

PROBLÈME DE GNOMONIQUE.

Tracer un Cadran analemmatique, azimutal, horizontal, elliptique, dont le style soit une ligne verticale indéfinie.

Par M. DE LA LANDE.

C E problème est un des plus compliqués de toute la Gnomonique, on en trouve une partie dans les livres, mais sans démonstration, & avec une construction incomplète. J'avois parcouru les auteurs qui ont approfondi cette matière, tels que Oronce Finé^a, Munster^b, Schoner^c, Voell^d, Henrion, Clavius de Challes^e, Ozanam^f, sans y avoir rien trouvé de satisfaisant à ce sujet. Enfin j'ai été obligé de chercher moi-même une démonstration du Cadran analemmatique énoncé dans les auteurs, en même-temps j'ai fait en sorte qu'il pût servir à différentes latitudes, & j'ai formé une règle extrêmement simple pour trouver la place du style dans tous les mois de l'année, & dans tous les lieux où on voudra l'employer.

Ce cadran a des avantages qui le rendent intéressant; lorsqu'on le réunit sur une même pièce de métal, avec un cadran horizontal ordinaire, comme on le voit dans notre *figure 5*; ils s'orientent mutuellement, sans qu'on ait besoin de méridienne ni de boussole, parce que l'un ayant un style incliné, & l'autre un style vertical, la marche en est assez différente pour que leur accord soit une preuve de l'exactitude de la situation.

^a Orontii Finei opera, fol.

^b Horologographia per Sebastianum Munsterum. Basileæ, 1533.

^c Gnomonice, Schoner, in-4.^o

^d De horologiis Sciothericis libri III à Joanne Voello, Soc. J. Turoni, 1608, in-4.^o

^e Christophori Clavii Bambergensis ex Soc. J. horologiorum nova descriptio, in-4.^o 1599.

^f Demonstratio & constructio horologiorum novorum autore Georgio Schonbergero, &c.

484 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

Ce cadran a d'ailleurs un autre usage d'agrément. On peut le tracer dans un parterre, avec des fleurs ou des gazons, sans aucun style, il suffit que l'observateur se place sur le mois où l'on est; en tournant le dos au Soleil, il voit son ombre marquer l'heure qu'il est sur la circonférence du cadran.

Ce cadran a été appelé analemmatique, parce qu'on le traçoit par le moyen de la figure appelée *analemme*, dont nous parlerons ci-après, & que l'on voit *figure 4*.

Première partie de la construction.

Soit CN (*fig. 1*) la direction de la méridienne, CF une longueur prise à volonté pour l'unité & pour la largeur du cadran, perpendiculairement à la direction de la méridienne, on prendra la longueur CN égale au sinus de la hauteur du pôle, pour un des lieux où l'on veut employer le cadran, on prendra un intervalle GC ou CD égal à la tangente de l'obliquité de l'écliptique, c'est-à-dire, de $23^d 28'$ pour le rayon CN ; le point G & le point D seront ceux où le style devra être placé dans le temps des solstices: si l'on prend de même CA, CB égales aux tangentes des déclinaisons du Soleil pour le commencement de chaque mois, on aura la situation du style pour ces mêmes jours, qui sera du côté du midi dans le printemps & dans l'été, & du côté du nord, c'est-à-dire vers D en automne & en hiver.

DÉMONSTRATION.

La tangente de l'azimuth du Soleil à fix heures est toujours à la tangente de sa déclinaison, comme le rayon est au cosinus de la hauteur du pôle. Soit PSC (*fig. 2*) le cercle horaire de fix heures qui fait avec le méridien PZ un angle droit, ZS le vertical du Soleil, ZC le premier vertical ou celui qui est perpendiculaire au méridien, l'arc CM ou l'angle sphérique CZM l'azimuth du Soleil, CS sa déclinaison: le triangle ZPS est rectangle en P , ainsi par la propriété des triangles

sphériques rectangles, $R : \sin. PZ :: \tan. PZS : \tan. PS$
 $:: \cotang. azimuth : \cotang. déclin. :: \tan. déclin. \tan. azim.$
 car les tangentes sont en raison inverse des cotangentes.

Si la ligne FC (*fig. 1*) représente le rayon de six heures quand le Soleil est dans l'équateur, & qu'on ait pris CD , comme dans la construction précédente, égale à la tangente de la déclinaison du Soleil pour un rayon qui est égal au cosinus de la latitude, c'est-à-dire $= \cosin. latid. \tan. déclin.$ Cette ligne CD donnera un angle CFD égal à l'azimuth du Soleil, & FD fera le rayon de 6 heures pour le temps où l'on a pris la déclinaison du Soleil.

Seconde partie de la construction.

Pour trouver les points horaires & tracer la circonférence du cadran analemmatique, il faut considérer que l'équateur de la Terre étant projeté perpendiculairement sur l'horizon d'un lieu donné, forme une ellipse dont le petit axe est égal au sinus de la hauteur du pôle. Soit $LBKO$ (*fig. 3*) la projection de l'équateur, c'est-à-dire, l'ellipse dont le petit axe CK est au grand axe CL comme le sinus de la hauteur du pôle est au rayon; si l'on divise le demi-cercle LEO de 15 en 15 degrés, parce que 15 degrés font une heure dans le mouvement journalier du Soleil; & si de chaque point de division comme E on abaisse une perpendiculaire EBF , elle coupera l'ellipse LBK au point B qui sera le point horaire, & le style étant placé au point D comme dans la première partie de notre construction, la ligne DB sera la ligne horaire.

DÉMONSTRATION.

Pour le démontrer, il faut chercher l'expression de l'angle CDB ou BDM (*fig. 3*) qui est égal à l'azimuth du Soleil compté depuis le méridien, & faire voir que cette expression est celle que fournit le triangle PZS (*fig. 2*) pour l'angle Z . La ligne CF ou BM qui lui est égale, est le sinus de l'angle horaire en prenant CL pour rayon, & AE égal au nombre de degrés dont le Soleil est éloigné du méridien à l'heure donnée.

suivant notre construction. D'ailleurs on fait que pour décrire une ellipse & la diviser en heures, on décrit un cercle LA sur le grand axe, & un autre cercle sur le petit axe CK ; on prend l'arc AE & l'arc KH , chacun égal à 60 degrés, si c'est pour quatre heures qu'on ait besoin de trouver la ligne horaire; de 45 degrés, si c'est trois heures, &c. on tire les lignes EF , HM , parallèles aux axes de l'ellipse; & leur point de concours B marque le point de l'ellipse ou le point horaire cherché.

La ligne BF est égale à $\text{cof. angle hor.} \times \text{fin. latit.}$ car elle est le cosinus de l'arc KB . (que nous avons pris égal à l'angle horaire) dans un cercle dont le rayon est lui-même le sinus de la latitude. La ligne $CD = \text{tang. décl.} \times \text{cof. latit.}$ suivant la construction précédente; donc $DM = \text{cof. ang. hor.} \times \text{fin. latit.} - \text{tang. décl.} \times \text{cof. latit.}$ la tangente de l'angle BDM

ou $\frac{BM}{DM}$ sera donc $\frac{\text{fin. angle hor.}}{\text{cof. angle hor.} \times \text{fin. latit.} - \text{tang. décl.} \times \text{cof. latit.}}$.

Pour trouver dans la *figure 2* l'expression de l'angle PZS , on remarquera que la perpendiculaire SX étant abaissée sur le côté PZ , les sinus des segmens PX & ZX doivent être en raison inverse des tangentes des angles sur la base P & Z ,

c'est-à-dire, que $\text{tang. } Z = \frac{\text{tang. } P \times \text{fin. } PX}{\text{fin. } ZX}$; mais $\text{fin. } ZX$

$= \text{fin. } (PZ - PX) = \text{fin. } PX \times \text{cof. } PZ - \text{fin. } PZ \times \text{cof. } PX$;

donc $\frac{\text{fin. } PX}{\text{fin. } ZX} = \frac{\text{tang. } PX}{\text{cof. } PZ \times \text{tang. } PX - \text{fin. } PZ}$; multipliant

par $\text{tang. } P$, substituant pour $\text{tang. } PX$ sa valeur $\text{tang. } PS \text{ cof. } P$,

& divisant tout par $\text{tang. } PS$, on aura $\frac{\text{tang. } P \text{ fin. } PX}{\text{fin. } ZX} =$

$\frac{\text{cof. } P \text{ tang. } P}{\text{cof. } PZ \text{ cof. } P - \text{fin. } PZ \text{ cot. } PS} = \frac{\text{fin. } P}{\text{cof. } P \text{ cof. } PZ - \text{fin. } PZ \text{ cot. } PS}$

$= \frac{\text{cof. angle hor. fin. latit.} - \text{tang. décl. cofin. latit.}}$.

Ainsi l'expression de l'angle Z dans le triangle sphérique de la *figure 2*, est la même que celle de l'angle ADB dans la *figure 3*; donc la construction donnera l'angle azimuthal pour l'heure cherchée, ainsi le cadran azimuthal sera fait lorsqu'on

aura divisé la ligne CD , & qu'on aura décrit l'ellipse LBG de la manière précédente.

La construction que donnent les anciens auteurs, est plus compliquée que celle-ci, & n'est pas aussi lumineuse, cependant nous la rapporterons encore pour pouvoir démontrer qu'elle se réduit aux mêmes expressions que la nôtre. Soit le méridien $AECZPB$ (*fig. 4*) P le pôle, Z le zenith, EO le rayon de l'équateur, PO l'axe de la Terre, & le rayon du cercle de 6 heures, CX le rayon du parallèle dans lequel se trouve le Soleil pour un jour donné; du point X de l'axe de la Terre qui est le centre du parallèle, on abaissera une perpendiculaire indéfinie XTD . & de l'autre extrémité C du rayon du parallèle, la perpendiculaire CK ; du point K avec un rayon égal à GO , qui est le cosinus de l'arc AE ou le sinus de la hauteur du pôle, on marquera un point d'intersection D , & l'on tirera une ligne KD , la partie interceptée ND sera la quantité dont il faudra avancer le style vers le point de midi, lorsque le Soleil aura une déclinaison septentrionale égale à EC .

Supposant toujours le rayon $OE = 1$, on aura $OX = \sin. \text{déclin.}$ & $OT = OX \cos. O = \sin. \text{décl.} \times \cos. \text{latit.}$ mais $ND : OT :: KD$ ou $GO : KT$ ou MX , & à cause des triangles semblables GEO , MCX , $GO : MX :: EO : CX :: 1 : \cos. \text{décl.}$ donc $ND : OT :: 1 : \cos. \text{décl.}$ ainsi $ND = \frac{OT}{\cos. \text{décl.}} = \frac{\sin. \text{décl.} \cos. \text{latit.}}{\cos. \text{décl.}} = \text{tang. décl.} \cos. \text{lat.}$

Donc la partie interceptée ND , est véritablement la même chose que la ligne CD (*fig. 1 & 3*), ou la quantité dont le style doit être avancé vers le midi au delà du centre du cadran, suivant la déclinaison de chaque jour.

La *figure 5* représente un cadran analemmatique AB , sur une même platine que le cadran horizontal ordinaire CD qui lui tient lieu de boussole; la ligne $\propto$ ∞ marque les différentes positions du style qui doit être fixé verticalement en $\propto$ le 21 de Décembre, en γ le 21 de Mars, jour de l'équinoxe, en ∞ le 21 de Juin ou le jour du solstice d'été, & ainsi des autres points intermédiaires. Pour pouvoir donner au Lecteur

un exemple dont le calcul soit exact & rigoureux, j'ajouterai que si l'on divise en 1000 parties la demi-largeur du cadran depuis γ jusqu'à 6 heures, ou le demi-axe de l'ellipse autour de laquelle sont marquées les heures, la ligne $\gamma \in$ sera de 284 parties pour la latitude de Paris, au solstice d'été, de même que la ligne $\gamma \propto$ au solstice d'hiver; & les portions de cette même ligne pour le commencement des autres signes, seront de 134 & 242 des mêmes parties.

Ces quantités diminuent en approchant vers le nord, & se réduiroient enfin à zéro pour un Observateur qui seroit sous le pôle; sous la latitude de 40 degrés, la quantité de 284 augmenteroit & seroit de 333, c'est-à-dire, un tiers de la demi-largeur du cadran; mais à 45 degrés, elle seroit de 307, & à 55 de 249 seulement.

A l'égard du demi petit axe CN (*fig. 1*) de l'ellipse qui forme ce cadran, il est égal, comme nous l'avons dit, au sinus de la latitude, qui est à Paris de 753; à 40 degrés de latitude, il seroit seulement de 643 degrés, à 45 degrés de 707, à 50 degrés de 766, à 55 degrés de 819: sous le pôle il deviendrait égal au grand axe lui-même, puisque le cadran lui-même deviendrait un cercle, au lieu d'être une ellipse: au contraire sous l'équateur, le petit axe s'évanouiroit, & le cadran se réduiroit à une ligne droite. Le seul cas où les règles précédentes cessent d'avoir lieu arrive sous l'équateur le jour où le Soleil se trouve aussi dans l'équateur, car alors les

Fig. 3. lignes DB & CL étant confondues toute la journée, le cadran azimuthal cesse de marquer à moins que le style ne soit fixé à une longueur déterminée pour former un cadran de hauteur, mais ceci n'entre plus dans l'objet que nous nous sommes proposé d'éclaircir.

Si donc on entreprend de tracer le cadran analemmatique

Fig. 6. en grand dans un parterre, il faudra commencer par former un grand cercle ABC , on divisera en 24 parties sa circonférence, & son rayon AD en 100 parties, on prendra dans la direction de la méridienne la quantité de 753 parties pour former le demi-petit axe DK plus ou moins, suivant que le pays sera

au

Fig. 1

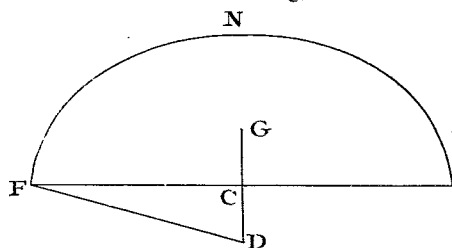


Fig. 2.

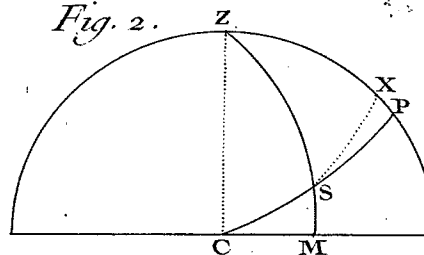


Fig. 3.

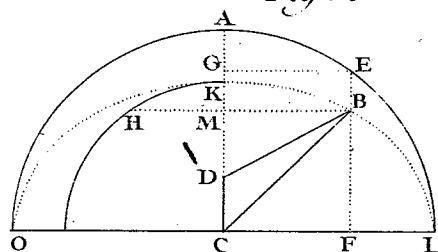


Fig. 4

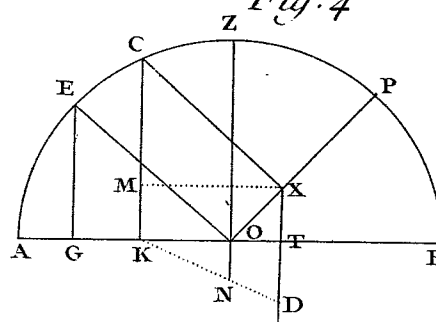


Fig. 5.

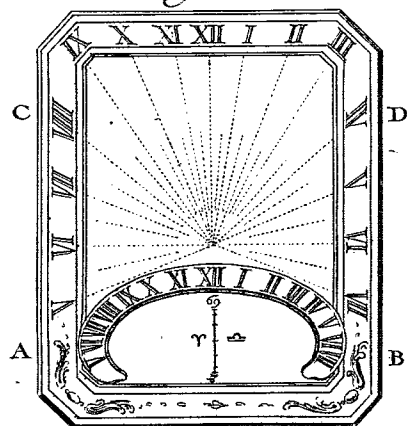
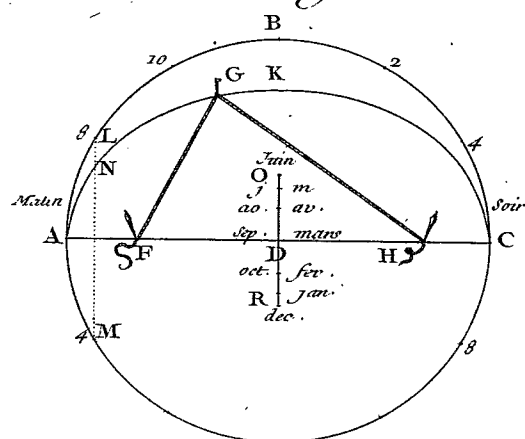


Fig. 6.



au nord ou au midi de Paris, il ne faudra que chercher dans des Tables de Trigonométrie ordinaire le sinus de la latitude du lieu.

On décrira une ellipse à la manière des Jardiniers avec un cordeau *FGH* fixé à deux piquets; pour diviser l'ellipse, il suffira de tendre des cordeaux sur les points de division du cercle. Par exemple *LM*, le point *N* où il coupera l'ellipse, fera le point horaire cherché, on portera de *D* vers *O*, & de *D* en *R* les nombres donnés ci-dessus 134, 242, 284 pour la latitude de Paris, & l'on aura la position du style pour le 21 de chaque mois, ces lignes doivent être diminuées d'environ une cinquantième partie pour chaque degré de latitude; en avançant vers le nord, & augmentées d'autant en avançant vers le midi, c'est-à-dire, pour les pays dont la latitude est moindre que celle de Paris. La Table suivante fait voir, pour différentes latitudes, la distance qu'il faut mettre entre le style & le centre du cadran pour le 21 de chaque mois, en supposant mille parties pour le rayon du cercle ou pour le demi-grand axe de l'ellipse; la dernière colonne fait voir quelle doit être la quantité du demi-petit axe.

HAUTEURS du Pole, ou Latitudes.	21 Février. 21 Avril. 21 Août. 21 Octobre.	21 Janvier. 21 Mai. 21 Juillet. 21 Novemb.	21 Juin. 21 Décemb.	MOITIÉ du petit axe.
30 ^d	176 ^d	318 ^d	376 ^d	500 ^d
35.	166.	301.	356.	574.
40.	156.	282.	333.	643.
45.	144.	260.	307.	707.
50.	131.	236.	279.	766.
55.	117.	210.	249.	819.

