SECOND MÉMOIRE
SUR LA
PARALLAXE DE LA LUNE,

Contenant le résultat des Observations faites par ordre du Roi à Berlin, depuis le mois de Mars jusqu'au mois d'Août 1752, & comparées à celles du cap de Bonne-espérance.

Par M. LE FRANÇOIS DE LA LANDE.

APRÈS que les observations de M. de la Caille [a] & les miennes [b] eurent été publiées en 1752, j'essayai dans un Mémoire lû à ce sujet, & imprimé parmi ceux de l'Académie pour l'année 1752, de déterminer la parallaxe de la Lune & la correction des Tables astronomiques en cette partie; mais je ne parlai point alors des observations qui avoient été faites depuis le mois de Mars 1752, jusqu'au mois de Septembre, parce que celles de M. l'abbé de la Caille ne nous étoient point encore parvenues: aujourd'hui qu'elles se trouvent imprimées dans les Mémoires de 1751, il est juste enfin de les discuter à leur tour, pour pouvoir, par un plus grand nombre de résultats, fixer les petites incertitudes auxquelles chaque observation est sujette.

[a] *V. les Mém. de 1748.*

[b] *Voy. Mém. de l'Académie de Berlin, pour l'an. 1749, ou ceux de l'Acad. roy. des Sciences de Paris, 1751.*

Celles dont il est question aujourd'hui ont été faites avec les mêmes précautions que les premières; mais une différence qu'il n'est pas inutile de remarquer, c'est que les observations concertées avant notre départ, & dont M. de la Caille avoit donné une liste au public, étoient alors finies; ainsi il n'a dû arriver que rarement, & comme par hasard, que la Lune ait été comparée aux mêmes étoiles, soit à Berlin, soit au Cap.

Nous n'avons donc plus cette espèce de précision qui consistoit à éviter entièrement l'effet des réfractions. Il faut néanmoins observer que nous sommes en état de déterminer aussi à peu-près les réfractions par les observations correspondantes, & que d'ailleurs j'ai toûjours rapporté la Lune à une étoile qui eût la même déclinaison, quand même elle n'auroit pas été observée le même jour, ce qui ne peut produire aucune erreur sensible.

Lorsque je comparai en 1752 nos observations avec les Tables astronomiques, je me trouvai obligé d'avoir égard à la figure de la Terre & à son aplatissement; pour cela, je déterminai les parallaxes horizontales de la Lune, pour la distance de Berlin au centre de la Terre, & pour le rayon de l'Équateur dans différentes hypothèses, & je les comparai avec celles des Tables de M. Halley.

Mais il est vrai de dire néanmoins que cette comparaison n'est pas susceptible d'exactitude; elle est même défectueuse dans le principe, si l'on prétend qu'elle indique le degré de précision des anciennes méthodes, & des Tables faites jusqu'à présent. En effet, on ne peut guère savoir à quelle méthode ni à quelle observation s'étoient attachés M. Halley, M. Cassini ou d'autres, pour déterminer les résultats qu'ils emploient dans leurs Tables; on ne peut donc décider si c'est au rayon de l'Équateur ou au rayon osculateur du méridien dans le lieu de leurs observations, que l'on doit les rapporter, ou si ce n'est ni à l'un ni à l'autre.

Planche IV. Je suppose, par exemple, qu'on se fût attaché à la méthode des parallaxes horaires sous un parallèle dont le diamètre est BR, c'est-à-dire, qu'on eût observé la différence d'ascension droite entre la Lune & une étoile situées dans l'Équateur, soit au méridien, soit à l'horizon, l'on auroit une parallaxe répondante au rayon BP du parallèle sous lequel on auroit observé; alors on diroit, le cosinus de la latitude ou le sinus de l'angle BHM, qui est BP, est au rayon qui est BH, comme la parallaxe observée est à la parallaxe horizontale: ainsi cette méthode donneroit une parallaxe répondante à la ligne BH, beaucoup plus grande que la distance BQ. Cette parallaxe seroit d'environ 22 secondes trop grande, en supposant d'un degré sa quantité moyenne, & je ne doute pas que ce ne soit la raison pour laquelle les Tables de M. Cassini donnent la parallaxe trop grande d'environ une demi-minute.

Supposons actuellement, au lieu des parallaxes horaires, la méthode des plus grandes latitudes australes & boréales, pratiquée par Ptolémée, par Tycho, & dans ces dernières années par M. le Monnier, qui en avoit déduit la parallaxe telle qu'il l'a donnée dans les Institutions astronomiques ; qui s'est trouvée exactement la même que celle de M. Halley.

On suppose, dans cette méthode, que si la Lune étoit au zénit, elle n'auroit aucune parallaxe : cela seroit vrai si la Terre étoit sphérique, parce qu'alors la ligne tirée du centre de la Lune à l'œil de l'Observateur, passeroit aussi par le centre de la Terre ; mais comme dans la Terre aplatie la ligne verticale, qui est toûjours perpendiculaire à la surface de la Terre (comme la théorie & les expériences du nivellement le démontrent) ne passe point par le centre de la Terre, la Lune sera sur cette ligne, & paroîtra par conséquent au zénit à Paris, tandis que vûe du centre de la Terre elle en sera éloignée de 19 minutes, qui est l'angle de la verticale avec le rayon de la Terre. Si la Lune avoit été observée au zénit, sous la latitude de 28 degrés, on en auroit conclu la latitude boréale d'environ 15 secondes trop petite, puisqu'on supposoit la Lune à 28 degrés de l'Equateur, tandis qu'elle n'étoit réellement qu'à $27^d\ 46'$ par rapport au centre de la Terre, c'est-à-dire 14 minutes de moins, & que 15 secondes de parallaxe, répondent à 14 minutes de distance au zénit. La latitude boréale étant supposée trop petite, & soustraite de la latitude australe, observée lorsque la Lune aura été à la plus grande latitude australe, c'est-à-dire, vers 56 degrés de distance au zénit dans le méridien, donne une parallaxe de 15 secondes trop grande, mais cette parallaxe conclue est de 46 minutes environ ; ainsi, pour en conclurre une d'un degré, il y aura encore un quart de l'erreur de plus, c'est-à-dire en tout 19″ ou 20″, dont la parallaxe horizontale se trouvera plus grande que celle qui répond au rayon *BQ*.

C'eſt peut-être pour cette raiſon que Flamſteed faiſoit la parallaxe moyenne d'une demi-minute environ trop grande: Newton l'avoit réduite enſuite à une valeur fort approchante du vrai, mais je ne ſais ſur quel fondement ni ſur quelles obſervations. Au reſte, dans cette méthode des plus grandes latitudes, l'angle de parallaxe, trouvé par obſervation, n'eſt relatif qu'au point d'où les latitudes de la Lune, auſtrales & boréales, paroîtroient exactement les mêmes, c'eſt-à-dire au centre de la Terre. Cette méthode donnoit donc la parallaxe pour la diſtance au centre de la Terre, mais affectée de l'erreur de la méthode dont nous venons de parler.

Si l'on eût employé des obſervations faites en divers lieux de la Terre, ſoit des éclipſes de Soleil, ſoit des diſtances de la Lune aux étoiles, obſervées, par exemple, en B & en C ſous le même méridien, il eſt ſûr que l'angle de parallaxe obſervé auroit eu pour ſoûtendante une ligne BC, qui répondoit à la différence ou à la ſomme BAC des latitudes des lieux où l'on auroit obſervé; ainſi la parallaxe horizontale qu'on en pourroit déduire, en négligeant la figure de la Terre, ne répond ni à la diſtance au centre d'un des lieux d'obſervation, ni au rayon de curvité de l'un ou de l'autre, mais à la diſtance BA ou CA de leur point de concours, affectée cependant d'une erreur puiſque l'on ſuppoſe égales les deux lignes BA, CA, qui ne le ſont point en effet. Je ne parle point de la méthode où l'on s'eſt ſervi de la hauteur des cornes d'ombre, obſervée dans les éclipſes de Lune, & comparée avec la hauteur du centre de l'ombre calculée par le moyen de celle du Soleil. Cette méthode donnoit véritablement la parallaxe pour le lieu de l'obſervation, mais elle étoit ſujette à trop d'incertitudes, pour en eſpérer une bien grande préciſion. Enfin celle dans laquelle on employoit la durée d'une éclipſe de Lune, quoique l'aplatiſſement de la Terre dût à peine y être ſenſible, donnoit la parallaxe par rapport au demi-diamètre de l'Equateur, puiſque l'ombre doit avoir la même figure que le méridien de la Terre, le Soleil étant dans l'Equateur, & par conſéquent la largeur de l'ombre d'occident en orient devoit être proportionnée au diamètre de la Terre, pris dans le même ſens, c'eſt-à-dire, à celui de l'Equateur.

Une ſi grande diverſité dans le réſultat des méthodes nous écartoit conſidérablement de la préciſion deſirée, & nous ne devons plus être ſurpris de la différence des tables, qui ſe trouvoit de plus d'une minute & demie entre d'excellens Aſtronomes : il eſt même ſûr que quand on auroit eu des moyens d'obſerver la parallaxe avec la dernière préciſion, l'on auroit toûjours été dans l'incertitude d'une demi-minute, faute d'avoir égard à la figure de la Terre. Tous les efforts que l'on a faits pour découvrir la parallaxe, avant l'entrepriſe dont il eſt ici queſtion, n'en ſont pas moins une preuve de l'étendue du génie de ceux qui les ont faits. Il me ſemble donc que c'eſt moins à corriger les tables des parallaxes qu'il faut actuellement s'attacher, qu'à en conſtruire de nouvelles ſur les dernières obſervations, en ſuppoſant ſeulement les diamètres pris dans les tables qui les repréſentent aſſez bien, ou dans les journaux des Aſtronomes qui les obſervent. La forme la plus naturelle qui ſe préſente, eſt d'aſſigner les parallaxes pour la diſtance de chaque point de la ſurface au centre de la Terre.

C'eſt auſſi la manière la plus commode de les appliquer, ſoit dans la prédiction des éclipſes, ſoit dans le calcul des obſervations qu'on en a faites.

Si la Lune ſe trouve dans le méridien, il ſuffira, pour avoir la parallaxe de hauteur, de ſouſtraire l'angle HBQ de la diſtance apparente au zénit LBZ pour avoir la véritable LBX, & alors on pourra ſe ſervir de l'analogie ordinaire, le rayon eſt à la parallaxe horizontale, comme le ſinus de LBX eſt à la parallaxe de hauteur.

Mais ſi la Lune eſt hors du méridien, il ne ſuffira pas, comme l'ont fait quelques Aſtronomes, d'employer la règle ordinaire, le plan du vertical ne paſſant plus par le centre de la Terre, & s'en éloignant d'une quantité qui dépend de l'azimut; il faut avoir recours à la formule ſuivante, qui exprime la parallaxe de hauteur, & que j'ai déduite des calculs de M. Euler, pour un sphéroïde elliptique

$$\frac{BQ}{QL}(\text{sin. dist. app. au zén.} \times \text{cos.}\, HBQ + \text{cos. dist. app. au zén.} \times \text{sin.}\, HBQ \times \text{cos. azimut app.}) + \frac{BQ^2}{QL^2}\ \text{sin. dist. appar. au zén.} \times \text{cos. dist. app. au zén.}$$

Par-là le calcul d'une Eclipse devient d'une longueur effrayante, mais il ne se présente aucun cas où cette précision soit absolument nécessaire ; d'ailleurs presque toutes les observations sur lesquelles est fondée la théorie de la Lune, étant faites dans le méridien, on vient de voir que le calcul en est beaucoup plus simple.

Pour avoir les élémens de la figure de la Terre qu'il falloit employer dans le calcul, je parcourus dans mon dernier mémoire, trois différentes hypothèses qui donnoient des résultats différens de 7 ou 8 secondes : l'une des trois étoit celle de M. Bouguer, qui suppose les accroissemens des degrés proportionnels aux quatrièmes puissances des sinus des latitudes, ces trois degrés étant 56753, 57074, 57422, & la différence des axes $\frac{1}{179}$. Dans une autre, je supposois la même différence des diamètres de la Terre; & prenant uniquement le premier degré de latitude, je faisois l'accroissement des autres degrés proportionnel au quarré des sinus des latitudes. Enfin dans la troisième je supposois la même proportion dans l'accroissement des degrés, en essayant de limiter les résultats des mesures pour les réduire à cette proportion, ce qui donnoit 56727, 57151, 57345, savoir, en ôtant 26 toises du premier, 77 toises du dernier, & ajoûtant 77 toises au second, c'est-à-dire en supposant une erreur de 4 $\frac{1}{2}$ secondes possible sur la mesure d'un degré: par cette combinaison, l'on trouvoit la différence des deux axes de $\frac{1}{233}$, c'est-à-dire, fort approchante de celle que Newton avoit déduite de sa théorie & de ses expériences. Cette dernière hypothèse donnoit la parallaxe sous l'Equateur de 6 secondes moindre que la première, & de 1 $\frac{1}{2}$ seconde plus grande que la seconde.

J'abandonnerai aujourd'hui les deux dernières suppositions, dont c'est assez pour moi d'avoir indiqué les résultats dans mon premier Mémoire. Je retiendrai l'hypothèse de M. Bouguer, & j'y en joindrai une autre qui donne, à la précision d'une seconde, le même résultat, & qui consiste à employer seulement le degré du Nord & celui du Pérou, en supposant les accroissemens proportionnels aux quarrés des sinus des latitudes: ce nouveau sphéroïde est applati de $\frac{1}{185}$.

Dans cette nouvelle combinaison, l'on trouvera, en suivant les procédés que j'ai indiqués dans le premier Mémoire, (*Mém. de l'Ac. 1752*) que le rayon *ED* du premier degré 56753 toises est 3251707 toises, le dernier degré 57422 aura pour rayon osculateur *GM* 3305001, ainsi *DIG* = 53294; *KH* = 35529, 33; *QN* = 17764, 66; *QM* = 3269472; *QE* = 3287236.

Pour la latitude de Berlin $52^d 31' 13''$, *PH* sera 2617525, *PQ* = 2589330, *BP* = 2007027, l'angle *QBH* = $0^d 18' 0''2$, *BQ* = 3276092.

Pour la latitude du Cap $33^d 55' 15''$, on aura *TV* = 1837520, *QV* = 1817692, *CV* = 2732371, *QCT* = $0^d 17' 14''1$, *CQ* = 3281745.

L'angle *CQB* sera de $85^d 51' 13''7$, la distance *CB* de Berlin au cap de Bonne-espérance 4466372, l'angle *QCB* $47^d 1' 11''6$.

Enfin pour la latitude de Paris, l'angle de la verticale avec le rayon de la Terre sera $0^d 18' 28''1$, & le rayon de la Terre 3277216 sous ce parallèle-là; c'est celui dont je me suis servi pour trouver la parallaxe horizontale à Paris.

J'ai rangé dans la table ci-jointe, tous les autres élémens du calcul pour chaque observation; il sera facile de les entendre, je vais seulement en donner un exemple. Planche III.

Le 24 Août 1752, jour de la pleine Lune, à $11^h 53' 5''$, comme on le voit dans la première colonne, j'observai la distance au zénit du bord boréal de la Lune à Berlin, de $59^d 13' 34''$; (*7.e colonne*) à ce moment la longitude de la Lune, suivant les Tables de M. Halley, étoit de $2^d 0' 20''$

dans les Poiſſons, *(3.e col.)* la latitude alors boréale 4^d 52′ 9″, *(4.e col.)* la déclinaiſon auſtrale 6^d 13′ 30″, 3, *(5.e col.)* le demi-diamètre horizontal 15′ 6″, 2, *(6.e colonne)* & le même demi-diamètre corrigé par la réfraction & par la parallaxe, c'eſt-à-dire, diminué ſuivant le raccourciſſement que produit la réfraction, & augmenté à proportion de la quantité dont la Lune étoit plus proche de Berlin que du centre de la Terre, au moment de l'obſervation 15′ 12″,7. *(9.e col.)* Le même jour j'obſervai l'étoile β du Verſeau dans le méridien à 59^d 7′ 38″ du zénit; ainſi ſa diſtance au parallèle de la Lune étoit de 21′ 8″, & en y ajoûtant 1″,5 à cauſe de l'accourciſſement des réfractions, 21′ 9″,5. *(10.e col.)*

Le même jour, il étoit 11^h 52′ 26″ au Cap *(11.e col.)* lorſque M. de la Caille obſerva la diſtance au zénit du bord boréal de la Lune 28^d 20′ 13″, 4, & celle de l'étoile 27^d 16′ 17″, 5; la différence eſt 1^d 3′ 55″, 9: ſi l'on y ajoûte le demi-diamètre à cette hauteur 15′ 18″, 8, le changement de la déclinaiſon de la Lune entre les deux obſervations de Berlin & du Cap, 3′ 37″,9 pour réduire le produit de celle-ci à la même valeur que ſi elle avoit été faite en même temps que la première, 3″, 1 pour la quantité dont la parallaxe de hauteur auroit auſſi changé pour raiſon de ces 3′ 37″, 9, enfin 0″, 9 pour la réfraction, l'on aura 52′ 19″ pour la différence de déclinaiſon entre le centre de la Lune & l'étoile au Cap, corrigée par la réfraction, & réduite à ce qu'elle auroit dû paroître à l'heure de l'obſervation de Berlin *(20.e col.)*. Si l'on ajoûte cette quantité à celle de la *colonne 10*, parce que cette diſtance paroiſſoit en ſens contraire à Berlin & au Cap, on a 1^d 13′ 28″, 5 pour l'effet total de la parallaxe, entre les deux Obſervatoires, c'eſt-à-dire, l'angle *CLB*, différence du lieu ou de la déclinaiſon de la Lune vûe à Berlin, & de cette même déclinaiſon obſervée à Paris.

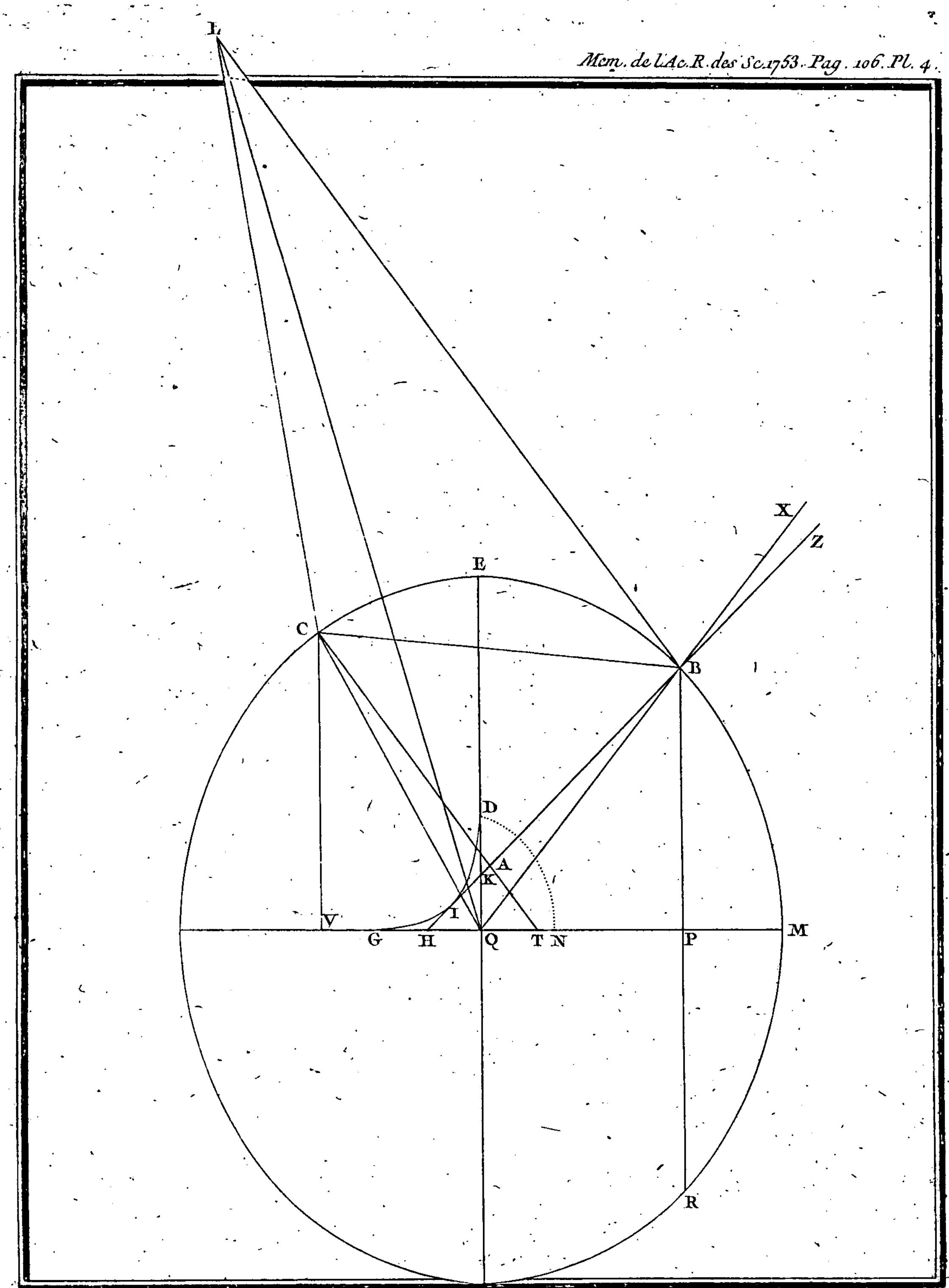
On connoît donc l'angle *BLC* & le côté *BC*; l'angle *LBC* eſt de 73^d 39′ 32″7; pour le connoître il faut ajoûter l'angle *LCZ* (diſtance de la Lune au zénit du Cap, corrigée par la réfraction & réduite à l'heure de l'obſervation

faite

faite à Berlin) moins l'angle VCZ 17′ 14″1, avec l'angle BCQ, le supplément de la somme est l'angle LCB: si on ajoûte l'angle CLB avec l'angle LCB, le supplément de la somme sera l'angle LBC.

Il sera donc facile de trouver le côté LC: or, dans le triangle LCQ, connoissant LC, CQ, & l'angle LCQ, on trouvera LQ distance de la Lune au centre de la Terre en toises, dont le logarithme est 830866, & dans l'hypothèse de M. Bouguer 830789. Connoissant la distance de la Lune, un seul triangle rectangle donnera la parallaxe pour tel rayon de la Terre que l'on voudra; ainsi, pour la distance de Paris au centre de la Terre, on la trouve de 55′ 22″8, au lieu de 54′ 55″5 que donnent les tables de M. Halley, qui s'accordent presque toûjours exactement avec celles des Institutions astronomiques de M. le Monnier, l'erreur des tables est donc de 27″3: cette même parallaxe pour le rayon QE de l'Equateur est de 55′ 32″8, elle est la même dans l'hypothèse de M. Bouguer; mais comme la courbure est différente, le rayon de la Terre pour Paris, tel que CQ, étant un peu différent de ce qu'il est dans ma première supposition, il donne une demi-seconde de moins, c'est-à-dire, 55′ 32″3 pour la parallaxe horizontale à Paris.

Je finis en remarquant que puisque l'erreur des tables se trouve environ de 26″ par ces dernières observations comme par les huit premières, dans celles sur-tout que j'ai lieu de croire les plus exactes, il me paroît assez vrai-semblable jusqu'à présent que le rapport du diamètre à la parallaxe horizontale pour Paris est celui de 33′ à 60′ 26″ ou de 32′ 45″7 à 60′, du moins en supposant les diamètres de M. Halley conformes à l'observation, jusqu'à ce que j'aie pû les vérifier moi-même, ou en recouvrer des observations.



J. Ingram Sc.