme la partie BC (*fig. 3*); elle s'emploie quand un quart-de-cercle eſt dirigé exactement dans le méridien, mais qu'on a pris la hauteur avant ou après le paſſage de l'aſtre au fil vertical; c'eſt le cas d'un quart-de-cercle mural fixé dans le méridien, ou d'un quart-de-cercle mobile bien placé, dans lequel on n'auroit pas pris la hauteur dans le temps même de la culmination, à cauſe des nuages qui ſurviennent ſouvent; l'équation de la Table III eſt nulle dans l'équateur, parce qu'alors la quantité BC diſparoît, le parallèle de l'étoile concourt alors avec le plan de la lunette, & la quantité AB, dont l'aſtre s'abaiſſe en quittant le méridien, eſt auſſi la quantité dont on la juge trop élevée quand elle n'eſt pas ſur le fil vertical de la lunette; quantité dont on a parlé au commencement de ce Mémoire.

Il eſt utile d'obſerver que les équations de la Table I & III ſont auſſi les erreurs que M. Bouguer a démontré avoir lieu; la première, lorſque, dans un ſecteur dont la lunette n'eſt pas exactement parallèle au plan du limbe, on dirige la lunette à l'aſtre dans le moment où l'on ſait qu'elle paſſe au méridien; l'autre, quand on dirige le plan ſuivant une méridienne tendue, méthode par conſéquent bien préférable pour les aſtres voiſins de notre zénith, & pour tous ceux qui ne ſont pas extrêmement près du pole; l'argument qui eſt en tête des deux Tables ſeroit dans ce cas-là l'arc de déviation ou le défaut du paralléliſme de la lunette. En effet ſi la lunette eſt dirigée au point D hors
Fig. 5. du méridien, le plan du ſecteur étant dans le méridien PE,
la

la perpendiculaire DE abaissée sur le limbe ou sur le méridien, tombe en E plus près du pole que le parallèle DF décrit du pole P par l'étoile D de la quantité EF égale à DE^2 cot. PD.

Mais si la lunette est dirigée dans le méridien ZE, *(fig. 6)* & que le plan du limbe soit dans un autre vertical ZH (car le limbe est toûjours supposé dans un cercle vertical) il coupera le méridien au zénith Z, & l'astre paroîtra en H plus près du zénith de la quantité $HK = EH^2$ cot. ZE.

Ainsi l'on aperçoit pourquoi dans le premier cas l'on considère la distance au pole, & dans le second la distance au zénith, car l'astre ayant passé en D *(fig. 5)* point auquel est dirigée la lunette, DF étant le parallèle que l'étoile décrit, elle passera dans le méridien en F, & l'arc FD aura le pole P pour centre.

Mais si la lunette est dirigée en E *(fig. 6)* le limbe étant nécessairement dans un vertical ZH, & l'étoile étant rapportée sur la perpendiculaire EH, abaissée sur le limbe, elle paroîtra à une distance ZH du zénith, moindre que ZE ou ZK de la quantité HK.

Il y a encore d'autres problèmes d'Astronomie qui peuvent se réduire à la même formule & à la Table I, c'est-à-dire, qui dépendent de la différence entre l'hypothénuse & le côté d'un triangle rectangle. Tel est, par exemple, le changement du Soleil en déclinaison proche des solstices, qui est égal au quarré du mouvement du Soleil en longitude, multiplié par la tangente de la déclinaison; comme en été le mouvement diurne du Soleil est de 57′ 13″, & le 21 Décembre de 61′ 10″ on trouveroit aisément par la même formule, que le changement en déclinaison dans les vingt-quatre heures qui précèdent ou qui suivent le moment du solstice, est de 12″,42 au solstice d'été, & de 14″,17 au solstice d'hiver. C'est d'après cette règle que j'ai donné dans mon *Exposition du Calcul astronomique*, *page 32*, une Table des changemens du Soleil en déclinaison près du solstice d'été ; elle étoit nécessaire à ceux qui font des observations sur les hauteurs solstitiales, parce que le progrès de ces hauteurs pendant un jour ou deux n'eſt point uniforme.

I. *TABLE de ce qu'il faut retrancher de la hauteur marquée ſur le quart-de-cercle quand l'aſtre a été obſervé ſur le côté de la lunette, hors du méridien.*

Diſtance de l'étoile au fil vertical de la lunette.							
Hauteur.	10′	20′	30′	40′	50′	60′	DISTANCE au zénith.
Deg.	*Sec.*	*Sec.*	*Sec.*	*Sec.*	*Sec.*	*Sec.*	*Deg.*
5.	0,1	0,3	0,7	1,2	1,9	2,7	85.
10.	0,1	0,6	1,4	2,5	3,9	5,5	80.
15.	0,2	0,9	2,1	3,7	5,8	8,4	75.
20.	0,3	1,3	2,9	5,1	7,9	11,4	70.
25.	0,4	1,6	3,7	6,5	10,2	14,7	65.
30.	0,5	2,0	4,5	8,1	12,6	18,1	60.
35.	0,6	2,4	5,5	9,8	15,3	22,0	55.
40.	0,7	2,9	6,6	11,7	18,3	26,4	50.
45.	0,9	3,5	7,9	14,0	21,8	31,4	45.
50.	1,0	4,2	9,4	16,6	26,0	37,4	40.
55.	1,2	5,0	11,2	19,9	31,1	44,9	35.
60.	1,5	6,1	13,6	24,2	37,8	54,4	30.
65.	1,9	7,5	16,8	29,9	46,8	67,3	25.

Cette Table eſt principalement néceſſaire, ſi, en obſervant des hauteurs correſpondantes, on prenoit le Soleil à droite du fil vertical le matin, & le ſoir dans le milieu, comme cela pourroit arriver s'il y avoit pluſieurs fils dans une même lunette, & qu'on voulût obſerver le Soleil à tous les fils; mais cette correction ſeroit nulle, quant aux hauteurs correſpondantes, ſi l'on avoit obſervé le matin à droite, & le ſoir à gauche, à la même diſtance du fil vertical.

Fig. 1.

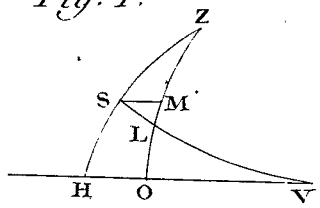


Fig. 2.

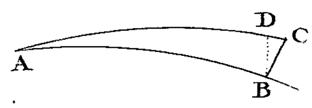


Fig. 4.

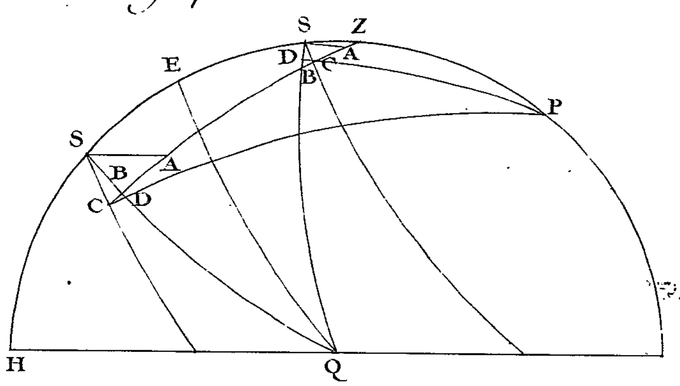


Fig. 3.

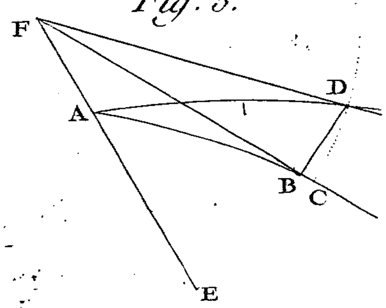


Fig. 5.

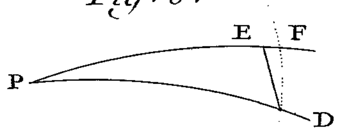
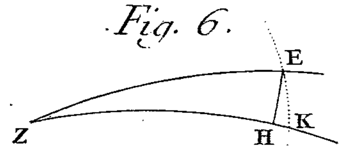


Fig. 6.



Ingram Sculp

II. *TABLE de ce qu'il faut ajoûter à la hauteur méridienne, prise quelques minutes avant ou après le véritable passage au méridien, sur le fil vertical ou sur le centre même de la lunette.*

Temps avant ou après le passage au méridien.								
Hauteur.	0′ 40″	1′ 20″	2′ 0″	2′ 40″	3′ 20″	4′ 0″	DISTANCE au zénith.	DÉCLINAISON à Paris.
Deg.	Sec.	Sec.	Sec.	Se.	Sec.	Sec.	Deg.	Deg. Min.
15.	0,5	2,1	4,8	8,4	13,4	19,3	75.	26. 10 A.
20.	0,6	2,3	5,1	9,2	14,3	20,6	70.	21. 10
25.	0,6	2,4	5,5	9,6	15,3	22,0	65.	16. 10
30.	0,7	2,6	5,9	10,4	16,3	23,5	60.	11. 10
35.	0,7	2,8	6,2	11,2	17,4	25,1	55.	6. 10
40.	0,7	2,9	6,7	11,6	18,5	26,9	50.	1. 10
45.	0,8	3,3	7,3	13,2	20,4	29,3	45.	3. 50 B.
50.	0,9	3,5	7,9	14,0	22,1	31,8	40.	8. 50
55.	1,0	3,9	8,8	15,6	24,4	35,1	35.	13. 50
60.	1,1	4,4	9,8	17,4	27,2	39,2	30.	18. 50
65.	1,2	5,0	11,2	19,9	31,1	44,8	25.	23. 50

III. *TABLE de la correction des hauteurs prises à un quart-de-cercle immobile ou placé exactement dans le méridien, quelques minutes avant ou après le méridien.*

Le fil vertical étant supposé exactement dans le méridien, ajoûtez quand la déclinaison est méridionale, ôtez quand elle est boréale. Les nombres sont les mêmes que dans la Table I, en mettant Déclinaison au lieu de hauteur.