PREMIER MÉMOIRE SUR LA PARALLAXE DE LA LUNE, ET SUR SA DISTANCE A LA TERRE;

Dans lequel on applique les nouvelles observations faites par ordre du Roi en 1751 & 1752, à Berlin & au cap de Bonne-espérance, à un sphéroïde aplati, pour en déduire les parallaxes dans différens points de la Terre.

Par M. LE FRANÇOIS DE LA LANDE.

Déc. 1752. L'UTILITÉ des Sciences n'a guère besoin d'être prouvée dans notre siècle; ceux qui n'auroient pû se mettre à portée de la connoître par eux-mêmes, en doivent juger par les entreprises nouvelles que la France forme de jour en jour pour accélérer leur perfection.

Si la multitude, peu touchée de tout ce qui n'entre pas dans le détail de la vie, vouloit encore n'estimer leur valeur que par le peu de secours qu'elle croit en retirer, nous serons toûjours sûrs de voir le Ministère, dans un Etat si éclairé, triompher du préjugé & nous venger de l'ignorance.

Ainsi je croirois fort inutile de justifier l'entreprise dont je vais parler, de laquelle j'ai commencé à rendre compte dans les Mémoires de l'Académie pour l'année 1751, & qui avoit pour objet la connoissance exacte de la distance de la Lune à la Terre.

Je supposerai avec tous les Savans, que dans la sphère des connoissances humaines, & dans la variété infinie des objets que la Nature présente à nos spéculations, il n'en est aucun qui ne mérite de remplir la vie d'un Philosophe, toutes les fois que l'esprit humain en pourra retirer quelque connoissance nouvelle.

Le Sage admire l'immensité de la Nature dans le mouvement imperceptible des insectes qu'elle a placés sous nos pieds, comme dans celui des corps immenses qu'elle fait rouler sur nos têtes: il tend au même but lorsqu'il considère les organes matériels & visibles, la plus grossière partie de nous-mêmes, ou lorsqu'il saisit à la pointe de l'esprit, les opérations d'une matière plus déliée, ses attributs & sa nature.

Ainsi, de tous ces objets, celui-là seul paroîtra mériter une attention spéciale, qui se trouvera lié avec un plus grand nombre d'autres, ou qui paroîtra d'un plus grand secours dans l'étude générale de la Nature entière.

C'est à ce titre que l'Académie royale des Sciences a donné depuis long temps une attention spéciale à la théorie des mouvemens de la Lune: il eût été difficile à de vrais Philosophes de négliger une planète qui tient de si près à la Terre, qui dans ces derniers temps a servi à découvrir la véritable loi du système de l'Univers, qui cause par son action immédiate l'élévation & le flux des eaux de la mer, & qui nous fournit le moyen le plus propre à nous conduire dans la Géographie & dans la Navigation. Mais les inégalités de la Lune, qui sont si considérables & si difficiles à démêler, dépendent tellement de sa distance à la Terre, que nous ne saurions les réduire au calcul sans supposer auparavant cette distance, de manière qu'on doit la regarder comme une partie essentielle à la théorie de la Lune.

Les Astronomes croiroient, pour ainsi dire, avoir atteint leur but, s'ils étoient venus à bout de connoître les variations apparentes de tous les mouvemens célestes, leurs circonstances & leurs retours, tels qu'ils se présentent à nos yeux, & dans la précision avec laquelle ils se peuvent observer, sans se soucier de la nature des astres, de leurs grosseurs ou de leurs distances, qui deviendroient des objets de pure curiosité.

C'est à peu près le cas où se trouvent les étoiles fixes: on n'espère pas & on ne s'efforce plus de connoître leur éloignement; mais une suite de bonnes observations nous a fait connoître très-exactement tous les phénomènes des trois apparences de mouvement, *précession, aberration* & *nutation*, qui sont communes à toutes les étoiles. La même méthode nous apprendra sans doute par la suite des temps, la loi & les circonstances des dérangemens physiques qu'on a aperçûs dans quelques-unes; mais la Lune ne sauroit être comprise dans cette règle: elle est si proche de la Terre, que les changemens de sa distance influent de la manière la plus visible sur les apparences de son mouvement progressif ou angulaire.

Liv. III, propos. 37, cor. 8. Lorsque *Newton* considérant la quantité dont les eaux de la mer s'élèvent dans les nouvelles ou pleines lunes, & dans les quadratures, entreprend de déduire la force de la Lune, sa densité, sa distance au centre commun de gravité, nous voyons qu'il invite les Astronomes à rectifier par observation les élémens de ce calcul, dans lequel entre sur-tout la distance de la Lune à la Terre.

Que ne devons-nous point espérer de nos recherches, après une si heureuse application de celles qui ont été déjà faites, à des choses qui auroient dû nous paroître pour jamais impénétrables? peut-être préparent-elles à la postérité une moisson encore plus précieuse de ces prodiges de la Nature, dont nous ne sentons la possibilité qu'en voyant leur existence.

Le quart-de-cercle mural avec lequel j'allai faire à Berlin les observations qui devoient être correspondantes à celles de M. de la Caille au Cap, a cinq pieds de rayon, & il servoit depuis 1743 aux observations de M. le Monnier à Paris. Il a été fait à Londres par Sisson, & vérifié en présence de plusieurs personnes de la Société royale de Londres; il porte deux divisions appelées communément de *Nonnius*, mais plus exactement *divisions de Vernier*, qui montrent immédiatement 15 secondes: il est tout entier de cuivre, sans mélange d'aucun autre métal, parce que la dilatabilité du cuivre par la chaleur étant presque double de celle du fer, il ne peut manquer de se faire un effort considérable, qui altère la justesse d'un instrument, lorsque du cuivre appliqué avec force sur du fer vient à se dilater en tout sens.

La lunette ou alidade, mobile dans le méridien, est soûtenue dans

dans sa partie éloignée du centre par un balancier, pour qu'elle ne porte jamais sur le limbe; enfin ce quart-de-cercle est suspendu librement sur deux points, & les plus légers changemens dans sa situation, produits par les différens degrés d'humidité ou de chaleur, s'y observent au moyen d'un fil à plomb suspendu du centre sur le commencement inférieur de la division. J'ai toûjours eu soin de l'examiner avec un microscope à deux verres, au moment de chaque observation, & de tenir compte de la petite quantité dont ce fil paroissoit s'écarter à différentes heures du jour, du point où il devoit répondre; quantité qui alloit souvent à un tiers de minute.

Cet instrument devoit être fixé dans le plan du méridien, sur un mur solide préparé pour cet effet, de manière que le quart-de-cercle pût être mis alternativement sur les deux faces, à l'orient & à l'occident, à cause des vérifications que l'on fait au zénit, & de la hauteur du pole qu'il est nécessaire d'observer.

Pour suppléer à cette construction, que les difficultés locales rendoient comme impossible, je fis élever par le moyen d'un très grand appareil de machines, sur la face méridionale de l'Observatoire royal de Berlin, dont j'avois la libre disposition, & au second étage, c'est-à-dire, à 40 pieds de hauteur, une pierre de 6 pieds de haut sur 5 de large, qui fut placée verticalement sur l'épaisseur du mur, & perpendiculairement à sa direction, de manière que la surface de la pierre qui regardoit l'orient, fût exactement plane & placée dans le méridien, & la face occidentale adossée & jointe à l'épaisseur du mur (qui étoit d'environ 3 pieds) par un ouvrage de maçonnerie.

Cette pierre, qui pesoit plus de cinq milliers, fut assise sur une autre de même grandeur, placée dans une situation horizontale, & qui, occupant toute la largeur de la fenêtre, entroit encore par ses extrémités dans le mur des deux côtés: celle-ci tenoit lieu d'un balcon qui m'étoit nécessaire, parce que la pierre verticale failloit d'environ 1 pied sur la surface du mur, & cela pour que la lunette du quart-de-cercle, lorſqu'elle ſeroit verticale, fût entièrement hors de la fenêtre, & que la vûe au zénit ne fût point interceptée par le larmier & par les cimaiſes de l'entablement.

Une telle diſpoſition excluoit totalement l'opération du retournement du quart-de-cercle, & les obſervations boréales: il fallut donc encore faire les mêmes préparatifs ſur la face ſeptentrionale de l'obſervatoire, où je plaçai dans la ſuite le quart-de-cercle.

Pour joindre exactement chacune de ces deux pierres à celle qui lui ſervoit de baſe, & lui aſſurer une ſituation exactement verticale, je fis couler par-deſſous & dans les interſtices plus de cent livres de plomb.

Il y avoit un avantage manifeſte à ce que toute la partie du mur qui devoit ſoûtenir le quart-de-cercle ſe trouvât d'une ſeule pierre, comme je l'ai pratiqué, afin que les variations d'un ſi grand nombre de parties qui compoſent un mur, ne ſe trouvaſſent pas diſtribuées inégalement, de manière à en changer la figure. Je n'héſitai pas à prendre ce parti, quelques difficultés qu'il dût entraîner dans l'exécution, aſſuré du zèle de l'Académie royale des Sciences & Belles-Lettres de Pruſſe, qui venoit d'adopter les travaux que j'allois entreprendre, en me recevant moi-même au nombre de ſes Membres, & ſecondé des ſoins de M. de Maupertuis, qui n'épargna rien de tout ce qui pouvoit contribuer au ſuccès de l'entrepriſe. L'avancement général des Sciences ſeroit prompt, ſi l'on trouvoit ſouvent de ces perſonnes rares qui ſavent réunir les lumières, le zèle & l'autorité, connoître l'utilité des choſes, & en faciliter l'exécution.

Ce fut après ces longs préparatifs, que je commençai à obſerver au mois de Décembre 1751: ces obſervations ſe trouvent dans le ſixième tome des Mémoires de l'Académie royale des Sciences de Pruſſe (qui contient l'année 1749) dans leur premier état & ſans aucune réduction; elles ont été réimprimées, pour la plus grande partie, avec de nouvelles additions & avec toutes les réductions convenables, prêtes à mettre en usage, dans les Mémoires de l'Académie royale des Sciences de Paris, pour l'année 1751; il ne s'agit plus que d'en déduire les conséquences nécessaires.

Mais avant que de parler des conclusions que je dois en tirer pour la correction des Tables dont on s'étoit servi jusqu'à présent, il est nécessaire de considérer un instant quelles étoient nos connoissances dans cette partie de la Physique: nous examinerons les différens degrés par lesquels on étoit parvenu enfin à connoître les parallaxes de la Lune, aussi exactement que le comportoient les méthodes imparfaites qu'on étoit obligé d'employer.

Nous voyons par le témoignage de Pline le Naturaliste, que les premiers hommes qui cultivèrent l'Astronomie, n'ayant aucune voie qui pût les conduire à connoître les distances absolues des planètes, se contentoient d'établir des loix conjecturales, par lesquelles ils croyoient en trouver les rapports: *intervalla quoque siderum à Terrâ multi indagare tentaverunt, & Solem abesse à Lunâ undeviginti partes, quantùm Lunam ipsam à Terrâ, prodiderunt;* c'est-à-dire que les Anciens avoient estimé la distance du Soleil à la Terre dix-neuf fois plus grande que celle de la Lune. On voit cependant que Plutarque parle de dix-huit fois au lieu de dix-neuf, ce qui pourroit être une erreur de Pline, ou une corruption du texte, dans lequel le P. Hardouin croit qu'il faudroit en effet suppléer *duodeviginti* pour *undeviginti.* C'est Aristarque qu'il faut entendre ici sous le nom des Anciens, quoique Pline n'en parle pas. Pline continue en ces termes: *Pythagoras verò, vir sagacis animi, à Terrâ ad Lunam 126000 stadiorum esse collegit.... in quâ sententiâ & Gallus Sulpicius noster fuit.* Ce nombre de stades peut se réduire en toises de Paris, en suivant les distances données par Strabon, qui, subsistant encore, ont servi à reconnoître que le mille romain équivalloit à 767,04545: or un mille valoit huit stades, ainsi chaque stade valoit 95,88 toises du Châtelet de Paris, ou à peu près 96 toises; donc les 126000 stades équivalent à 12080880 toises, ou 5491 $\frac{17}{55}$ lieues communes de

Pline, liv. II, cap. 21, p. 86, édit. de 1723.

Liv. II, de Placitis Philosophorum.

France, comptées ſur le pied de 2200 toiſes pour chaque lieue. On voit combien la conjecture de ces temps-là étoit défectueuſe, puiſque cette diſtance eſt réellement de plus de quatre-vingt mille lieues ; mais comme Pythagore qui mourut 497 ans avant J. C. n'avoit que des idées très-imparfaites ſur la grandeur de la Terre, qui eſt le ſeul terme de comparaiſon que l'on ait à cet égard, il n'eſt pas ſurprenant que ſa détermination en meſures abſolues fût purement conjecturale : en effet, juſqu'au temps d'Eratoſthène qui mourut cent quatre-vingt-dix ans avant J. C. on ne ſavoit rien ſur la grandeur abſolue du Globe terreſtre.

Il ne faut cependant pas s'en rapporter à ce que Pline dit des lumières de ſon ſiècle dans ces matières-là : on
Chap. 23. peut juger par ce qu'il dit, qu'il avoit aſſez peu de connoiſſances en Aſtronomie, & que comme Philoſophe il ſe défioit de tout ce qu'il n'entendoit pas : il ne fait, par exemple, aucune mention des obſervations d'Hipparque, quoique Ptolémée les ait jugées dignes d'être citées dans ſon ouvrage, où l'on voit qu'il n'avoit guère deſſein de parler que de ſes propres obſervations : auſſi Pline exprime-t-il ainſi ſa défiance & ſes doutes ; *incomperta hæc & inextricabilia, ſed tàm prodenda, quàm ſunt prodita.... nec ut menſura, id enim velle penè dementis otii eſt, ſed ut tantùm æſtimatio conjectandi conſtet animo...* A la vérité, ce qu'il vient de dire plus haut de Poſſidonius, autoriſeroit ſa manière de penſer, en voyant une ſi grande différence de ſentimens parmi les Mathématiciens de ſon temps : *Poſſidonius non minus quadraginta ſtadiorum à Terrâ altitudinem eſſe, in quâ nubila, venti nubeſque proveniant, indè purum liquidumque & imperturbatæ lucis aërem, ſed à turbido ad Lunam vicies centum millia ſtadiorum ;* c'eſt-à-dire, deux millions de ſtades, le tout faiſant 87165 lieues, que le P. Hardouin exprime mal-à-propos, ce me ſemble, par 255000 pas, au lieu de 250005000 que l'on déduit du texte de Pline, puiſque le ſtade valoit 125 pas ; cependant cette prodigieuſe différence entre Pythagore & Poſſidonius ne pouvoit être une raiſon du temps de Pline,

qui est mort l'an 80 de J. C. de douter de la certitude de l'Astronomie, s'il en eût connu les méthodes.

Plutarque, qui est mort vers l'an 104, dit aussi qu'Eratosthène avoit jugé la Lune éloignée de 780000 stades; & comme il assignoit pour le diamètre de la Terre 79545 stades, il faisoit la distance de la Lune de dix-neuf ou vingt rayons de la Terre, au lieu que la mesure de Possidonius, dont nous venons de parler, se réduit à $52\frac{15}{38}$ demi-diamètres de la Terre, puisqu'il donnoit 38182 stades au diamètre de la Terre. *Liv. III, c. 31.*

Petoniris & Necepsus rois d'Egypte, avoient décidé que la Lune n'étoit éloignée que de 1980 stades, ou environ 86 lieues. Pline qui le rapporte, rit de leur ignorance: elle étoit en effet digne de ces anciens Rois, qui, accoûtumés à régner sur des hommes esclaves de leur mollesse, auroient voulu étendre leur empire sur la Nature & sur l'esprit humain, en faisant adorer leurs rêveries.

Nous lisons dans Ptolémée, & dans le commentaire de Théon sur son Almageste, le plus ancien ou plustôt le seul ouvrage qui nous soit resté de l'Astronomie ancienne, qu'Hipparque qui observoit encore l'an 129 avant J. C. ayant supposé la parallaxe du Soleil, tantôt nulle, tantôt de différente grandeur, par de certaines conjectures tirées des éclipses, s'étoit efforcé de trouver les distances de la Lune à la Terre, mais qu'à cause de l'incertitude de sa méthode, il avoit trouvé des différences énormes dans ses résultats; quelquefois il avoit trouvé la plus grande distance de 83 demi-diamètres, & la plus petite de 71, quelquefois la première de $72\frac{1}{2}$, & la seconde de 62: car ce grand homme s'étoit déjà aperçû que la Lune alloit fort inégalement, & que sa grandeur apparente changeoit considérablement. *Liv. V. ch. 11.*

Ptolémée employa une méthode beaucoup plus directe & plus ingénieuse, il ne réussit cependant guère mieux; il observa la Lune lorsqu'elle étoit dans le tropique d'été, à $2^d\frac{1}{8}$ du zénit d'Alexandrie, & lorsqu'elle étoit dans le tropique d'hiver, à $50^d\,55'$, par le moyen de ses règles parallactiques:

trouvant à l'aide de ſes tables, que dans le temps de la ſeconde obſervation la Lune n'étoit véritablement qu'à 49^d 48′ du zénit, il en conclut une parallaxe de 67 minutes, & une diſtance de 40 demi-diamètres terreſtres; ſans une compenſation fortuite des deux erreurs qu'il commettoit, dans l'obliquité de l'Écliptique qu'il faiſoit trop grande, & dans la latitude de la Lune qu'il faiſoit trop petite, il auroit eu une parallaxe de 41 minutes plus grande. Des fondemens auſſi défectueux, appliqués à une théorie auſſi imparfaite, lui donnèrent par une nouvelle compenſation d'erreurs, la plus grande diſtance, 64 demi-diamètres, c'eſt-à-dire, aſſez juſte, mais la plus petite, à la partie inférieure de l'épicycle en quadrature, de 34 ſeulement.

Albategnius de ſcientiâ ſtellar. cap. 39.

Les Arabes ne corrigèrent point ces monſtrueuſes erreurs; il étoit réſervé à Copernic de ſavoir tout éclaircir, pénétrer, approfondir, & ſouvent même deviner.

Copernic fut donc le premier qui détermina par des obſervations faites en 1522, les diſtances de la Lune entre 52 & 68 demi-diamètres de la Terre: on ne ſauroit faire un plus bel éloge de ſon travail, qu'en diſant que Tycho-Brahé, après un grand nombre de bonnes obſervations faites plus de ſoixante ans après, avec une collection d'inſtrumens prodigieuſe, n'y trouvoit preſque rien à changer, & que du temps même de Riccioli on n'avoit guère de meilleure détermination, quoiqu'après la découverte des lunettes, & l'on voit que celui-ci employoit 51 & 67 demi-diamètres, c'eſt-à-dire la parallaxe moyenne, 59′ 22″.

Riccioli Almageſtum novum, tom. I, lib. 4, pag. 223.

Mais depuis le temps de Riccioli on a rectifié les hypothèſes du mouvement de la Lune, & retranché la moitié toute entière de la différence qu'on avoit établie entre la plus grande & la plus petite parallaxe. M. Caſſini diminua de quelques minutes la parallaxe moyenne, & malgré l'incertitude que la diverſité des méthodes devoit produire, nous voyons que M. de la Hire en 1702, M. Halley en 1719, & M. le Monnier dans ſes Inſtitutions aſtronomiques, d'après ſes propres obſervations, ne diffèrent que de quelques secondes : j'ai donc cru pouvoir choisir les tables de M. Halley ou des Institutions, pour y appliquer les corrections que l'observation a dû produire, quoique ces Tables la donnent d'une minute moindre que Flamsteed & Newton ne l'établissoient dans le siècle passé, & M. Cassini dans celui-ci. On verra dans la Table suivante tout ce que nous pourrions dire à cet égard.

TABLE de la plus grande & de la plus petite Parallaxe suivant les différens Auteurs.

NOMS DES AUTEURS.	Plus grande Parallaxe.		Plus petite Parallaxe.	
	Min.	*Sec.*	*Min.*	*Sec.*
Hipparque, 120 ans avant J. C.	48	30	41	30
Le même, ensuite.	55	30	47	30
Ptolémée, 147 ans après J. C.	103	0	53	34
Alphonse, roi de Castille, l'an 1284. ..	63	17	53	19
Copernic, mort l'an 1543.	65	48	50	19
Tycho, mort l'an 1601.	65	36	56	44
Képler dans ses Ephémérides, 1616. ...	60	58	54	41
dans ses Tables, 1627.	63	41	58	22
Longomontanus vivoit en 1612.	66	9	57	15
Lansbergius dans ses Tables, 1632.	67	6	51	20
Argolus vivoit en 1629.	65	36	56	45
Wendelinus vivoit en 1626.	61	18	53	46
Bouillaud en 1645.	63	43	53	30
Riccioli en 1651.	66	56	51	32
M. de la Hire en 1702.	61	25	52	17
M. Halley en 1719	61	7	53	29
M. Cassini en 1740	62	11	54	33
M. le Monnier en 1746.	61	8	53	29
M. Euler dans ses premières Tables	61	59	53	20
M. Euler ensuite en 1750.	61	15	52	42
M. Leadbetter dans ses Tables.	61	24	54	59
dans son Astron. des Satel.	60	51	54	29
dans son Uranoscopie, 1735.	61	7	53	28

La théorie de la Lune se trouvant très-avancée par le secours des périodes d'observations qui en ont été faites, on souhaitoit sur-tout de pouvoir fixer sa parallaxe qui en fait une partie considérable, & ce fut l'objet de l'Académie lorsqu'elle desira de placer deux Observateurs à une grande distance & sous un même méridien.

Mém. de l'Acad. 1748 & 1751.

Les observations faites au cap de Bonne-espérance se trouvant déjà imprimées par ordre de l'Académie, aussi-bien que les miennes, je vais commencer par l'examen de celles qui, pendant les trois premiers mois, se trouvent avoir eu au Cap quelques correspondantes : j'examinerai les autres dans un second Mémoire. Je suppose la latitude de l'observatoire de Berlin, $52^d\ 31'\ 13''$, telle que je l'ai observée au mois de Septembre, par le moyen de l'étoile polaire, vûe au dessus & au dessous du Pole, deux heures après midi & après minuit ; elle est peu différente de celle que M. Kies m'a assuré avoir observée avec un quart-de-cercle de 2 pieds, dont l'arc total est exactement de 90 degrés, & qu'il a insérée dans l'Almanach de Berlin, $52^d\ 31'\ 0''$; mais il étoit important qu'elle fût vérifiée ou corrigée avec un plus grand instrument.

L'observation que je rapporte, suppose la Table des réfractions de M. Halley, & je n'y ai employé, aussi-bien qu'à toutes mes autres observations, aucune correction que celle de l'angle de la lunette avec le premier point de la division, trouvé par le retournement. Au mois de Juillet & au mois de Septembre 1752, le quart-de-cercle fut placé vers le nord; alors, par un grand nombre d'étoiles voisines du zénit, comme κ de Pégase, β du Dragon, γ à l'épaule de Persée (celle-ci n'étoit qu'à 18 secondes du zénit vers le sud) je trouvai chaque fois l'erreur de 18 ou 19″ soustractive des distances au zénit.

Quant aux observations du bord de la Lune, j'y ai employé la correction de la moitié de l'épaisseur du fil, parce que je ne me suis jamais servi que du bord du fil pour en faire une tangente exacte au bord lumineux de la Lune : voici

voici la méthode que j'ai employée pour en déterminer exactement la quantité.

Ayant pris un fil d'argent, qui, mis en comparaison au foyer même de la lunette, paroissoit de la même grosseur que ceux du réticule, j'ai trouvé par expérience que son diamètre étoit $\frac{1}{565}$ de pouce anglois : cette fraction divisée par la longueur du foyer de l'objectif, qui est d'environ 65 pouces, donne la tangente d'un angle de 6 secondes, & qui dans le Ciel répond à l'épaisseur entière des fils placés au foyer de la lunette ; j'ai donc ajoûté 3 secondes aux distances au zénit observées à la partie supérieure du fil, & soustrait 3 secondes de celles où je m'étois servi de la partie inférieure.

Quoique la longitude de Berlin eût été déjà déterminée, soit par les éclipses des Satellites de Jupiter, soit par le calcul d'une occultation d'étoile & d'une éclipse de Soleil, que l'Académie a fait imprimer dans le nouveau Recueil des Savans étrangers, *tome I,* j'ai cru devoir la vérifier par mes propres observations, & je la supposerai de 44′ 15″, au lieu de 44′ 25″, en attendant que j'aie rendu compte des recherches qui m'y ont conduit.

Au reste, cette longitude n'influe que très-peu sur les résultats dont il est question dans ce Mémoire, parce que la différence des longitudes de la Lune & des déclinaisons calculées par les Tables, ne dépend pas beaucoup du temps pour lequel on calcule, du moins à quelques minutes près, & que l'on n'emploie la différence des méridiens de Paris à Berlin, que pour appliquer les tables au lieu & au temps de l'observation.

Il n'en est pas de même de la différence des méridiens entre Berlin & le cap de Bonne-espérance ; une différence de 5 secondes de temps produit quelquefois une seconde sur l'arc total de la parallaxe : cependant il est à remarquer que l'erreur qu'elle pourroit produire, est compensée entre les observations où la déclinaison de la Lune varie en augmentant, & celles où elle diminue ; de sorte que cette différence ne feroit qu'augmenter celle qui se trouve entre les résultats de différentes obſervations : je l'ai ſuppoſée en nombres ronds, de $0^h\ 20'\ 0''$, quoiqu'il y ait peut-être quelques ſecondes à ajoûter ou à ſouſtraire.

La déviation du mural examinée fréquemment par des hauteurs correſpondantes du Soleil & des étoiles, ne s'eſt jamais trouvée que de quelques ſecondes de temps, que l'on peut négliger ſans crainte dans le cas préſent, où il n'eſt point queſtion des aſcenſions droites de la Lune; ainſi, ſans avoir égard à cette erreur (ſi ce n'eſt néanmoins lorſqu'il s'agit de trouver le temps vrai) j'ai toûjours obſervé la diſtance au zénit du bord terminé de la Lune, au moment qu'il ſe trouvoit à l'interſection des deux fils, c'eſt-à-dire, le centre de la Lune étant dans le méridien, ou pluſtôt ſur le fil vertical de la lunette, peu différent du méridien, comme je viens de le dire, & j'ai eu ſoin de marquer encore le plus ſouvent à la pendule le moment de l'obſervation. Pour comparer ces diſtances au zénit avec celles que M. de la Caille a publiées, j'ai ſuppoſé qu'il les avoit obſervées de même, lorſque le centre de la Lune ſe trouvoit au fil vertical de la lunette; j'ai calculé avec un grand ſoin pour les deux momens de ces obſervations, d'après les tables de M. Halley, la longitude & la latitude de la Lune, le diamètre, la parallaxe horizontale & la déclinaiſon; mais afin d'éviter le plus petit défaut dans la différence de ces deux réſultats dont on eſt obligé de ſe ſervir, j'ai eu ſoin de faire toûjours un troiſième calcul pour un moment intermédiaire, afin d'être aſſuré par l'égalité des différences, de l'exactitude ſcrupuleuſe de tous les trois.

La différence de ces deux déclinaiſons étant employée pour corriger la diſtance au zénit obſervée au cap de Bonne-eſpérance, la rend telle qu'elle eût été obſervée dans le même parallèle, ou à la même latitude, ſi le Cap ſe fût trouvé exactement ſous le méridien de Berlin. Cette différence de déclinaiſon en entraîne une auſſi dans la parallaxe de hauteur, & même dans la réfraction, puiſque l'une & l'autre changent dès que vous changez le moins du monde les hauteurs apparentes; la première, qui viſiblement ſe peut prendre dans les Tables, puiſqu'elle eſt extrêmement petite, eſt toûjours additive à la différence de déclinaiſon calculée; la ſeconde eſt abſolument nulle dans le cas des obſervations ſuivantes, faites aſſez près du zénit.

Pour réduire au centre les diſtances au zénit du bord de la Lune obſervé, j'ai employé, autant qu'il m'a été poſſible, les diamètres obſervés à Paris avec un excellent micromètre, préférable à celui que j'y employois à Berlin; la correction qu'on eſt obligé d'y faire à raiſon de la hauteur ſur l'horizon, eſt aſſez connue pour qu'on la puiſſe tirer exactement des Tables.

Pour être à couvert de l'inégalité des hauteurs abſolues, ſoit par rapport aux réfractions, ſoit par rapport aux angles des lunettes avec les premiers points de diviſion, ou aux grandeurs des arcs entiers, j'ai toûjours pris une étoile pour terme de comparaiſon, lors même qu'elle n'a pas été obſervée le même jour au Cap & à Berlin, en employant alors l'équation de la lumière & celle de la nutation pour le changement de la déclinaiſon apparente, auſſi-bien que celle des réfractions par rapport à la diſtance des parallèles de la Lune & de l'étoile.

Je n'ai employé dans le calcul des obſervations ſuivantes, qu'un petit nombre d'étoiles, & autant que je l'ai pû, de la première grandeur; mais comme je n'ai jamais négligé d'en obſerver un grand nombre devant ou après le paſſage de la Lune au méridien, il me ſera facile dans la ſuite d'y faire entrer des obſervations de pluſieurs autres étoïles.

Le 3 Décembre 1751, à $13^h\ 8'\ 28''$ de temps vrai au méridien de Berlin, j'obſervai la diſtance au zénit du bord auſtral de la Lune $32^d\ 0'\ 58''$: j'ai calculé pour cet inſtant ſur les tables de M. Halley la longitude de la Lune; en ſuppoſant la différence du méridien de Berlin à celui des tables, de $0^h\ 53'\ 45''$, elle ſe trouve de $27^d\ 14'\ 24''$ dans les Gémeaux, la latitude auſtrale de $2^d\ 7'\ 46''$, la déclinaiſon boréale $21^d\ 18'\ 56''6$, le demi-diamètre de la Lune augmenté à raiſon de ſa hauteur ſur l'horizon, de $17'$

0″3: le lendemain j'obſervai la diſtance *d'Aldebaran* au zénit, de 36^d 31′ 22″; ainſi la différence en déclinaiſon du centre de la Lune & de l'œil du Taureau, en ajoûtant 6 ſecondes à cauſe de l'accourciſſement des réfractions, parut de 4^d 47′ 30″3.

Le même jour M.r l'Abbé *de la Caille* obſerva au cap de Bonne-eſpérance la diſtance du bord auſtral de la Lune au zénit, de 55^d 47′ 7″8, le demi-diamètre à cette hauteur dût être de 16′ 54″ 8, la longitude de la Lune priſe des tables ♉ 27^d 1′ 3″, la latitude auſtrale 2^d 6′ 38″5, la déclinaiſon boréale 21^d 19′ 47″3; le changement de déclinaiſon eſt par conſéquent 50″7, qu'il faut retrancher de la diſtance obſervée au cap de Bonne-eſpérance pour l'avoir telle qu'elle eût été obſervée, ſi le Cap ſe fût trouvé ſous le méridien de Berlin; il en faut ſouſtraire encore une demi-ſeconde à cauſe de la diminution qu'auroit apporté à la parallaxe de hauteur cette augmentation de 50″7 dans la hauteur de la Lune, & la diſtance au zénit que l'on doit comparer à celle qui fut obſervée à Berlin, ſera 56^d 3′ 11″3. Comme Aldebaran eſt la principale étoile que j'aie obſervée ce jour-là, & qu'il eſt bon d'y comparer les deux obſervations, je choiſis celle du 27 Décembre, par laquelle M. de la Caille trouva la diſtance d'Aldebaran au zénit 49^d 53′ 14″4, dont il faut ôter une ſeconde pour l'effet de l'aberration; ainſi la différence en déclinaiſon de la Lune à l'étoile parut au Cap de 6^d 9′ 58″, à laquelle il faut ajoûter 15″5, & l'on aura 6^d 10′ 13″5 pour cette différence affectée ſeulement de la parallaxe, de ſorte enfin que l'effet total de la parallaxe ſur l'arc du méridien compris entre Berlin & le parallèle du cap de Bonne-eſpérance, fut ce jour-là 1^d 22′ 43″2. Lors de cette obſervation, la Lune s'eſt trouvée dans ſa plus petite diſtance, & nous donne la plus grande parallaxe aux environs du périgée & de la ſyzygie; mais les bords de la Lune étoient mal terminés, lors de l'obſervation faite au cap de Bonne-eſpérance.

Le 6 Décembre 1751, il étoit 16^h 2′ 43″ temps vrai, lorsque le centre de la Lune étant parvenu dans le méridien, le bord austral me parut à $41^d\ 15'\ 44''$ du zénit; or, à $16^h\ 5'$, la longitude de la Lune étoit ♌ $13^d\ 3'\ 6''5$, la latitude australe $4^d\ 56'\ 42''7$, la déclinaison boréale $12^d\ 10'\ 35''5$. Ce jour-là M. le Monnier observa à Paris le demi-diamètre de la Lune à $37\frac{1}{2}$ degrés de distance au zénit, $16'\ 17''75$; ce qui donne le demi-diamètre horizontal $16'\ 4''5$, le même que par les tables, & à la hauteur où la Lune paroissoit à Berlin, $16'\ 17''5$: employant la même observation *d'Aldebaran* que ci-dessus, & augmentant la différence de $7''5$ pour les réfractions, on a la différence du parallèle apparent de la Lune à celui de l'étoile $4^d\ 28'\ 12''$ à Berlin.

Le même jour, au cap de Bonne-espérance, le bord austral de la Lune parut à $46^d\ 33'\ 36''8$, la longitude de la Lune étant suivant les tables, ♌ $12^d\ 49'\ 48''5$, la latitude $4^d\ 56'\ 16''5$, la déclinaison $12^d\ 14'\ 40''5$; le changement de déclinaison par rapport à la différence des méridiens, est $3'\ 37''$ à soustraire, & la diminution de la parallaxe de $2''3$: le demi-diamètre qui répond à cette hauteur étoit $16'\ 15''9$; comparant donc la distance du centre de la Lune au zénit avec celle d'*Aldebaran* rapportée dans l'observation précédente, & ajoûtant 6 secondes afin que l'effet de la réfraction disparoisse, la différence en déclinaison de la Lune & de l'étoile est $3^d\ 6'\ 57''$, la parallaxe des deux observatoires est $1^d\ 21'\ 15''$.

La Lune avoit alors plus de huit signes d'anomalie, de sorte que cette observation donne la parallaxe près des moyennes distances.

Le 27 Décembre 1751, à $7^h\ 32'\ 0''$ à Berlin, le bord austral de la Lune parut à $38^d\ 32'\ 7''$; à ce moment les tables donnent la longitude de la Lune dans le Taureau $2^d\ 25'\ 43''5$, la latitude boréale $2^d\ 39'\ 37''$, la déclinaison boréale $14^d\ 49'\ 46''75$, le demi-diamètre horizontal $16'\ 21''5$, & l'augmentation qu'y produit la parallaxe à cette hauteur, $13''5$. J'observai aussi *Aldebaran* à

36d 31′ 23″ de distance au zénit: la différence, augmentée de 1″8 pour la réfraction, donne la vraie distance du parallèle apparent de la Lune à celui de l'étoile 1d 44′ 10″8. Le même bord de la Lune parut ce jour-là au cap de Bonne-espérance à 49d 11′ 22″ (j'ajoûte une minute à celle qui se trouve dans l'imprimé, pour les raisons que je dirai ci-après), & *Aldebaran* à 49d 53′ 14″4; les tables donnent la longitude de la Lune pour ce temps ♉ 2d 13′ 12″, la latitude 2d 40′ 39″75, la déclinaison 14d 46′ 24″,25; ajoûtant donc à la distance au zénit le demi-diamètre, le changement en déclinaison 3′ 22″5, l'augmentation de la parallaxe qui en dépend, 2″5, on trouve l'arc du méridien compris entre le centre de la Lune & l'étoile, par rapport au cap de Bonne-espérance, qui doit être augmenté de 0″75, & devient 21′ 55″5, de sorte que la parallaxe entre Berlin & le Cap pour ce jour-là, est 1d 22′ 15″3.

Le 28 Décembre, la distance du bord austral de la Lune au zénit étoit à Berlin à 8h 28′ 22″ de 34d 55′ 49″, & celle *d'Aldebaran* le même jour 36d 31′ 18″; on tire des tables astronomiques pour ce temps-là la longitude 17d 30′ 6″ dans le Taureau, la latitude boréale 1d 24′ 6″, la déclinaison 18d 25′ 21″; le diamètre de la Lune fut aussi observé ce jour-là à Paris à 59 degrés de hauteur, 33′ 26″, c'est-à-dire, le demi-diamètre horizontal 16′ 28″, & par conséquent 16′ 42″3 à la hauteur où il étoit vû à Berlin: employant 2″7 pour la réfraction, on trouve la différence en déclinaison du centre de la Lune & de l'étoile, 1d 52′ 14″. M. de la Caille observa aussi au Cap le même bord 52d 48′ 18″8: au moment de son observation la longitude de la Lune étoit de 17d 17′ 11″75 dans le Taureau, la latitude boréale 1d 25′ 13″5, la déclinaison boréale 18d 22′ 56″25, le demi-diamètre pour cette hauteur 16′ 37″9, déduit de l'observation: ajoûtant à la distance au zénit le changement de déclinaison, 2′ 24″8, & 1″5 pour l'augmentation de la parallaxe, & comparant cette somme à la distance d'*Aldebaran* au zénit, prise le jour précédent, $49^d\ 53'\ 14''4$, on aura un arc qui, augmenté de $7''2$ à cause des réfractions, devient $3^d\ 14'\ 16''$, & par conséquent la parallaxe des deux observatoires étoit alors $1^d\ 22'\ 2''$.

Le 30 Janvier 1752, la Lune qui depuis un mois entier ne s'étoit montrée qu'une seule fois, parut enfin au travers des nuages & des brouillards, assez pour pouvoir m'assurer que la distance du bord inférieur au zénit dans le moment de son passage par le méridien à $12^h\ 2'\ 27''$, étoit de $40^d\ 56'\ 37''$. Le diamètre fut observé à Paris $32'\ 59''$ à $52^d\frac{1}{2}$ de hauteur, de sorte que le demi-diamètre devoit être à Berlin, $16'\ 29''$ à la hauteur où la Lune fut observée; le lieu de la Lune selon les Tables étoit ♌ $12^d\ 31'\ 24''$, la latitude méridionale $4^d\ 45'\ 21''$, la déclinaison boréale $12^d\ 30'\ 14''$; mais le 24 Janvier la distance de δ du front du Taureau au zénit, avoit été observée de $35^d\ 34'\ 5''$: la différence de celle-ci à celle du centre de la Lune, étant augmentée de 7 secondes, donne la vraie distance des parallèles, affectée de la seule parallaxe, $5^d\ 6'\ 10''$.

Le même jour, l'étoile δ au front du Taureau avoit au Cap $50^d\ 50'\ 17''8$, & le bord boréal de la Lune $47^d\ 26'\ 49''$ de distance au zénit; alors la longitude de la Lune étoit ♌ $12^d\ 18'\ 47''75$, la latitude $4^d\ 45'\ 0''5$, la déclinaison $12^d\ 34'\ 1''3$; le demi-diamètre à cette hauteur, déduit de l'observation faite à Paris, $16'\ 27''6$; le changement en déclinaison à soustraire, $3'\ 47''3$, de même que l'augmentation de la parallaxe, $2''5$, & $7''5$ pour faire évanouir l'effet des réfractions: d'où résulte pour la vraie différence en déclinaison du centre de la Lune à l'étoile, $3^d\ 43'\ 53''7$, & pour l'effet total de la parallaxe sur la soustendante de l'arc compris entre Berlin & le cap de Bonne-espérance, $1^d\ 22'\ 16''3$. On peut employer aussi pour y comparer la Lune, les distances de ζ du Taureau au zénit, observées en même temps le 23 Février à Berlin, $31^d\ 32'\ 39''$, & $54^d\ 51'\ 41''3$ au Cap, & on trouvera le même résultat. Cette observation est marquée dans M. l'Abbé de la Caille comme étant moins parfaite que les autres.

Le 31 Janvier 1752, à $12^h\ 55'\ 21''$ (on a mis par erreur $57'\ 21''$ dans les Mémoires de 1751) de temps vrai à Berlin, la distance du bord austral de la Lune au zénit étoit $45^d\ 49'\ 1''$; les Tables astronomiques donnent à $12^h\ 55'\ 9''$, le lieu de la Lune ♌ $27^d\ 26'\ 6''$, la latitude australe $5^d\ 0'\ 49''$, la déclinaison boréale $7^d\ 40'\ 3''$, & le demi-diamètre apparent $16'\ 19''5$.

La distance de Procyon au zénit, observée le 9 Février suivant, étoit $46^d\ 39'\ 51''$; la distance de la Lune au parallèle de l'étoile étoit donc de $1^d\ 7'\ 11''6$, après y avoir ajoûté $2''1$ pour la différence des réfractions. Le bord supérieur de la Lune fut aussi observé au Cap le 31 Janvier, à $42^d\ 0'\ 54''6$, la Lune étant dans le méridien; alors sa longitude étoit de $27^d\ 13'\ 55''$ dans le Lion, sa latitude méridionale $5^d\ 0'\ 45''\frac{1}{2}$, sa déclinaison $7^d\ 44'\ 12''75$: soustrayant $4'\ 7''1$ pour le changement en déclinaison, & $2''9$ pour la diminution de la parallaxe, ajoûtant $16'\ 20''$ pour le demi-diamètre apparent, on aura $42^d\ 13'\ 4''6$ pour le centre de la Lune: réduisant la hauteur de Procyon, observée le 4 Janvier, à ce qu'elle a dû paroître le 9 Février, lorsqu'elle fut observée à Berlin, elle se trouve de $39^d\ 44'\ 38''$; employant $3''2$ pour la réfraction qui accourcit les distances apparentes, on a la différence en déclinaison $2^d\ 28'\ 29''8$, & par conséquent la parallaxe des observatoires $1^d\ 21'\ 18''2$.

On trouvera $1^d\ 21'\ 30''3$ pour la quantité de cette parallaxe, si l'on compare la Lune à *Regulus,* en employant les distances au zénit, qui en furent observées en même temps le 26 Février au Cap, $47^d\ 3'\ 53''6$, & à Berlin $39^d\ 20'\ 23''$. Je crois cette détermination préférable.

Le 23 Février 1752, à $6^h\ 55'\ 45''$, temps vrai, j'observai la distance du bord inférieur de la Lune au zénit, $32^d\ 4'\ 8''$, & un moment après celle de ζ du Taureau $31^d\ 32'\ 39''$; or, à $6^h\ 55'\ 35''$, la longitude de la Lune étoit ♊ $21^d\ 4'\ 21''2$, la latitude méridionale $1^d\ 56'\ 31''5$,
la

la déclinaiſon boréale 21^d $14'$ $5''$: le diamètre de la Lune fut auſſi obſervé à Paris par M. le Monnier, $32'$ $56''5$, à 22 degrés de diſtance au zénit, de ſorte que le demi-diamètre apparent de la Lune au temps de mon obſervation à Berlin, devoit être de $16'$ $27''7$; ainſi le centre de la Lune parut à $15'$ $1''8$, au ſud de l'étoile.

M. de la Caille obſerva de même le bord auſtral de la Lune 55^d $40'$ $31''$, & la diſtance de l'étoile au zénit 54^d $51'$ $41''3$: alors la Lune ſe trouvoit, ſelon les Tables, dans les Gémeaux 20^d $52'$ $0''$, à 1^d $55'$ $31''\frac{1}{2}$ de latitude méridionale, & par conſéquent à 21^d $14'$ $15''3$ de déclinaiſon ſeptentrionale; ainſi il y a $10''3$ ſeulement à ſouſtraire pour le changement de déclinaiſon, $16'$ $23''$ à ajoûter pour le demi-diamètre à la hauteur où la Lune parut au cap de Bonne-eſpérance, 3 ſecondes à employer pour la différence des réfractions; d'où réſulte que le centre de la Lune parut au nord de l'étoile de 1^d $5'$ $4''$: ajoûtant donc ces deux diſtances, on a la parallaxe par cette obſervation, 1^d $20'$ $7''2$, pour la diſtance des deux obſervatoires. Cette obſervation eſt marquée douteuſe au cap de Bonne-eſpérance.

Le 26 Février, à 9^h $49'$ $40''$ à Berlin, le centre de la Lune étant dans le méridien, le bord boréal parut à 38^d $27'$ $46''$ du zénit; le lieu de la Lune, pris des Tables de M. Halley, fut alors ♌ 5^d $38'$ $49''$, la latitude auſtrale 4^d $37'$ $48''$, & par conſéquent la déclinaiſon boréale 14^d $23'$ $39''5$, le diamètre horizontal $32'$ $21''5$, & le demi-diamètre, à la hauteur où il étoit vû à Berlin, $16'$ $24''25$; ainſi le centre de la Lune étoit à 38^d $44'$ $10''25$. La diſtance au zénit de Régulus, le même jour, me parut de 39^d $20'$ $23''$, & par conſéquent la différence, en prenant une ſeconde pour la réfraction, étoit 0^d $36'$ $13''75$.

Le même jour au cap de Bonne-eſpérance, par l'obſervation faite dans le méridien, la diſtance du bord inférieur de la Lune au zénit fut de 49^d $21'$ $18''7$, & celle du cœur du Lion de 47^d $3'$ $53''6$; au moment de l'obſervation de la Lune, elle étoit, ſelon les Tables, dans le Lion de 5^d $26'$ $30''$, avec une latitude boréale de $4^d\ 37'\ 22''75$, & une déclinaiſon boréale de $14^d\ 27'\ 0''$; le demi-diamètre à cette hauteur devoit être de $16'\ 22''$; le changement de déclinaiſon eſt de $3'\ 20''$ à ſouſtraire de la diſtance au zénit, auſſi-bien que la diminution de la parallaxe $2''2$, & la réfraction $4''$. Le réſultat de tous ces élémens donne la différence des parallèles du centre de la Lune & de l'étoile, au cap de Bonne-eſpérance, $1^d\ 57'\ 44''4$, & l'effet total de la parallaxe qui répond à notre baſe, $1^d\ 21'\ 30''7$. Cette obſervation eſt douteuſe au cap de Bonne-eſpérance.

Je remarquerai ici qu'il s'étoit gliſſé dans les obſervations de M. de la Caille, imprimées en ſon abſence *(Mémoires de l'Acad. année 1748)* quelques fautes d'impreſſion que j'ai corrigées à meſure que je les ai remarquées : dans l'obſervation du 27 Décembre, j'ai ſubſtitué $49^d\ 11'\ 22''$, à $49^d\ 10'\ 22''$, parce qu'il y avoit manifeſtement une différence d'une minute, que j'aurois imputée à mon obſervation, ſi celle que M. Kies fit en même temps avec un petit quart-de-cercle, & qu'il me communiqua auſſi-tôt, ne m'avoit raſſuré là-deſſus. Les autres ſont plus faciles à entrevoir : le 6 Décembre, il faut lire 33 minutes au lieu de 38 minutes; le 2[illegible] Décembre, j'ai ſubſtitué 48 minutes au nombre 58 minutes; le 31 Janvier, 0 minute au lieu de 10 minutes; le 23 Février, 40 minutes au lieu de 20, & le 26 Février $53''6$ au lieu de $5''36$.

Je crois être entré dans tout le détail que la comparaiſon de ces obſervations pouvoit exiger, pour déterminer l'angle ſous lequel a dû paroître chaque fois la ligne droite compriſe entre Berlin & le Cap, vûe du centre de la Lune; il s'agit actuellement d'en déduire la parallaxe horizontale.

Suivant la méthode ordinaire, en ſuppoſant la Terre ſphérique & les directions de la gravité perpendiculaires dans tous les points de ſa ſurface, il ſuffiroit de diviſer la parallaxe des deux Obſervatoires, ou la valeur de l'angle à la Lune que nous venons de trouver, par la ſomme des ſinus des diſtances apparentes au zénit, pour avoir la parallaxe horizontale.

Car nommant a l'angle à la Lune que l'on veut diviser en deux parties, dont les sinus aient le même rapport que les sinus des distances au zénit observées de part & d'autre, nommant x & y les sinus de ces deux parties, & b, c, les sinus de ces distances au zénit, on auroit $y = \frac{ac}{b+c}$ $x = \frac{ab}{b+c}$; alors $b + c : x + y =$ sin. tot. : sin. paral. hor. c'est-à-dire, la somme des sinus des deux petits angles est à la somme des sinus des distances apparentes au zénit dans les deux observatoires, comme la parallaxe horizontale est au rayon : or les petits arcs se peuvent prendre pour leurs sinus; donc il suffiroit de diviser par la somme des sinus des distances apparentes au zénit, l'angle à la Lune que nous avons calculé ci-dessus.

Mais, comme on le voit du premier coup d'œil, ce calcul suppose que la parallaxe horizontale ait pour base des rayons égaux dans tous les points de la Terre, ce qui ne sauroit avoir lieu pour peu qu'elle diffère de la figure circulaire.

Pour pouvoir donc faire entrer dans le calcul des parallaxes la considération de cette différence, au moyen de la mesure connue des degrés de la Terre & de la quantité de son aplatissement, je supposerai d'abord avec M. Newton, que les méridiens de la Terre sont d'une figure approchante de l'ellipse, & telle, que les accroissemens des degrés, en allant de l'Equateur vers les Poles, soient comme les quarrés des sinus des latitudes.

Je prendrai aussi pour la quantité de son aplatissement la fraction $\frac{1}{179}$, pour les raisons que l'on verra ci-après, c'est-à-dire que je supposerai le rapport de CM à CE, égal à celui de 178 à 179, le premier degré de latitude étant supposé aussi de 56757 toises. Fig. 1.

Si l'on divise par 180, le rapport du diamètre à la circonférence, qui est $\frac{1}{3.14159265}$, le logarithme du rapport du degré à son rayon étant 8.2418773676, on trouve le rayon du premier degré de latitude 3251936 toises. Il est inutile de remarquer que le rayon du cercle osculateur est confondu assez sensiblement avec la courbe dans l'espace d'un degré, pour qu'il n'y ait dans cette pratique aucune erreur ; cela est évident, parce que les degrés de la Terre croissent si lentement, que de l'un à l'autre la différence ne va jamais qu'à 14 toises, & cela seulement vers le 45.e degré

Fig. 1. de latitude. Soit un méridien de la Terre, représenté par la courbe à peu près elliptique $WMEC$, soit M le Pole boréal, & E le point qui est dans l'Equateur, Eq le degré du méridien mesuré vers l'Equateur, c'est-à-dire, un arc de cercle qui à cause de son extrême petitesse se confond avec l'ellipse, puisqu'en effet la différence n'est pas sensible en supposant même l'arc Eq de plusieurs degrés ; ayant la grandeur du degré, on aura, comme on vient de le voir, la grandeur du rayon de ce degré ; c'est-à-dire, la ligne ED : de même, par le moyen du degré mesuré en Lapponie, on aura un autre rayon plus grand ; tous ces rayons forment évidemment la courbe DIG, qu'on nomme la développée, qui est telle, que si on plie dans sa circonférence un fil $EDIG$, son extrémité E décrira la courbe EBM si on vient à le développer. Puisque les arcs infiniment petits, Eq & Mp, que décrira ce fil dans les points E & M, auront pour rayons les mêmes lignes ED, MG, on voit du premier coup d'œil, que l'arc DI de la développée est égal à la différence des rayons osculateurs ED & MG qui la touchent. Connoissant donc les arcs de la développée, nous allons en déduire, suivant la méthode que M. Bouguer emploie dans son Livre de la figure de la Terre, les dimensions du méridien; mais comme les formules de M. Bouguer sont générales, & par conséquent plus composées, je donnerai la voie la plus simple de trouver les intégrales qu'on cherche dans les deux cas particuliers que j'examinerai.

Fig. 2. On prendra la ligne droite DG, égale à la développée DG, du quart d'ellipse, aux points I, E, connus par les mesures des degrés; on élevera des perpendiculaires IN,

EK, égales au finus de la latitude; dans le petit triangle fIg, l'angle g, égal à l'angle K, eft égal à la latitude du point B de la Terre; donc le rayon eft à gI, comme le finus de la latitude eft à If, donc $If = Ig$. fin. lat. donc la différentielle fI de l'abfciffe Dh, eft proportionnelle au rectangle $IgrN$ de la figure 2. Fig. 1.

Si au même point I, on élève une perpendiculaire IT, égale au cofinus de la latitude, on verra que le petit rectangle $Igts$, eft proportionnel à la différentielle gf, de l'ordonnée Ih, puifque $gI : fg, =$ rayon : fin. gIf, ou cofinus de la latitude. Soit 1 le rayon du cercle, s le finus de la latitude du point B, $\sqrt{(1 - s^2)}$ fera le cofinus, u l'arc DI de la développée; & comme nous fuppofons les accroiffemens des degrés ou des rayons, proportionnels aux quarrés des finus des latitudes, nous aurons en exprimant cette proportion analytiquement $u = s^2$, puifque les arcs u ne font autre chofe que les différences mêmes des rayons ofculateurs. Si on prend la différentielle, on aura $du = Ig = 2sds$, le rectangle $INrg = 2s^2ds$, le rectangle $Igts = 2s\sqrt{(1 - ss)}\,ds$, l'intégrale de $2s^2ds$ donnera l'abfciffe Dh, & l'intégrale de $2s\sqrt{(1 - ss)}\,ds$ fera l'ordonnée Ih. La première de ces deux intégrales fe trouve par la règle la plus élémentaire du calcul différentiel, en augmentant d'un l'expofant de s, qui deviendra trois; & divifant par $3ds$, elle fera donc $\frac{2}{3}s^3$: on fera $s = 1$, pour avoir l'abfciffe entière $DQ = \frac{2}{3}$, c'eft-à-dire, que cette abfciffe DQ eft les deux tiers de la courbe DIG. Fig. 2. Fig. 1.

Pour avoir l'intégrale de $2s\sqrt{(1 - ss)}\,ds$, il faut avoir recours à la méthode fuivante, parce qu'on ne fauroit intégrer des formules irrationnelles par la règle générale, fans les transformer en des quantités rationnelles.

Je fais $\sqrt{(1 - ss)} = z$, donc $1 - ss = zz$, $2zdz = -2sds$; changeant les fignes, & prenant l'intégrale, j'ai $\int 2sds = -\frac{2}{3}z^3 = -\frac{2}{3}(1 - ss)\sqrt{(1 - ss)}$, en substituant à la place de zz & de z, leurs valeurs $1 - ss$ & $\sqrt{(1 - ss)}$. Pour compléter l'intégrale, il faut faire $s = 0$, la formule deviendra $- \frac{2}{3}$; c'est la quantité qu'il faut soustraire de l'intégrale pour la rendre complète, on a donc $- \frac{2}{3} (1 - ss) \sqrt{(1 - ss)} + \frac{2}{3}$, & faisant $s =$ au rayon $= 1$, reste $+ \frac{2}{3}$; ce qui prouve que l'ordonnée QG est aussi les $\frac{2}{3}$ de la courbe, égale par conséquent à l'abscisse QD. Pour avoir la tangente HK, je considère que dans le triangle rectiligne $HI\Delta$ le sinus de $IH\Delta$ ou cosinus de la latitude du point I, est au rayon, comme $I\Delta$ égal à DC moins l'ordonnée hI, est à IH, $\sqrt{(1 - ss)} : 1 = \frac{2}{3} (1 - ss) \sqrt{(1 - ss)} : \frac{2}{3} (1 - ss)$, ou $\frac{2}{3} (1 - u)$, c'est-à-dire que la tangente zG dans tous les points de la courbe, est égale aux deux tiers de GI. Pour avoir de même la partie IK de la tangente, je prends le triangle IKk dans lequel le sinus de l'angle K, est au sinus total, comme Ik ou hD est à IK, c'est-à-dire, $s : 1 = \frac{2s^3}{3} : \frac{2}{3} s^2$ ou $\frac{2}{3} u$: cette partie IK de la tangente est donc égale aux deux tiers de la portion de courbe DI; ainsi la tangente entière KH, sera les deux tiers de la développée entière DIG, & égale à DC & à GC.

La courbe DIG étant développée à commencer par le point D, décrira la courbe DON, dans laquelle on voit que les parties coupées DE, OB, NM, sont égales au rayon du premier degré. Pour trouver la partie interceptée KO de la normale HB, il faut remarquer que $CN = GN - GC = GD - \frac{2}{3} GD$, est un tiers de la courbe GD, & que par conséquent il suffira de dire, le quarré du sinus total est à CN, comme le quarré du sinus de la latitude du point B ou I, eſt à KO: il ſuffira donc d'ajoûter le logarithme conſtant 42641682 au double du logarithme du ſinus de la latitude, pour avoir le logarithme de KO: ſi l'on ajoûte KO, KH & OB, on aura la valeur de BH; & dans le triangle BPH, l'angle H étant égal au complément de la latitude du point B, on trouvera BP & PH, parce que l'angle BHP eſt égal au complément de la latitude; la partie CH que l'on doit en ſouſtraire, eſt donnée par le triangle KCH, dont on connoît KH & l'angle KHC: enfin le triangle BCP donnera de même la valeur de l'angle BCP & du rayon BC, qui marque la diſtance au véritable centre de la Terre.

C'eſt ainſi que j'ai calculé pour la latitude de Berlin & pour celle du cap de Bonne-eſpérance, c'eſt-à-dire, $52^d\ 31'\ 13''$ & $33^d\ 55'\ 12''$, les rayons BC & Cc 3277160 toiſes & 3283003 toiſes; l'angle BCE, $52^d\ 12'\ 36''\frac{1}{4}$; l'angle cCE, $33^d\ 37'\ 23''$; CM, 3270308: par-là il eſt facile de connoître la ſoûtendante cB qui ſépare les parallèles des deux obſervatoires; elle ſe trouve ici répondre au logarithme 66510189, c'eſt-à-dire, environ 4477328 toiſes, BcC $47^d\ 1'\ 42''7$, & CBc $47^d\ 8'\ 18''$.

Connoiſſant la baſe à laquelle répondent les parallaxes obſervées, il a été facile de parvenir à la diſtance de la Lune au centre de la Terre.

En effet, prenant le ſupplément LBH de la diſtance de la Lune au zénit, obſervée à Berlin, & en ôtant l'angle $cBH\ (= cBC + CBP - HBP)$, on connoîtra dans le triangle LBc, tous les angles, ſavoir, LBc par l'opération précédente, & cLB qui eſt la parallaxe des deux obſervatoires: on aura de plus un côté Bc, d'où l'on conclurra Lc; dans le triangle LcC, connoiſſant les côtés Lc, Cc, & l'angle compris, on aura la diſtance de la Lune LC.

Comme il ſuffit de connoître la parallaxe horizontale qui répond à l'Equateur, puiſqu'étant la plus grande de toutes, c'eſt à celle-là qu'on rapporte toutes les autres, en diviſant le rayon de l'Equateur par la diſtance de la Lune au centre de la Terre, on aura le ſinus de la parallaxe cherchée. Le logarithme du rayon de l'Equateur eſt 65170217.

Par l'obſervation du 3 Décembre 1751.

La diſtance de la Lune au zénit de Berlin, corrigée par la réfraction	31ᵈ 44′ 31″
La parallaxe des deux obſervatoires	1. 22. 43,2
Le logarithme de la diſtance de la Lune au centre de la Terre, exprimée en toiſes	82653718
La parallaxe horizontale qui répond au rayon de l'Equateur	1. 1. 22,1

Par l'obſervation du 6 Décembre.

Diſtance du centre de la Lune au zénit	41. 0. 13,5
Parallaxe des deux obſervatoires	1. 21. 15
Logarithme de la diſtance de la Lune	82823867
Parallaxe horizontale ſous l'Equateur	0. 59. 0,6

Par l'obſervation du 27 Décembre.

Diſtance du centre de la Lune au zénit	38. 16. 14,5
Parallaxe des deux obſervatoires	1. 22. 15,3
Logarithme de la diſtance de la Lune	82753494
Parallaxe horizontale ſous l'Equateur	0. 59. 58,5

Par l'obſervation du 28 Décembre.

Diſtance du centre de la Lune au zénit	34. 39. 44
Parallaxe des deux obſervatoires	1. 22. 2
Logarithme de la diſtance de la Lune	82714521
Parallaxe horizontale ſous l'Equateur	1. 0. 31

Par l'obſervation du 30 Janvier 1752.

Diſtance du centre de la Lune au zénit	40. 40. 55
Parallaxe des deux obſervatoires	1. 22. 16,3
Logarithme de la diſtance de la Lune	82769219
Parallaxe horizontale ſous l'Equateur	0. 59. 45,46

Par

Par l'observation du 31 Janvier 1752.

Distance du centre de la Lune au zénit	45^d 33' 36"5
Parallaxe des deux observatoires.	1. 21. 30,3
Logarithme de la distance de la Lune à la Terre.	828138 47
Parallaxe horizontale sous l'E'quateur	0. 59. 8,8

Par l'observation du 23 Février 1752.

Distance de la Lune au zénit, observée à Berlin...	31. 48. 13
Parallaxe des deux observatoires	1. 20. 6,5
Logarithme de la distance de la Lune, en toises...	82792776
Parallaxe horizontale sous l'E'quateur	0. 59. 26,1

Par l'observation du 26 Février.

Distance de la Lune au zénit, à Berlin	38. 44. 58,7
Parallaxe entre Berlin & le Cap, observée.	1. 21. 30,7
Logarithme de la distance de la Lune	82798185
Parallaxe horizontale sous l'E'quateur	0. 59. 21,64

Pour connoître maintenant l'erreur des tables astronomiques par chacune de ces observations, il n'y a qu'à jeter les yeux sur la table suivante, où j'ai pris pour exemple les tables de M. Halley, comme les dernières qui aient été publiées, & où j'ai marqué la petite quantité dont elles s'écartent de l'observation en défaut.

	Paral. des Tables.	*Diam. horiz.*	*Err. des Tab.*
Le 3 Décembre 1751...	60' 52"	33' 28"	30"10
Le 6 Décembre 1751...	58. 28,66	32. 10	31,94
Le 27 Décembre 1751...	59. 28	32. 42	30,50
Le 28 Décembre 1751...	59. 49	32. 54	42,00
Le 30 Janvier 1752...	59. 19,50	32. 38	25,96
Le 31 Janvier 1752...	58. 39,25	32. 15	29,55
Le 23 Février 1752...	58. 55,33	32. 24	30,77
Le 26 Février 1752...	58. 49,50	32. 21	32,14

J'y ai joint le diamètre horizontal tiré des tables, pour servir à déterminer la véritable grandeur de la Lune.

Au reſte, il eſt eſſentiel de remarquer que ces erreurs, qui ne ſont pas par elles-mêmes extrêmement conſidérables, ſeroient d'environ $12''\frac{1}{2}$ plus petites, ſi au lieu d'employer la parallaxe horizontale ſous l'Equateur, j'euſſe comparé avec les tables celle qui répond à la latitude de Berlin, & de 20 ſecondes auſſi plus petites ſi j'euſſe pris la parallaxe ſous le Pole.

Après avoir ainſi appliqué à la Terre elliptique les obſervations de la parallaxe, j'ai voulu conſidérer auſſi la Terre dans l'hypothèſe qu'a adoptée M. Bouguer, ſuivant laquelle les accroiſſemens des degrés du méridien ſont comme les quatrièmes puiſſances des ſinus des latitudes, ſuppoſant pour les trois degrés meſurés ſous les latitudes de 0^d, $49^d\frac{2}{5}$, $66^d\frac{1}{3}$, 56753 toiſes, 57074, 57422. Dans cette hypothèſe le dernier degré de latitude ſous le Pole ſe déduit des deux premiers, en diſant : la quatrième puiſſance du ſinus de la latitude, $49^d\frac{2}{5}$, eſt à la quatrième puiſſance du rayon, comme la différence des deux degrés, qui eſt 321 toiſes, eſt à la différence du dernier degré au premier, 967 toiſes, qui étant ôtées du premier degré, donnent le dernier de 57720 toiſes ; mais ſi on le cherche de même par la comparaiſon du premier degré, à celui qui répond à la latitude de $66^d\frac{1}{3}$, on trouve 57704. La différence de ces deux réſultats vient de ce que ce n'eſt pas exactement, mais ſeulement à peu près la quatrième puiſſance : en prenant un milieu, on peut donc le ſuppoſer 57712 toiſes, auquel répond un rayon oſculateur de 3306654 toiſes, repréſenté

Fig. 1. par GM. Le rayon oſculateur ED qui répond au premier degré étant 3251707, la longueur totale de la développée DG, ou de la ligne GN, eſt de 54947 toiſes. Pour avoir les dimenſions du méridien dans cette nouvelle hypothèſe, il faut prendre $u = s^4$; ainſi l'on aura l'élément de l'abſciſſe Dh $4s^4 ds$, celui de l'ordonnée Ih ſera $4s^3 \sqrt{(1 - ss)}\, ds$; la première intégrale eſt $\frac{4}{5} s^5$; la ſeconde ſe trouvera par la même méthode que ci-deſſus, en faiſant $\sqrt{(1 - ss)} = z$, alors

$$1 - ss, = zz,\ ds = \frac{zdz}{-\sqrt{(1 - zz)}},\ 4s^3 = 4(1 - zz)$$

$\sqrt{(1 - zz)}$, $4s^3 ds \sqrt{(1 - ss)} = - 4z^2 dz(1 - zz)$ $= 4z^4 dz - 4z^2 dz$, dont l'intégrale est $\frac{4}{5} z^5 - \frac{4}{3} z^3$, $= \frac{4}{5}(1 - ss)^2 \sqrt{(1 - ss)} - \frac{4}{3}(1 - ss)\sqrt{(1 - ss)}$ $+ \frac{8}{15}$, en substituant pour z sa valeur, & en complétant l'intégrale. Si on fait $s = 1$, on aura l'abscisse entière DQ, égale à $\frac{4}{5}$, & l'ordonnée GQ égale à $\frac{8}{15}$ de la développée.

Pour avoir la tangente HK, on dira : dans le triangle $HI\Delta$, le sinus de l'angle $IH\Delta$, égal au cosinus de la latitude, est au rayon, comme $I\Delta = QG - hI$, est à HI, ou $\sqrt{(1 - ss)} : 1 = - \frac{4}{5}(1 - ss)^2$ $\sqrt{(1 - ss)} + \frac{4}{3}(1 - ss)\sqrt{(1 - ss)} : \frac{8}{15} - \frac{4}{15} ss$ $+ \frac{4}{5} s^4$; & pour avoir la portion IK, on dira : dans le triangle IKk, le sinus de l'angle IKk égal à la latitude, est à l'abscisse hD ou Ik, comme le rayon est à IK, s $: 1 = \frac{4}{5} s^5 : \frac{4}{5} s^4$; ainsi la tangente entière est $\frac{8}{15} - \frac{4}{15} ss$. Puisque $GC = \frac{4}{5}$ de GID ou de GN, donc $CN = \frac{1}{5}$, de la développée; ainsi la partie Ko, du rayon osculateur en un point B, se trouvera en disant : la quatrième puissance du sinus total est à un cinquième de la développée, comme la quatrième puissance du sinus de la latitude du point B, est à KO; ainsi le logarithme d'un cinquième de la développée sera un logarithme constant, additif au quadruple du logarithme du sinus de la latitude, pour avoir le logarithme de KO; ce logarithme constant est 40409740. Quant à la partie KH, qui est la tangente de la courbe, elle est composée de deux termes, comme on vient de le dire, l'un constant, qui est égal aux $\frac{8}{15}$ de la développée, 29306 toises, ou 29305, l'autre qui se trouve en multipliant les $\frac{4}{15}$ de la développée par le quarré du sinus de la latitude; ainsi le logarithme de $\frac{4}{15}$ ajoûté à celui de 54947, formera aussi un logarithme constant 41659127. La valeur de la tangente ajoûtée à la partie $KO + ED$, $(= OB)$, donne la ligne totale HB, dont on déduira, comme dans l'hypothèse précédente, les distances de Berlin & du cap de Bonne-espérance entre eux, & leurs distances au centre de la Terre : l'on aura pour cette fois l'angle BCE, $52^d\ 11'\ 39''\frac{1}{2}$, plus petit de $56''\frac{3}{4}$, que dans la première hypothèse; l'angle cCE, $33^d\ 38'\ 44''\frac{1}{2}$, plus grand de $1'\ 21''\frac{1}{2}$, que dans l'autre hypothèse; la distance CB de Berlin au centre de la Terre 3270385 toises, la distance cC du cap de Bonne-espérance au même centre, 3276130, & la soûtendante Bc comprise entre les parallèles de Berlin & du Cap, 4458025 toises; l'angle CBc, $47^d\ 8'\ 2''\frac{2}{3}$, & CcB, $47^d\ 1'\ 33''\frac{1}{3}$.

C'est sur ce même principe que j'avois calculé en 1751, conjointement avec M. de l'Isle, la Table suivante, où l'on voit pour chaque latitude de dix en dix degrés, l'angle CBH de la verticale avec le rayon mené au centre, la distance CB au centre de la Terre, & la parallaxe qui y correspond; en la supposant de 62 minutes sous l'Equateur.

Degrés de latitude.	*Angle CB H.*		*Parallaxe horiz.*		*Rayons Cc, CE, CB, CM.*
0^d	0^d	$0'$	$62'$	$0''$	3281013.
10	5.	20	61.	59	3280572.
20	10.	27	61.	58	3279263.
30	14.	58	61.	56	3277155.
40	18.	17	61.	52	3274377.
50	19.	37	61.	49	3271202.
60	18.	22	61.	45	3268017.
70	14.	18	61.	42	3265252.
80	7.	50	61.	40	3263396.
90	0.	0	61.	39	3262688.

Sur ces élémens, j'ai fait par la même méthode que j'ai indiquée ci-dessus, le calcul des mêmes observations pour en déduire la parallaxe horizontale sous l'Equateur: j'y ai joint encore la parallaxe qui répond à la latitude de Berlin, parce qu'il semble que ce soit à cette latitude, ou à peu près, que se doivent rapporter les parallaxes que nous donnent les tables.

Au reste, le rapport de la parallaxe sous l'Equateur à la parallaxe pour Berlin, est exprimé par le logarithme constant 999859 10, qui peut servir à les réduire l'une à l'autre.

Le 3 Décembre 1751.

Parallaxe horizontale sous l'Equateur	1d	1'	29"2
Erreur des Tables			37,2
Parallaxe horizontale à Berlin	1.	1.	17,6

Le 6 Décembre 1751.

Parallaxe horizontale sous l'Equateur	0.	59.	7,7
Erreur des Tables			39
Parallaxe horizontale à Berlin	0.	58.	56,1

Le 27 Décembre 1751.

Parallaxe horizontale sous l'Equateur	1.	0.	5,6
Erreur des Tables			37,6
Parallaxe horizontale à Berlin	0.	59.	54

Le 28 Décembre 1751.

Parallaxe horizontale sous l'Equateur	1.	0.	38,1
Erreur des Tables			49,1
Parallaxe horizontale à Berlin	1.	0.	26,5

Le 30 Janvier 1752.

Parallaxe horizontale sous l'Equateur	0.	59.	52,5
Erreur des Tables			33
Parallaxe horizontale à Berlin	0.	59.	41

Le 31 Janvier 1752.

Parallaxe horizontale sous l'Equateur	0.	59.	15,9
Erreur des Tables			36,7
Parallaxe horizontale à Berlin	0.	59.	4,3

Le 23 Février 1752.

Parallaxe horizontale sous l'Equateur	0.	59.	33,2
Erreur des Tables			37,9
Parallaxe horizontale à Berlin	0.	59.	21,6

Le 26 Février 1752.

Parallaxe horizontale sous l'Equateur	0.	59	28,6
Erreur des Tables			39,1
Parallaxe horizontale à Berlin	0.	59.	17,0

La première des deux hypothèses de la figure de la Terre que je viens d'appliquer aux parallaxes de la Lune, paroît plus simple; la seconde satisfait mieux aux trois degrés mesurés, en les renfermant sous une loi uniforme; & quoiqu'on doive douter si cette loi a lieu dans la Nature, je me suis convaincu d'ailleurs que les résultats que je viens d'en déduire, étoient les meilleurs.

On peut limiter les trois mesures que nous avons des degrés de la Terre, de manière qu'elles suivent dans leurs différences, le progrès des quarrés des sinus des latitudes, pourvû que dans les corrections que l'on y fera, on n'excède pas les bornes des erreurs moralement possibles dans la pratique.

Il me paroît d'abord naturel de supposer dans les mesures faites au Pérou, une erreur qui ne soit que le tiers de celle que je supposerai dans le degré de Lapponie & dans celui de Paris à Amiens, puisque dans ces deux derniers on n'a mesuré qu'une amplitude d'un degré, tandis qu'au Pérou l'arc se trouve de trois degrés, & mesuré avec différens instrumens.

D'un autre côté je considère que l'on a toûjours regardé comme absolument possible, une erreur de 4 ou 5 secondes prise pour la somme des erreurs inévitables dans la mesure astronomique & dans la mesure géodésique de l'arc: j'ai donc cru pouvoir tenter d'ajoûter 77 toises au degré entre Paris & Amiens, retrancher la même quantité du degré de Lapponie, & ôter 26 toises du degré mesuré sous l'Equateur, de manière que nous ayons pour les trois degrés mesurés, 56727, 57151, 57345.

Si cette correction n'étoit en soi exorbitante, elle acquerroit un degré de vrai-semblance, de ce que la quantité qu'elle produit pour l'aplatissement de la Terre, est assez conforme à celle que M. Newton avoit autrefois déduite de sa théorie & de quelques expériences.

Quoi qu'il en soit, pour entrer dans l'examen de cette nouvelle hypothèse, on trouve par la proportion des quarrés des sinus, le dernier degré de latitude d'environ 57463 toises;

on a le rayon du premier degré de latitude *ED*, 3250217; le rayon *GM* du dernier degré, 3292387; de sorte que l'arc total *DIG* de la développée est 42170 toises, *GC* ou *DC* 28113 $\frac{1}{3}$ toises, le demi-axe 3264273 $\frac{2}{3}$, le demi-diamètre *EQ* de l'Equateur 3278330 $\frac{1}{3}$; le rapport de ces deux quantités est exprimé par la fraction $\frac{1}{1,043}$.

Si on veut avoir ce rapport exprimé en nombres qui ne diffèrent que de l'unité, il ne faut que chercher dans la colonne des différences des logarithmes des nombres naturels, celle qui est égale au logarithme du dénominateur de cette fraction; on la trouve à peu près entre 232 & 233, de sorte que ces deux nombres expriment aussi le rapport du diamètre de l'Equateur à l'axe de la Terre, que Newton établissoit de 229 à 230. Le logarithme de *CN*, (ou $\frac{1}{3}$ *DG*), 4147 8823, sert à trouver, comme dans notre première hypothèse, la partie *KO*, qui répond à la latitude de Berlin, & celle qui répond à la latitude du Cap, d'où j'ai déduit par la même méthode *BH* 3287183^t, *BC* 3269507, *cR* 3282708, *Cc* 3273981, l'angle *BCE* 52^d 16′ 56″ $\frac{1}{2}$, l'angle *cCE* 33^d 41′ 32″, la base *Bc* 4461585, qui surpasse de 3560 toises celle qui a été trouvée dans la seconde hypothèse, mais qui est plus petite de 15743 toises que celle que donnoit l'ellipse de la première hypothèse.

Le calcul fait d'après ces élémens, m'a fourni pour la parallaxe & pour la distance de la Lune, la Table suivante.

Le 3 Décembre 1751.

Parallaxe horizontale sous l'Equateur.	1^d	1′	23″,5
Erreur des Tables, en défaut			31,5
Parallaxe horizontale à la latitude de Berlin.	1.	1.	13,8

Le 6 Décembre 1751.

Parallaxe horizontale sous l'Equateur.	0.	59.	2
Erreur des Tables			33,3
Parallaxe horizontale pour Berlin.	0.	58.	52,3

Le 27 Décembre 1751.

Parallaxe horizontale sous l'Equateur.	0.	59.	59,9

Erreur des Tables			31"9
Parallaxe horizontale sur le parallèle de Berlin	0d	59'	50,2

Le 28 Décembre 1751.

Parallaxe horizontale sous l'Equateur.	1.	0.	32,4
Erreur des Tables.			43,4
Parallaxe horizontale pour Berlin	1.	0.	22,7

Le 30 Janvier 1752.

Parallaxe horizontale sous l'Equateur.	0.	59.	46,8
Erreur des Tables.			27,4
Parallaxe horizontale pour Berlin.	0.	59.	37,1

Le 31 Janvier 1752.

Parallaxe horizontale sous l'Equateur.	0.	59.	10,2
Erreur des Tables			31
Parallaxe horizontale pour Berlin.	0.	59.	0,5

Le 23 Février 1752.

Parallaxe horizontale sous l'Equateur.	0.	59.	27,5
Erreur des Tables			32,3
Parallaxe horizontale pour Berlin.	0.	59.	17,8

Le 26 Février 1752.

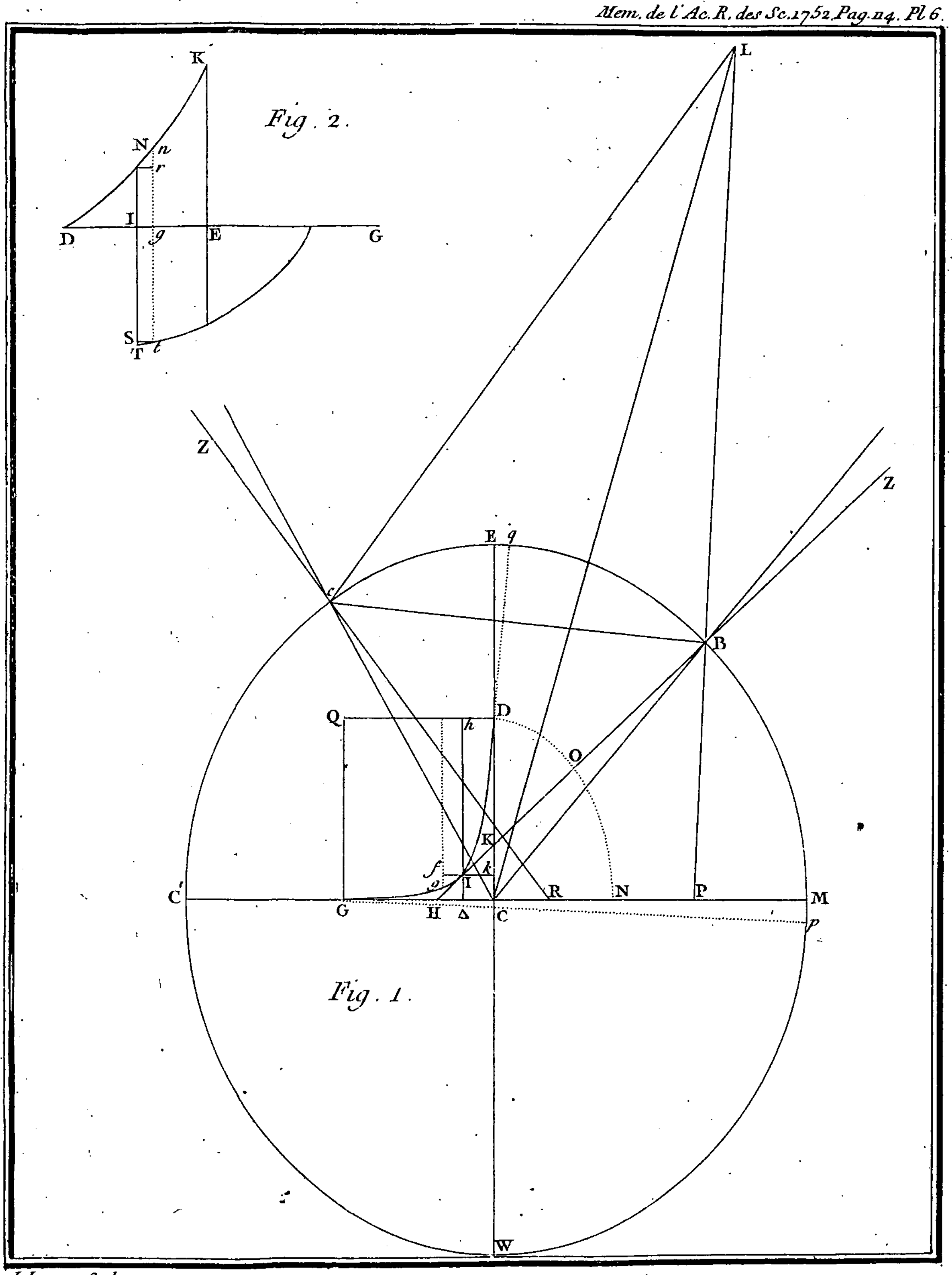
Parallaxe horizontale sous l'Equateur	0.	59.	23
Erreur des Tables	0.	0.	33,5
Parallaxe horizontale pour Berlin	0.	59.	13,3

On voit en comparant les trois suppositions que je viens d'examiner, que la première & la dernière, qui donnent la corde de l'arc entre Berlin & le Cap fort différemment l'une de l'autre, s'accordent cependant à la différence d'une seconde & demie dans le résultat de la parallaxe horizontale sous l'Equateur, mais qu'elles sont éloignées de 4" ½, par rapport à la parallaxe qui convient au parallèle de Berlin : la raison en est sensible, si l'on considère trois choses. 1.° Que dans la dernière, le rayon de l'Equateur & l'axe de la Terre sont beaucoup plus petits que dans la première, ce qui doit donner la base plus petite. 2.° Que la nature de la courbe est

eſt la même dans les deux ſuppoſitions, ce qui tend à produire la même parallaxe ſous l'Équateur. 3.° Que la quantité d'aplatiſſement étant plus petite dans la dernière ſuppoſition, l'inégalité des rayons de la Terre eſt auſſi moindre, & le rapport des différentes parallaxes plus approchant de l'égalité. D'un autre côté, comme on le comprend aiſément, il eſt facile que les deux hypothèſes où la courbe eſt de même nature, s'éloignent de 7 ou 8 ſecondes de celle où les accroiſſemens des degrés ſeroient proportionnels aux quatrièmes puiſſances des ſinus des latitudes, parce que, même ſous une égale quantité d'aplatiſſement, la différence de la configuration des méridiens en produit une dans le rapport de leurs rayons correſpondans aux mêmes latitudes. Au reſte, ſi cette différence paroît conſidérable, on ſera bien-tôt en état de juger de la préférence que doit mériter l'une ou l'autre hypothèſe.

L'obſervation du 23 Février, & celles qui s'accordent exactement, ou dont les réſultats tiennent à peu près un milieu entre les autres, peuvent ſervir à déterminer la véritable grandeur du diamètre de la Lune. Je prends, par exemple, le demi-diamètre horizontal, obſervé par M. le Monnier le 23 Février, 16′ 13″5, qui excède d'une ſeconde celui des Tables: ce demi-diamètre apparent comparé avec la diſtance au centre de la Terre, déterminée ci-deſſus dans la première hypothèſe, donne la véritable grandeur du rayon du globe de la Lune, de 897681 toiſes, ou 408 lieues, & la circonférence entière de cette planète, 2563 $\frac{17}{22}$ lieues, en les comptant à raiſon de 2200 toiſes pour une lieue, conformément à l'ordonnance de Louis XIII.

Je crois que les réſultats que je viens de donner ſuffiroient pour dreſſer une Table exacte des parallaxes de la Lune à chaque degré, ſoit de latitude ſur la Terre, ſoit d'anomalie de la Lune dans ſon orbite, & de ſa diſtance aux ſyzygies, ou enfin de la diſtance du Soleil à l'apogée de la Lune: il ne faudroit pour cela qu'une ſuite complète d'obſervations des diamètres de la Lune dans toutes ſes ſituations différentes, qui peuvent ſeuls nous donner la figure de l'orbite de la Lune & les rapports de ſes diſtances. J'ai entrepris ce travail par le moyen d'un excellent micromètre, dont la vis fort groſſe, portant quarante-huit pas ſur chaque pouce de longueur, fait mouvoir un écrou fort long & incapable du moindre jeu: j'ai fait conſtruire auſſi pour le même uſage un grand héliomètre de dix-huit pieds, c'eſt-à-dire, une lunette qui porte deux objectifs mobiles, dont la découverte eſt dûe à M. Bouguer, & j'ai vérifié la valeur des parties de ces deux inſtrumens ſur une grande baſe meſurée entre la terraſſe des Tuileries & la barrière de Chaillot. Par ce moyen nous pouvons eſpérer enfin de connoître avec beaucoup plus d'exactitude que ci-devant, les moindres inégalités de cette planète. Je réſerve pour un ſecond Mémoire le réſultat des obſervations faites pendant la ſuite de l'année 1752; je me propoſe de les appliquer à une nouvelle hypothèſe de la figure de la Terre, dans laquelle les accroiſſemens des degrés ſont comme les quarrés des ſinus des latitudes, & qui donne cependant à très-peu près le même réſultat que celle des quatrièmes puiſſances: c'eſt ce qui me porte à adopter par préférence le réſultat de celle-ci.



J. Ingram Sculp.