

M É M O I R E

SUR LES ÉLÉMENTS DE L'ORBITE DE MARS,

Dans lequel on détermine le lieu de son aphélie & son excentricité, par les observations les plus récentes.

Par M. DE LALANDE.

22 Mars
1755.

DEPUIS que Képler a découvert la figure elliptique des orbites planétaires*, & que Newton a démontré la nécessité de ces orbites, dans le système de la gravitation universelle, en raison inverse du carré de la distance, toute la théorie des six planètes principales a été réduite à déterminer la situation & la grandeur de chacune de ces ellipses.

Il paroît même qu'on l'a fait avec assez de précision, puisque les dernières Tables, comme celles de M. Cassini & de M. Halley, ne diffèrent jamais que de quelques minutes, soit dans les époques des moyens mouvemens, soit dans les quantités de la plus grande équation, & dans les situations des aphélies ou des nœuds.

Mais ces différences, quelque légères qu'elles paroissent, détruisent toute la précision à laquelle les Astronomes aspirent dans le calcul des mouvemens célestes. Il semble que tous nos efforts se réduiront désormais à chercher ces quantités imperceptibles qui, par leur petitesse ou leur complication, échapperont peut-être encore long-temps à toute l'exactitude de nos recherches.

On a déjà reconnu depuis plusieurs années dans les mouvemens de Jupiter & de Saturne, une partie de la cause des différences que l'on trouvoit entre l'observation & les Tables; & l'on a vu que l'attraction mutuelle de ces deux grandes masses, dans leurs conjonctions, devoit causer un

* *Astronomia nova, seu Physica caelestis, tradita commentariis de motibus stellae Martis à Jo. Képlero, 1609, in-folio.*

dérangement dans toutes deux, comme M. Halley le pensoit en 1719.

Il nous reste à savoir si Mars & les planètes inférieures, sur lesquelles la théorie ne peut rien nous apprendre, (parce qu'étant dépourvues de satellites, leurs densités sont inconnues) sont sujettes à de pareils dérangemens : la comparaison des meilleures observations avec le calcul, peut seul nous en instruire.

Les oppositions des planètes supérieures au Soleil sont le seul temps où l'on puisse les observer avec une précision indépendante des distances, ainsi que du mouvement de la Terre ; élémens qui ne sont pas assez connus, parce que dans les oppositions le lieu d'une planète vu de la Terre est exactement le même que son lieu vu du Soleil, & que celui-ci est le seul que l'on cherche.

C'est dans cette vûe que M. Halley nous a donné pour chaque planète supérieure, à la fin de ses Tables, une suite de toutes les oppositions observées jusqu'en 1719, temps auquel elles furent imprimées, & M. le Gentil a continué cette suite pour Jupiter & pour Saturne.

Les oppositions observées depuis M. Halley doivent avoir un degré de précision plus grand encore que celles qui l'ont été de son temps, du moins quant au calcul qu'il en donne, parce que le soin extrême avec lequel on a déterminé de nos jours les positions des principales Étoiles fixes, nous met à portée de connoître toujours, à 15 secondes près, le lieu apparent d'une planète ; ce qui n'étoit guère possible de son temps.

Pour entreprendre le calcul de l'orbite de Mars, j'ai cru qu'il falloit commencer par trouver le lieu de son aphélie & son excentricité, parce que ces deux élémens sont nécessaires pour parvenir ensuite aux moyens mouvemens.

L'on a donné diverses méthodes pour déterminer le lieu des aphélies, mais il y en a très-peu qui soient applicables à une orbite dont l'excentricité est fort grande. Parmi les

huit méthodes que M. Cassini a données pour cet effet dans les Mémoires de l'Académie de 1723, la huitième (qui est indiquée *page 168*) m'a paru une des plus ingénieuses, & la plus propre à remplir mon objet, en y appliquant néanmoins le procédé & les analogies que M. de la Caille a employés dans les Mémoires de l'Académie de 1750, & dont je donnerai ici une démonstration particulière très-simple.

Étant données trois observations du lieu vrai d'une planète, & supposant le lieu de son aphélie & son excentricité déjà connus, ou à peu près, on a par conséquent trois anomalies vraies; de ces trois anomalies vraies, on en peut déduire les trois anomalies moyennes; de ces trois anomalies moyennes, dit M. Cassini, on déduira le lieu vrai pour les trois momens donnés dans l'hypothèse elliptique, qui est beaucoup plus simple & plus facile à traiter que l'hypothèse de Képler; & par le moyen de ces trois points donnés, on trouvera par quelqu'une des autres méthodes qu'il a indiquées plus haut, le lieu de l'aphélie & l'excentricité qui seront différens de ceux qu'on aura supposés.

On pourra se servir ensuite de ces deux élémens que l'on aura trouvés pour recommencer le calcul, & il sera aisé d'en approcher autant qu'on le jugera à propos. Telle est la méthode de M. Cassini.

On peut facilement réduire ce calcul à une plus grande simplicité, & même à une plus grande exactitude, par la méthode suivante, dans laquelle on rejette entièrement l'hypothèse elliptique simple, & qui a l'avantage de n'exiger pas plus de calcul dans les Comètes, dont l'excentricité est la plus grande, que dans les planètes, où elle est presque nulle.

La brièveté de cette méthode vient de la facilité que l'on trouve à convertir une anomalie vraie donnée en anomalie moyenne, dans toute la précision possible, & sans supposer autre chose que la quadrature du cercle, quelque grande que soit l'excentricité de l'orbite donnée. Lorsqu'on a réduit deux des trois anomalies vraies données en anomalies moyennes, on voit si la différence de ces deux anomalies moyennes est

la même que celle qu'on a déduite du moyen mouvement supposé connu dans l'intervalle des trois observations ; car il est évident que si les trois anomalies moyennes, conclues des trois anomalies vraies, donnoient précisément les mêmes différences qu'elles doivent donner pour le moyen mouvement, il n'y auroit aucun changement à faire dans le lieu de l'aphélie & dans la quantité de l'excentricité supposée, parce que les différences d'anomalie moyenne ne peuvent être d'accord avec la vérité en même temps que les différences d'anomalie vraie, sans que les équations le soient aussi.

Mais si la différence conclue d'anomalie moyenne dans le premier intervalle n'est pas telle qu'elle doit être, on fera varier le lieu de l'aphélie pour voir quel changement cette variation apportera ; & par une partie proportionnelle, on trouvera quel est le lieu de l'aphélie qui donne exactement cet intervalle, en supposant toujours la même excentricité.

On fera varier ensuite l'excentricité, & dans cette seconde supposition d'excentricité on trouvera, comme dans la première, quel est le lieu de l'aphélie qui satisferoit à cette différence d'anomalie moyenne pour le premier intervalle.

Avec chacune de ces deux positions de l'aphélie, & l'excentricité qui répond à chacune, on calculera le second intervalle d'anomalie moyenne, qui se trouvera différent dans ces deux suppositions ; mais par une simple analogie on trouvera quelle seroit l'excentricité qu'il faudroit supposer pour que ce second intervalle fût précisément de la quantité dont il doit être, & quel seroit le lieu de l'aphélie qui répondroit à cette même excentricité.

Par-là on aura une excentricité & une position de l'aphélie qui satisferont aux deux intervalles donnés d'anomalie moyenne, & aux deux intervalles d'anomalie vraie, qui par conséquent seront les véritables élémens de l'orbite cherchée.

Les exemples rendront la méthode plus claire ; en atten-

dant, il est bon de remarquer que la même méthode donne aussi l'époque du moyen mouvement, puisque le lieu vrai étant donné par observation, le lieu de l'aphélie & l'excentricité étant aussi trouvés, il ne s'agit plus que de calculer l'équation du centre, qui étant ajoutée ou soustraite, donne l'anomalie moyenne & la longitude moyenne, déduites de l'observation; de sorte qu'on ne suppose ici que le temps de la révolution moyenne de la planète, & le mouvement de son aphélie, l'un & l'autre seulement dans l'intervalle des deux observations.

Les méthodes de M.^{rs} Halley, de la Hire, Newton, ** Mém. Acad. 1746, p. 291.* Nicolie *, qui consistent à faire passer une ellipse par trois points donnés, sont beaucoup plus longues que celle-ci; d'ailleurs elles supposent connues les distances de la planète au Soleil, dans les trois momens d'observation, quoiqu'elles ne soient point données par trois oppositions observées, à moins qu'on n'employât encore des fausses positions pour trouver la distance par le moyen du lieu de l'aphélie supposé connu, ce qui deviendrait d'une longueur extrême.

L'on suppose la moyenne distance de la planète au Soleil la moitié du grand axe égale à l'unité; en y ajoutant l'excentricité, on a la distance aphélie; en en retranchant l'excentricité, on a la distance périhélie. Or la racine carrée de la distance périhélie est à la racine carrée de la distance aphélie, comme la tangente de la moitié de l'anomalie vraie est à la tangente de la moitié de l'anomalie excentrique.

Soit dans la figure 2 l'ellipse $AMDB$ qui représente le mouvement d'une planète M autour du Soleil placé au foyer F de cette ellipse, l'angle AFM l'anomalie vraie de la planète située en M ; $ANXB$ le cercle du moyen mouvement; X le lieu moyen, & par conséquent l'angle ACX l'anomalie moyenne, l'angle ACN l'anomalie excentrique, AF la distance aphélie, FB la distance périhélie.

Je dis donc qu'on aura toujours $\sqrt{FB} : \sqrt{AF} = T^{\frac{1}{2}} : AFM$; $T^{\frac{1}{2}} : ACN$. Connoissant ACN , il s'agit d'en déduire ANC , qui est l'anomalie moyenne.

Pour

Pour cela on dira, le rayon du cercle est au sinus de l'anomalie excentrique ACN , multiplié par $57^d 17' 4''{,}8$ (c'est-à-dire l'arc qui est à très-peu près égal au rayon du cercle) comme l'excentricité est à l'arc NX , qui, étant ajouté à l'anomalie excentrique, donne l'anomalie moyenne. Voici les démonstrations de ces deux analogies, avec les propositions préliminaires qu'elles supposent.

L E M M E I.

Si l'on divise un angle quelconque PFM en deux parties égales par une ligne FO , la tangente de la moitié PFO sera égale à $\frac{PM}{PF + FM}$.

D É M O N S T R A T I O N.

Ayant abaissé deux perpendiculaires PG , MH , on aura, à cause des triangles semblables, $FP : FM = PG : HM = PO : OM = PG : HM$; donc $PO : OM = FP : FM$ & $PO : PO + OM$, ou $PM = FP : FP + FM$, donc $\frac{PO}{FP} = \frac{PM}{FP + FM}$. Mais PM étant perpendiculaire sur PF , $\frac{PO}{FP}$ exprime la tangente de l'angle PFO ; donc la tangente de la moitié de l'angle PFM est $\frac{PM}{FP + FM}$.

L E M M E I I.

Le rayon vecteur FM d'une ellipse AMB est égal à $\frac{BP : FA}{CA} = FP$. Soit le demi-axe $CA = a$, l'excentricité $FC = e$, l'abscisse $CP = x$, l'ordonnée $PM = y$, il faut prouver que $FM = \frac{(a+x)(a+e) - a(e+x)}{a}$, ou, ce qui revient au même, $= \frac{a^2 + ex}{a}$.

D É M O N S T R A T I O N.

Par la propriété de l'ellipse, les rectangles des segmens
Mém. 1755. . D d

du grand axe sont comme les carrés des ordonnées correspondantes $AP \times PB : PM^2 = a^2 : CD^2$; mais $CD^2 = FD^2 - CF^2 = aa - ee$, ainsi $PM^2 = \frac{(aa - ee)(a - x)(a + x)}{a^2} = \frac{(aa - ee)(aa - xx)}{aa}$
 $FM = \sqrt{(e + x)^2 + y^2}$ est donc aussi $= \sqrt{aa(e + x)^2 + (aa - ee)(aa - xx)}$ qui se réduit, en faisant les multiplications indiquées, à $\frac{a^2 + ex}{a}$.

L E M M E I I I.

Si à une ellipse AMB , on circonscrit un cercle ANB , & qu'on tire une ordonnée quelconque PMN , le secteur elliptique $AMFPA$ est au secteur circulaire $ANFPA$ comme le grand axe de l'ellipse est au petit axe.

D É M O N S T R A T I O N.

Si l'on conserve les mêmes dénominations que dans le deuxième lemme, on aura, par la propriété du cercle,

$$PN^2 = aa - xx; \text{ mais } PM^2 = \frac{(aa - ee)(aa - xx)}{aa} \\ = \frac{CD^2(aa - xx)}{aa}, \text{ donc } PM^2 : PN^2 = \frac{CD^2(aa - xx)}{aa}$$

$$: aa - xx = CD^2 : aa, \text{ donc } PM : PN = CD : CA.$$

Puisque toutes les ordonnées de l'ellipse sont à celles qui lui répondent dans le cercle en raison constante, le segment ANP sera au segment AMP , dans le même rapport; car les éléments de ces segments ne sont autre chose que les ordonnées elles-mêmes.

Les triangles PFM , PFN , qui ont même hauteur PF , sont comme leurs bases PM , PN , ou comme CD à CA ; donc les secteurs entiers composés des segments & des triangles, c'est-à-dire AFM , AFN , sont entr'eux comme CD est à CA : la même chose peut se dire de l'ellipse entière comparée avec le cercle entier; leurs surfaces sont donc entre elles comme les axes AB , CD .

THÉOREME I.

Dans une orbite elliptique, la racine carrée de la distance périhélie est à la racine de la distance aphélie comme la tangente de la moitié de l'anomalie vraie est à la tangente de la moitié de l'anomalie excentrique, c'est-à-dire, $T \cdot \frac{1}{2} MFP : T \cdot \frac{1}{2} NCP = \sqrt{a - e} : \sqrt{a + e}$.

DÉMONSTRATION.

Par le premier lemme on aura $T \cdot \frac{1}{2} MFP : T \cdot \frac{1}{2} NCP = \frac{PM}{FP + FM} : \frac{PN}{CP + CN}$. Si l'on met à la place du rapport de PM à PN celui de CD à CA qui lui est égal par le troisième lemme, à la place de $FP + FM$ la valeur $BP \cdot \frac{FA}{CA}$ suivant le deuxième lemme, & enfin BP à la place de $CP + CN$, on changera la proportion en celle-ci $\text{tang. } \frac{1}{2} MFP : \text{tang. } \frac{1}{2} NCP = \frac{CD \cdot CA}{PB \cdot FA} : \frac{CA}{BP} = CD : FA = \sqrt{aa - ee} : a + e$, & divisant les deux derniers termes par $\sqrt{a + e}$, on aura enfin $\text{tang. } \frac{1}{2} MFP : \text{tang. } \frac{1}{2} NCP = \sqrt{a - e} : \sqrt{a + e}$.

THÉOREME II.

Le carré du rayon est au produit du sinus de l'anomalie excentrique par $57^d 17' 44''{,}8$, comme l'excentricité de l'orbite est à un nombre de secondes qui, ajouté à l'anomalie excentrique, donne l'anomalie moyenne.

DÉMONSTRATION.

L'aire elliptique $AMFA$ est proportionnelle au temps dans l'ellipse; l'anomalie moyenne ACX est proportionnelle au temps dans le cercle; donc ces deux aires AFM , ACX sont entre elles comme la surface de l'ellipse est à la surface du cercle, ou comme CD est à CA par le lemme III; mais les secteurs AFM , AFN sont aussi dans le même rapport (lemme III); donc le secteur AFN

D d ij

212 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

est égal au secteur circulaire d'anomalie moyenne ACY ; ôtant la partie commune ACN , il reste un secteur NCX égal au triangle CNF ; or le secteur NCX est égal au produit de CN par la moitié de NX , le triangle CNF est égal au produit de la même ligne CN par FT ; donc $NX = FT$. Dans le triangle FCT , le rayon est à l'excentricité CF , comme le sinus de l'angle FCT , égal à NCA , anomalie excentrique, est à FT ; ainsi FT est la différence entre l'anomalie excentrique & l'anomalie moyenne: on a donc ces deux proportions, le rayon est à $57^d 17' 44'',8$, comme CF est à l'excentricité CF , réduite en secondes; le rayon est au sinus de l'anomalie excentrique comme FT en secondes est à FT réduite en secondes: multipliant ces deux analogies l'une par l'autre, & divisant le dernier rapport par CF , réduite en secondes, on a, le carré du rayon est au produit de $206264'',8$ par le sinus de l'anomalie excentrique, comme l'excentricité est à FT réduite en secondes, ou NX ; & si l'on ajoute NX à l'anomalie excentrique AN , on a l'anomalie moyenne AX . Si l'anomalie excentrique surpassoit six signes, il faudroit prendre ce qui lui manque pour aller à douze signes, dans toutes les opérations précédentes.

OPPOSITIONS DE MARS

Observées à Paris depuis 1741.

OPPOSITION de 1741 (a).

Le 12 Janvier 1741, M. le Monnier qui observoit encore au collège d'Harcourt (b), compara Mars, qui étoit en opposition, avec β des Gémeaux. La différence d'ascension droite étoit $2^d 59' 47''$, & la hauteur de Mars $66^d 53' 16''$; d'où je conclus l'ascension droite de cette

(a) J'ai employé pour toutes ces oppositions le lieu du Soleil, calculé par des Tables nouvelles que M. de la Caille a faites sur ses observations, & qu'il m'a communiquées manuscrites.

(b) Ce ne fut qu'à la fin de cette année-là que M. le Monnier se plaça à l'Observatoire royal.

planète $115^{\text{d}} 21' 12''$, la déclinaison boréale $25^{\text{d}} 44' 2''$, la longitude $3^{\text{f}} 22^{\text{d}} 45' 16''$, la latitude boréale $4^{\text{d}} 14' 39''$. Le temps vrai de cette observation est $6^{\text{h}} 2' 10''$, l'ascension droite de l'Étoile $112^{\text{d}} 21' 25''$, l'obliquité de l'écliptique $23^{\text{d}} 28' 23''$ la réfraction $25''$, la parallaxe $6''$, la hauteur de l'équateur $41^{\text{d}} 8' 55''$: je conclus le mouvement de Mars en $6^{\text{h}} = 8' 28''$, le temps vrai de l'opposition $7^{\text{h}} 56' 16''$, & la longitude de Mars $9^{\text{f}} 22^{\text{d}} 49' 12''$, la même que par les Tables de M. Halley.

OPPOSITION de 1743.

M. Maraldi compara Mars avec *Regulus*, qui n'en étoit éloigné que de quelques degrés. Voici les passages observés au quart-de-cercle mural, avec les hauteurs; j'en ai déduit les temps vrais par l'ascension droite de *Regulus*, & celle du Soleil, calculée par les Tables de M. Halley.

	Temps de la pendule.	Hauteurs.	Temps vrai.
Le 12 Fév...	$12^{\text{h}} 38' 21'' \frac{1}{2}$ <i>Regulus</i> .	$54^{\text{h}} 24' 15''$	$12^{\text{h}} 9' 26'' \frac{1}{2}$
	$12. 53. 5$ Mars. . .	$57. 23. 20$	$12. 24. 10$
Le 13	$12. 34. 29$ <i>Regulus</i> .	$54. 24. 15$	$12. 5. 36$
	$12. 47. 40$ Mars. . .	$57. 31. 40$	$12. 18. 47$
Le 17	$12. 18. 56 \frac{1}{2}$ <i>Regulus</i> .	$54. 24. 20$	$11. 50. 8 \frac{1}{2}$
	$12. 25. 56$ Mars. . .	$58. 3. 50$	$11. 57. 8$

Il faut observer que l'erreur additive du mural est plus grande de $50'''$ de temps à 57^{d} de hauteur, qu'à 54 , suivant l'examen qu'en a fait M. le Gentil, de sorte qu'il faudra augmenter de cette quantité les différences des passages.

J'ai pris l'ascension droite de *Regulus* dans le premier livre des observations de M. le Monnier, $148^{\text{d}} 39' 52''$, $+$ aberr. $20'' \frac{1}{2}$, — nutat. $16'' 8$, la déclinaison $13^{\text{d}} 12' 41'' 5$, — $6'' 8$, $+$ $9''$. Je suppose l'obliquité de l'écliptique $23^{\text{d}} 28' 30''$, & j'ai conclu les positions suivantes pour les temps des trois observations de Mars que je viens de rapporter.

214 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

<i>Ascensions droites.</i>	<i>Déclinaisons.</i>	<i>Longitudes.</i>	<i>Latitudes.</i>
152 ^d 21' 35" ¹¹ / ₂	16 ^d 11' 53"	4 ^f 28 ^d 34' 38"	4 ^d 29' 44" ⁷ / ₁₀
151. 58. 25	16. 20. 13	4. 28. 10. 47	4. 29. 40. ⁷ / ₁₀
150. 25. 17	16. 52. 19	4. 26. 35. 40	4. 28. 30. ⁰ / ₁₀

D'où il suit que l'opposition est arrivée le 15 Février à 19^h 2' 53" de temps vrai, dans 4^f 27^d 16' 32" de longitude.

OPPOSITION de 1745.

Cette opposition a été observée par M. le Monnier & par M. de la Caille. Je ne rapporterai que les observations de M. le Monnier, les autres étant imprimées dans les Mémoires de l'Académie.

Le 21 Mars, à 12^h 5' 54", temps vrai, la différence d'ascension droite entre Mars & γ de la Vierge, 4^d 21' 34"³/₁₀, & la déclinaison 2^d 28' 28"; la longitude 6^f 1^d 36' 46"¹/₂, la latitude 3^d 23' 52"¹/₃, en supposant l'ascension droite de γ de la Vierge 187^d 11' 34"⁶/₁₀; l'obliquité de l'écliptique 23^d 28' 30".

Le 18 Mars, à 12^h 21' 12", la différence d'ascension droite entre γ de la Vierge & Mars parut être de 2^d 11' 33", & la déclinaison boréale 2^d 4' 12"; d'où je conclus la longitude 6^f 2^d 45' 57", & la latitude 3^d 25' 15", en supposant l'ascension droite de l'Etoile γ 181^d 43' 14".

J'ai calculé par les Tables de M. Halley la longitude géocentrique de Mars pour les temps de ces deux observations, & j'ai trouvé dans l'un & l'autre 1' 23" de plus par les Tables, ce qui répond de l'exactitude des deux observations & des calculs.

Le lieu du Soleil, au temps de la seconde observation, étoit 0^f 1^d 28' 46"¹/₂; d'où l'on conclut le temps vrai de l'opposition le 21 Mars à 14^h 25' 19", & la longitude de Mars 6^f 1^d 34' 32". M. de la Caille a trouvé par ses observations 14^h 38' 0", & la longitude de Mars 6^f 1^d 35' 10".

OPPOSITION de 1747.

Le 30 Avril 1747, au matin, M. le Monnier compara Mars avec α de la Balance, qui en étoit fort proche: à $0^h 10' 16''$, l'ascension droite de Mars étoit plus grande de $0^d 7' 8'' \frac{2}{3}$ que celle de l'Étoile; à $0^h 11' 52''$, elle étoit plus grande de $0^d 6' 51''$.

Le 1.^{er} Mai au matin, à $4^h 10'$, l'ascension droite de Mars étoit moindre de $0^d 19' 29''$ que celle de l'Étoile, & sa déclinaison méridionale moindre de $22' 6''$, dont Mars étoit au nord de l'Étoile; à $4^h 0'$, la distance entre Mars & l'Étoile étoit de $0^d 29' 0''$.

Le 2 Mai, à $4^h 10'$ du matin, l'ascension droite de Mars étoit moindre que celle de l'Étoile de $0^h 2' 45'' \frac{1}{2}$, ou $0^d 41' 29'' 22'''$, & la déclinaison moindre de $26' 18''$; la distance $0^d 47' 46'' \frac{1}{2}$. Supposant l'ascension droite de α de la Balance $219^d 14' 35''$, & sa déclinaison $14^d 58' 32''$, on a pour les temps des observations la longitude de Mars $7^f 11^d 37' 50''$, $7^f 11^d 9' 19''$, $7^f 10^d 47' 45''$; d'où j'ai conclu le temps moyen de l'opposition vraie au 1.^{er} Mai à $7^h 3'$, & le lieu de l'opposition $7^f 10^d 55' 59''$.

OPPOSITION de 1749.

M. l'Abbé de la Caille a fait cette observation avec un réticule, en observant les passages de Mars & de l'Étoile τ du Sagittaire par le fil horaire & par les obliques. Voici les observations mêmes, avec les temps de la pendule. Mars étoit plus au nord, excepté le 27 Juin.

28 Juin	MARS.	Au 1. ^{er} oblique...	18 ^h 0' 29"	$\tau \rightarrow$	{	18 ^h 20' 16"
		Au milieu . . .	1. 52			21. 15
		Au 2. ^d oblique...	3. 16 $\frac{1}{2}$			22. 12 $\frac{1}{2}$
29 Juin	MARS.	Au 1. ^{er} oblique...	17. 55. 41	$\tau \rightarrow$	{	18. 16. 43
		Au milieu . . .	56. 54			17. 30
		Au 2. ^d oblique...	58. 9			18. 16

216 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

MARS. 22 Juin	Au 1. ^{re} oblique...	20 ^h 13' 12"	$\tau \rightarrow$	20 ^h 38' 3 ² / ₅ "
	Au milieu	13. 51 1/2		38. 22
	Au 2. ^d oblique...	14. 30		38. 40 ¹ / ₂ "
MARS. 27 Juin	Au 1. ^{re} oblique...	18. 51. 23 1/2	$\tau \rightarrow$	19. 22. 15
	Au milieu	51. 34		22. 36
	Au 2. ^d oblique...	51. 45		22. 56 ¹ / ₂ "

Midi vrai à la pendule. . .	Lcs 18.	5 ^h 48' 32 ² / ₃ "
	19.	5. 52. 43 1/2
	24.	6. 13. 38 2/3
	29.	6. 34. 33

L'ascension droite apparente de l'Étoile 282^d 49' 47", & sa déclinaison 28^d 0' 33"; d'où je conclus, le 27 à 12^h 22' 5", temps vrai, l'ascension droite de Mars 275^d 4' 18", la déclinaison 28^d 7' 6", la longitude 9^f 4^d 29' 13", la latitude australe 4^d 43' 28"; d'où l'on conclut le temps vrai de l'opposition au 26 Juin, 2^h 4', & le lieu de l'opposition 3^f 4^d 55' 41".

OPPOSITION de 1751.

Les observations en ont été faites à Paris par M.^{rs} Cassini & le Monnier, & par M. l'Abbé de la Caille au cap de Bonne-espérance: on étoit occupé alors, comme en 1672, à déterminer la parallaxe de Mars, mais par une méthode bien différente; ce qui rend les observations de cette année-là fort exactes & fort multipliées.

J'ai commencé par déterminer le mouvement diurne de Mars par les Tables de M. Halley, afin de l'employer à réduire les observations. Voici le calcul de la longitude géocentrique de Mars, tirée des Tables pour trois jours.

	Temps moyen.		Différence.
Le 13 Sept. 1751.	12 ^h 3' 30"	11 ^f 21 ^d 45' 4"	17' 6"
Le 14.	12. 3. 30	11. 21. 27. 58	16. 56
Le 15.	12. 3. 30	11. 21. 11. 2	

Le 14 Septembre, 12^h 8' 12", temps vrai, M. le Monnier

Monnier observa la différence d'ascension droite entre Mars & la première des deux australes du quadrilatère sous le Poisson, $2^d 52' 20''$, & la hauteur de Mars $32^d 42' 5''$. La position de cette Étoile se trouve dans le second livre des Observations de M. le Monnier, *in-folio*, page 12, son ascension droite moyenne étant $357^d 17' 5''$ pour le commencement de 1750; d'où je conclus son ascension droite apparente au temps de l'observation $357^d 18' 6''$, celle de Mars $354^d 26' 36''$, sa déclinaison $8^d 27' 15''$ méridionale, sa longitude $11^f 21^d 32' 30''$, le lieu du Soleil $5^f 21^d 43' 46''$; d'où je conclus le temps vrai de l'opposition au 14 Septembre $8^h 33' 26''$, & la longitude de Mars $11^f 21^d 35' 2''$, plus grande de $1' 14''$ que par les Tables de M. Halley.

Je trouve exactement le même résultat par les observations de M. de Thury, en supposant la même position de l'Étoile; mais M. de Thury donne 42 secondes de moins à la longitude de l'Étoile, dans les calculs qu'il a faits de cette opposition.

On a aussi comparé Mars avec *Rigel* à l'Observatoire royal: voici les temps de la pendule.

SEPTEMBRE. Le 12 à midi	$11^h 44' 33\frac{1}{4}''$	le Soleil.
Le 13 au soir	$11. 57. 53\frac{1}{2}''$	Mars.
Le 14 au matin	$17. 20. 44\frac{1}{2}''$	<i>Rigel</i> .
Le 14 à midi	$11. 44. 48\frac{1}{2}''$	le Soleil.
Le 14 au soir	$11. 52. 44\frac{1}{2}''$	Mars.
Le 15 au matin	$17. 16. 43''$	<i>Rigel</i> .
Le 15 à midi	$11. 44. 22''$	le Soleil.

L'ascension droite apparente de *Rigel*, $75^d 39' 40\frac{1}{2}''$; ainsi le 13 & le 14 on a les ascensions droites de Mars $354^d 43' 40\frac{1}{2}''$ & $354^d 26' 44\frac{1}{2}''$; de-là j'ai conclu le temps vrai de l'opposition $8^h 31' 22''$, & le lieu de l'opposition $11^f 21^d 34' 58''$, ce qui ne diffère pas sensiblement du résultat précédent. Je prendrai un milieu.

OPPOSITION de 1755.

Cette opposition a été observée par M. l'Abbé de la Caille
Mém. 1755. E e

218 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE
à l'Isle de France, dont la longitude est $3^h 41'$, la latitude
 $20^d 9' 42''$ méridionale.

Le 16 Novembre, $11^h 59' 55''$, temps vrai à l'Isle de France, la différence d'ascension droite entre Mars & β du Bélier étoit $27^d 0' 47''$, la différence de déclinaison $3' 39''.4$.

Le 17 Novembre, $11^h 54' 14'' \frac{1}{2}$, la différence d'ascension droite $26^d 37' 22''$, la différence de déclinaison $1' 18''$.

L'ascension droite apparente de l'Étoile $25^d 16' 40''$, la déclinaison $19^d 35' 52''$, la parallaxe de Mars 12 secondes en hauteur; de-là je conclus les longitudes de Mars $54^d 49' 35''$ & $54^d 27' 31''$, & l'opposition vraie le 16 Novembre, $10^h 28' 33''$, temps moyen, à $1^f 24^d 47' 24''$ de longitude.

	Temps moyen.	Longitude observée.	APHÉLIE suivant les Tables.
1743, 15 Février.	$19^h 17' 40''$	$27^d 16' 32'' \Omega$	$1^h 23' 37'' \cap$
1745, 21 Mars...	14. 19. 17	1. 34. 44 $\cap$	1. 26. 4 $\cap$
1747, 1 Mai...	0. 7. 3	10. 55. 59 $\cap$	1. 28. 32 $\cap$
1749, 26 Juin...	2. 6. 12	4. 55. 41 $\cap$	1. 31. 3 $\cap$
1751, 14 Sept...	8. 28. 0	21. 35. 0 $\cap$	1. 33. 37 $\cap$
1753, 16 Nov...	10. 28. 33	24. 47. 24 $\cap$	1. 36. 9 $\cap$

Je comparerai d'abord l'observation de 1743 avec celles de 1751 & de 1753; dans celle de 1743, Mars étoit proche de son aphélie, dans celle de 1751 proche de son périhélie, & dans celle de 1753 peu éloigné de ses moyennes distances.

Je suppose premièrement l'excentricité telle qu'elle est dans les Tables de M. Halley, 14170 parties, dont la moyenne distance du Soleil à la Terre est de 100000; c'est ce que j'appellerai *première supposition*. Je la supposerai ensuite de 14270, que j'appellerai *seconde supposition*: chacune de ces deux suppositions sera subdivisée en deux autres, par rapport au lieu de l'aphélie.

Première supposition; excentricité 14170.

J'ai d'abord ôté le lieu de l'aphélie, pris des Tables, des

trois longitudes observées, pour avoir à peu près les trois anomalies vraies ou leurs suppléments à 360^d , dont je prends les moitiés, $2^d 3' 32''\frac{1}{2}$, $79^d 59' 18''\frac{1}{2}$, & $48^d 24' 22''\frac{1}{2}$. Je cherche aussi dans les Tables l'anomalie moyenne pour chacune des trois observations, & j'en prends les différences. Je trouve qu'entre la première observation de 1743, & la seconde de 1751, Mars a fait $6^f 21^d 30' 45''$ d'anomalie moyenne. Entre l'observation de 1751 & celle de 1753, il a fait $1^f 26^d 6' 50''$. Il faut que les élémens que l'on va chercher satisfassent à ces deux intervalles qui sont donnés, que l'on suppose exacts, & qui sont un des points d'où il faut absolument partir.

Les deux premières anomalies vraies étant converties en anomalies moyennes par les deux analogies que nous avons rapportées, donnent $11^f 25^d 3' 35'',4$, & $6^f 46^d 36' 3'',4$, dont la différence est plus grande de $1' 43''$ qu'elle ne doit être, en supposant l'excentricité toujours prise des Tables. J'augmente donc de 10 minutes les lieux de l'aphélie, & je recommence le calcul avec les nouvelles anomalies vraies, moindres de $10'$ que les précédentes; alors je trouve pour les deux anomalies moyennes, répondantes aux deux anomalies vraies de 1743 & de 1751, $11^f 24^d 51' 36'',1$, & $6^f 16^d 27' 42'',5$, dont la différence est de $6^f 21^d 36' 6'',5$, c'est-à-dire trop grande de $5' 21'',5$; ainsi, pour avoir changé l'aphélie de 10 minutes, la différence d'anomalie moyenne, pour le premier intervalle, a augmenté de $3' 38'',5$, puisqu'elle étoit trop grande de $1' 43''$ dans le premier cas, & qu'elle est trop grande de $5' 21'',5$ dans le second cas. Je dirai donc, $3' 38'',5 : 10 \text{ minutes} = 1' 43'' : 1' 50''$; ainsi il faudra diminuer les lieux de l'aphélie de $4' 42'',8$. Pour m'assurer de l'exactitude de ce résultat, je corrige les deux lieux de l'aphélie, & je forme deux nouvelles anomalies vraies, $11^f 25^d 57' 37'',8$, & $6^f 20^d 6' 5'',8$, qui, réduites en anomalies moyennes, donnent exactement la différence, $6^f 21^d 30' 45''$, que je devois trouver entre les anomalies moyennes; ainsi il demeure pour constant que si l'excentricité étoit 14170, il

220 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE
 faudroit diminuer de $4' 41''{,}8$ le lieu de l'aphélie, pris des
 Tables de M. Halley, pour accorder ces deux observations avec
 le mouvement moyen des mêmes Tables : voyons actuel-
 lement quelle correction il y faudroit faire pour produire le
 même accord, en supposant l'excentricité 14270.

Seconde supposition ; excentricité 14270.

Les mêmes anomalies vraies que nous avons réduites dans
 la première supposition en anomalies moyennes, étant de
 même réduites dans cette seconde supposition, en employant
 le lieu de l'aphélie tiré des Tables, donnent $11^f 25^d 3'$
 $13''$, & $6^f 16^d 34' 42''$, dont la différence est plus
 grande de 44 secondes que celle que nous devons trouver.
 En augmentant l'aphélie de 10 minutes, on aura les mêmes
 anomalies moyennes, $11^f 24^d 51' 7''{,}3$, & $6^f 16^d 26'$
 $21''{,}7$, dont la différence est plus grande de $4' 29''{,}4$
 qu'elle ne doit être suivant les Tables ; ainsi, pour 10 mi-
 nutes de différence dans le lieu de l'aphélie, le mouvement
 d'anomalie moyenne, dans l'intervalle de deux observations,
 a augmenté de $3' 45''{,}4$ (en ajoutant les deux différences
 qui se trouvent en sens contraire). On dira donc, $3' 45''{,}4$
 $: 10' = 44'' : 1' 57''{,}1$; ainsi on doit diminuer l'aphélie
 des Tables de $1' 57''$, pour pouvoir concilier les deux pre-
 mières observations avec le moyen mouvement des Tables,
 dans la supposition de 14270 d'excentricité.

C'est donc l'aphélie des Tables de M. Halley, diminuée de
 $4' 42''{,}8$, avec 14270 d'excentricité, ou diminuée de $1'$
 $57''{,}1$, avec 14270, qui satisfait aux deux premières ob-
 servations. La troisième nous apprendra lequel des deux
 approche davantage du vrai, & une partie proportionnelle
 fera le reste.

On a vu ci-dessus que la différence d'anomalie moyenne,
 répondante à l'intervalle qui est entre la seconde & la troi-
 sième observation, doit être de $56^d 6' 50''$: or l'aphélie des
 Tables, diminuée de $4' 43''$, avec 14170 d'excentricité,
 donne cette différence de $56^d 7' 1''{,}4$, c'est-à-dire trop

grande de $11''{,}4$; & l'aphélie des Tables, diminuée d'environ 2 minutes, avec 14270 d'excentricité, la donne de $56^d 3' 38''{,}6$, c'est-à-dire trop petite de $3' 11''{,}4$: ajoutant ces deux différences, qui sont en sens contraire, on a $3' 22''{,}8$. On dira donc, si pour un changement de 100 parties d'excentricité on a $3' 22''{,}8$ pour variation dans le moyen mouvement, quelle variation aura-t-on pour $11''{,}4$? on trouve $5''{,}62$; ainsi l'excentricité qui conciliera les deux intervalles, c'est-à-dire, les trois observations, sera de 14175,62. On dira de même, si pour un changement de $2' 43''$ dans le lieu de l'aphélie on a $3' 22''{,}8$, quelle variation aura-t-on pour $11''{,}4$? on trouve $9''{,}2$; ainsi ce sera $4' 33''{,}6$, dont il faudra diminuer le lieu de l'aphélie pour le mettre d'accord avec les deux intervalles donnés.

Pour vérifier tous les calculs précédens, je les ai refaits avec les élémens que je viens de trouver, de la manière suivante.

Lieu observé.	Moitié d'anomalies vraies.	Anomalies moyennes tirées des Tables.	Différences par les Tables.	Anomalies moyennes déduites des anomalies vraies.
$4^h 27^m 16^s 32''$	$2^d 1' 15''{,}7$	$11^h 25^m 3' 35''$	$6^h 21^m 30^s 45''$	$11^h 25^m 9^s 2''{,}2$
$11. 21. 35. 0$	$79. 57. 157$	$6. 16. 34. 20$	$1. 26. 6. 50$	$6. 16. 39. 47{,}2$
$1. 24. 47. 24$	$48. 22. 57$	$8. 12. 41. 10$		$8. 12. 46. 57{,}3$

Ainsi les trois observations proposées donnent le lieu de l'aphélie de $0^d 4' 33''{,}6$, moins avancé que les Tables de M. Halley, & l'excentricité de 14175,62, au lieu de 14170. Les deux logarithmes constans que l'on emploie pour réduire les anomalies vraies en anomalies moyennes, sont 0,0405217 & 4,2830705.

CALCUL DE L'ORBITE DE MARS par les observations de 1745, 1747 & 1749.

Le mouvement d'anomalie moyenne entre 1745 & 1747 est $43^d 51' 34''$; entre 1747 & 1749, il est de $52^d 17' 38''$, en supposant toujours que le mouvement moyen de Mars & de son aphélie sont représentés exactement dans les Tables de M. Halley; ce que je prouverai

222 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

dans un autre Mémoire où je discuterai les observations de Tycho - Brahé, pour établir le moyen mouvement de Mars & celui de son aphélie.

En employant deux suppositions, comme dans le calcul précédent, je trouve qu'il faut avancer l'aphélie de $11' 31''$ pour représenter le premier intervalle, en supposant l'excentricité 14170, & reculer l'aphélie de 5 minutes pour représenter cet intervalle, en supposant l'excentricité 14270.

On calculera dans ces deux suppositions le second intervalle; on trouve, dans la première supposition, $1' 51'',4$ de trop, & dans la seconde, $1' 52''$ en moins; d'où l'on conclut qu'il faut ajouter $2' 57''$ au lieu de l'aphélie de M. Halley, & augmenter son excentricité, en sorte qu'elle devienne 14221,823, & faisant le calcul sur ces suppositions, on a les élémens suivans.

Années.	Demi-anomalie vraie.	Anomalie excentrique.	Anomalie moyenne.
1745.	$15^d \ 2' \ 51''$	$32^d \ 53' \ 43'',0$	$35^d \ 47' \ 59'',0$
1747.	$34. \ 42. \ 14\frac{1}{2}$	$74. \ 30. \ 20,6$	$79. \ 39. \ 33,2$
1749.	$61. \ 40. \ 50$	$127. \ 43. \ 23,4$	$131. \ 57. \ 11,5$

Les deux logarithmes constans sont 0,0406544 & 4,2844835, le demi-axe 152369, la moyenne proportionnelle entre les demi-axes 152036: l'anomalie vraie qui répond à cette distance, est $85^d \ 58' \ 46'',5$; c'est l'anomalie vraie au temps où l'équation est la plus grande: étant convertie en anomalie moyenne, elle donne $96^d \ 41' \ 9'',9$, dont on retranchera l'anomalie vraie pour avoir la plus grande équation du centre $10^d \ 42' \ 23'',4$.

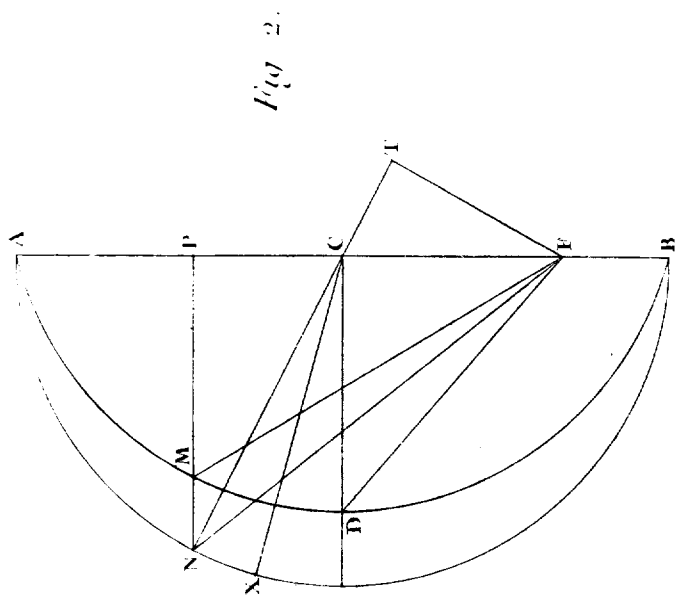
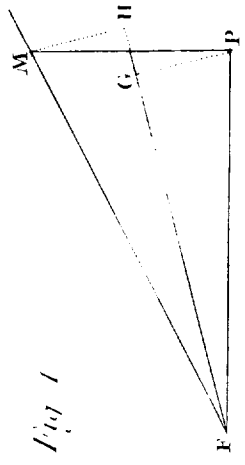
Dans le calcul précédent, on a eu ... $10^d \ 40' \ 17''$; si l'on prend un milieu, on aura $10. \ 41. \ 20$

M. HALLEY. $10. \ 40. \ 2$

M. CASSINI. $10. \ 39. \ 19$

M. DE LA HIRE. $10. \ 40. \ 40$

A l'égard du lieu de l'aphélie, en prenant un milieu entre



les deux résultats précédens, on ne trouve que 49 secondes à ôter du lieu de l'aphélie que donne M. Halley, ou $5' 18''$ de celui de M. Caffini.

Les deux résultats que je viens de trouver, ne diffèrent pas d'une quantité bien sensible; mais cette différence deviendra sans doute encore moindre lorsque je ferai entrer dans le calcul les inégalités que Jupiter & la Terre produisent dans le mouvement de Mars, & celles que la Terre elle-même reçoit par l'attraction de Jupiter, de Vénus & de la Lune.

