ASTRONOMIE.

SUR LES INTERPOLATIONS.

V. les Mém. p. 125.

L'USAGE des parties proportionnelles a été connu de tout temps; il n'a fallu que la plus médiocre attention pour s'apercevoir que lorſqu'on avoit une ſuite de nombres dont les différences étoient égales, on pouvoit trouver entr'eux autant de nombres intermédiaires qu'on vouloit, en diviſant la différence par le nombre de termes qu'on vouloit introduire entre deux des nombres donnés, & ajoûtant ou ôtant enſuite le quotient de la diviſion, ſuivant que les premiers nombres alloient en augmentant ou en diminuant.

Mais cette méthode ſi ſimple ne peut avoir lieu que lorſque les premiers nombres donnés croiſſent ou décroiſſent également; dans tout autre cas elle induiroit en erreur, puiſqu'il faut que les nombres intermédiaires ſoient aſſujétis à la même loi que ceux entre leſquels on les place; d'où il ſuit que lorſque les premiers nombres n'ont pas des différences égales, il ne faut pas que celles des nombres intermédiaires ſuivent la loi de l'égalité, & on a beſoin d'une autre méthode qui puiſſe indiquer comment la différence qui ſe trouve entre les nombres donnés doit être partagée, pour que les nouveaux nombres qu'on mettra entre deux, ſuivent la même loi d'augmentation ou de diminution, & c'eſt cette opération à laquelle on a donné le nom d'interpolation.

Le premier qui ait frayé la route à cette recherche, a été M. Mouton, chanoine de Lyon; il publia en 1670 des obſervations des diamètres du Soleil, qu'il accompagna d'une Table des déclinaiſons de cet aſtre pour chaque minute de longitude, calculée non ſeulement en ſecondes, mais en tierces; & il aſſure dans cet ouvrage, que pour obtenir les 5400 nombres que contient cette Table, il n'a été obligé de calculer que 90 nombres par la méthode rigoureuſe, & que la diviſion des ſecondes différences lui avoit fourni tous les autres ſans erreur ſenſible. Il avoit probablement employé la même méthode pour calculer de ſeconde en ſeconde les ſinus, &c. des quatre premiers degrés; ouvrage dont l'Académie poſsède le manuſcrit, & dont la ſeule difficulté de l'impreſſion a arrêté juſqu'ici la publication. Eſſayons de donner une idée de cette méthode.

Une ſuite de nombres croiſſans ou décroiſſans, ſuivant une loi quelconque, étant donnée, ſi on les ôte ſucceſſivement les uns des autres, on aura une nouvelle ſuite qui contiendra leurs différences; ces différences immédiatement déduites des nombres donnés, ſe nomment *différences premières.* Si préſentement on ſouſtrait ſucceſſivement ces différences premières les unes des autres, on aura leurs différences, qu'on nomme *différences ſecondes;* en traitant de même ces différences ſecondes on aura les différences troiſièmes, & ainſi du reſte.

Les premières différences ne ſont preſque jamais égales; mais ce qu'on ne ſe figureroit pas trop, il arrive très-ſouvent que les ſecondes ou les troiſièmes le ſont ou du moins approchent fort de l'égalité. C'eſt ſur ce principe inconteſtable qu'eſt fondée preſque toute la théorie du calcul dont nous parlons; dès qu'on eſt une fois parvenu à la ſuite des différences égales ou preſqu'égales, il ne s'agit plus que de trouver la loi ſuivant laquelle cette différence conſtante ou preſque conſtante doit être partagée, pour qu'en appliquant ſes parties ainſi trouvées aux portions égales des premières différences, elle faſſe ſuivre aux nombres intermédiaires qu'on cherche, la même loi d'accroiſſement ou de décroiſſement que ſuivent les nombres entre leſquels on les veut placer.

Telle eſt en général l'idée très-ingénieuſe de M. Mouton, qu'il avoit généralement exprimée en ces termes: *Étant donnée une ſuite de nombres où il n'y ait de conſtant que les dernières différences, trouver un nombre quelconque de termes qui ſuivent la même loi;* & la ſolution de ce problème, qu'il attribue à

M. Regnaud, consiste à faire une table en lettres, ou une espèce de formule très-étendue, pour la remplir ensuite en nombres.

Une idée aussi heureuse que celle dont nous venons de parler, méritoit bien d'être saisie par les génies du premier ordre, & ce fut aussi ce qui lui arriva. M. Newton, dans son livre des Principes, imprimé pour la première fois en 1687, & après lui M. Cotes, dans son ouvrage intitulé *Harmonia mensurarum*, l'ont traitée dans la plus grande généralité, & depuis ce temps M. Mayer & M. l'abbé de la Caille en ont tiré des formules plus commodes & plus particulièrement appropriées à l'usage de l'Astronomie.

Toutes les méthodes connues jusqu'ici pour la solution de ce problème d'Arithmétique, ont toûjours supposé la construction d'une espèce de Table, & ne donnent aucun des nombres intermédiaires qu'on cherche qu'en déterminant tous les autres. M. de la Lande frappé de l'utilité dont cette méthode peut être dans l'Astronomie, a voulu lui ôter cet inconvénient, & lui donner un degré de facilité dont elle ne jouissoit pas, en procurant le moyen d'avoir d'une manière très-simple, tels des termes intermédiaires qu'on voudra, sans passer par les précédens, & sans être obligé d'en connoître ni d'en déterminer aucun autre.

Quelques réflexions sur le triangle arithmétique de M. Pascal l'ont mis à portée de résoudre le problème qu'il s'étoit proposé. On sait que ce triangle est composé de manière que la première colonne verticale à gauche, qui est aussi la plus longue, ne contient que des unités; que la seconde contient les nombres naturels 1, 2, 3, 4, &c. & qu'enfin toutes les autres colonnes sont formées de manière que chacun des nombres qui les composent, soit toûjours la somme de tous les termes qui le précèdent dans la colonne précédente; d'où il suit qu'en prenant la suite des colonnes de droite à gauche, les nombres d'une colonne quelconque ont toûjours pour différences premières ceux de la colonne qui est plus à gauche; celle-ci ceux de la colonne suivante, & ainsi des autres jusqu'à la première qui ne contient que des unités, & qui repréſente toûjours les différences conſtantes, premières, ſecondes, troiſièmes, &c. ſuivant le rang de la colonne de laquelle on eſt parti : il ne s'agit donc que d'examiner la marche & la compoſition de ces nombres, qu'on peut regarder, s'il m'eſt permis d'uſer de ce terme, comme une formule arithmétique de la ſolution de ce problème.

Si l'on s'arrête à la troiſième colonne ou à celle dont les nombres ont l'unité pour ſeconde différence, & qu'au lieu de prendre les nombres un à un on les prenne de deux en deux, comme 1, 6, 15, 28, on aura une ſuite de nombres dont la différence ſeconde ſera conſtamment 4; ſi on les prend de trois en trois, cette ſeconde différence ſera 9; ſi on les prend de quatre en quatre, elle ſera 16; en un mot elle ſera toûjours le quarré du nombre qui exprime l'intervalle des nombres.

Si au lieu de conſidérer la colonne dont les ſecondes différences conſtantes ſont l'unité, on s'arrête à la colonne ſuivante, dont l'unité fait les troiſièmes différences, on verra que ſi on prend les nombres deux à deux, on aura 8 pour la troiſième différence conſtante, 16 pour la quatrième, &c. ce qu'il eſt facile de démontrer, & que M. de la Lande démontre effectivement par une formule générale. Voyons préſentement comment il l'accommode à la pratique.

Puiſque les ſecondes différences conſtantes augmentent en raiſon doublée de l'intervalle qu'on met entre les termes donnés, il doit arriver & il arrive auſſi néceſſairement, que ſi au lieu de prendre les termes de deux en deux, de trois en trois, on les prend de demi en demi, de tiers en tiers, c'eſt-à-dire qu'on partage en deux, en trois, &c. l'intervalle entre deux termes, cette même différence, au lieu de croître en raiſon doublée décroîtra en raiſon ſous-doublée.

Si, par exemple, on a quatre nombres, 0, 78, 300 & 666, repréſentant des longitudes ou des obſervations faites ou calculées de 12 en 12 heures, dont la différence ſeconde conſtante ſoit 144, & qu'on veuille avoir le nombre qui répond à une des heures intermédiaires, comme 22 heures, on conçoit aiſément que puiſqu'il s'agit d'une heure éloignée de 24^h de 2^h, il faut partager l'intervalle entre 12^h & 24^h en ſix parties qui ſuivent la même loi d'augmentation que les nombres donnés pour 0^h, 12^h, 24^h, 36^h. On partagera donc d'abord en ſix parties égales la différence première, & on aura 37 qui ſeroit la différence cherchée, ſi les nombres donnés croiſſoient également : il s'agit préſentement de partager la ſeconde différence conſtante 144 en raiſon ſous-doublée du nombre des intervalles cherchés, & c'eſt ce qu'on obtiendra en diviſant 144 par 36, quarré du nombre 6 des intervalles cherchés, le quotient 4 donnera la ſeconde différence conſtante des nombres qui répondront aux intervalles de 2^h en 2^h, & il ne s'agira plus que de l'appliquer pour avoir les différences premières qui doivent donner les nombres cherchés.

Pour cela, on fera réflexion que les ſix intervalles ſuppoſent cinq nombres, & que par conſéquent la ſomme des cinq différences ſecondes 4 eſt 20 ; mais elles ne doivent pas être appliquées également à la partie proportionnelle 37 ; la différence première doit être 37 au milieu de l'intervalle ; avant ce milieu la première différence doit être moindre que 37, & après lui elle doit être plus grande ; & voici le moyen de la rendre telle.

Si on a deux intervalles, c'eſt-à-dire un nombre ſeulement à chercher, on prendra la moitié de la différence ſeconde & on l'ôtera de la partie proportionnelle de la première différence ; ſi on a trois intervalles, c'eſt-à-dire deux nombres, on prendra la différence ſeconde entière, &c. Dans l'exemple propoſé, où l'on ſe propoſe de trouver ſix intervalles, c'eſt-à-dire cinq nombres, on prendra deux fois & demi 4 ou 10, on ôtera ce nombre de la partie proportionnelle 37, & on aura 27 pour la première des différences premières ; puis laiſſant la première différence 27, ſans y rien ajoûter, on joindra ſucceſſivement aux autres la différence ſeconde 4 quatre fois de ſuite, & on aura 27, 31, 35, 39 & 43, qui donneront les cinq nombres intermédiaires cherchés, 105, 136, 171, 210, 253, qui doivent partager l'intervalle entre 78 & 300 en ſix parties qui ſuivent la même loi d'accroiſſement d'accroiſſement que les premiers nombres donnés: & en effet, on voit aiſément du premier coup d'œil, qu'on n'a fait qu'affoiblir les premiers nombres de la même quantité dont on a ſurchargé les autres, pour leur donner, s'il m'eſt permis de me ſervir de ce terme, la marche d'accroiſſement qu'ils doivent avoir; tout l'art conſiſtoit à trouver cet affoibliſſement de la partie proportionnelle, au moyen duquel la ſeconde différence 4 lui étant continuellement ajoûtée, donnera toutes les premières différences & les nombres cherchés dans la proportion où ils doivent être: tout ceci eſt plus généralement contenu dans les formules de M. de la Lande, deſquelles nous avons eſſayé de répandre, pour ainſi dire, l'eſprit ſur cet exemple particulier.

Ces mêmes formules donnent, au moyen d'un calcul à peu près ſemblable, la manière d'employer les différences troiſièmes, lorſque ce ne ſont que celles-ci qui ſont conſtantes; mais elles font encore plus, car elles donnent le moyen d'obtenir un terme donné, ſans avoir beſoin de calculer ni de connoître les autres; cette méthode même s'étendroit juſqu'aux quatrièmes différences: il eſt vrai que pour lors le calcul deviendroit beaucoup plus long, & M. de la Lande ne fait que l'indiquer, parce que dans le calcul aſtronomique on ne court aucun riſque de négliger les quatrièmes différences; l'erreur qui en réſulte eſt ſi petite, qu'on peut, ſans rien craindre, la regarder comme nulle; & comment ne le ſeroit-elle pas, puiſque M. de la Lande fait voir, qu'excepté dans des cas fort rares, on peut preſque toûjours négliger en Aſtronomie les différences troiſièmes, & ſe contenter de prendre des milieux entre les différences ſecondes, qui s'écarteroient trop? Tout ceci eſt appuyé d'exemples détaillés & choiſis avec ſoin, qui prouvent qu'en ſe ſervant ſeulement des ſecondes différences, on ne s'écarte que d'une quantité très-petite des nombres qu'on auroit obtenus par le calcul le plus rigoureux.

L'attention de M. de la Lande a été plus loin, & une Table qu'il a inſérée dans la Connoiſſance des Temps, donne pour une heure quelconque, la quantité qui doit être ajoûtée à la partie proportionnelle, à raison des différences secondes du mouvement de la Lune, qui est calculé dans cet ouvrage de 12 heures en 12 heures. On voit aisément quel avantage cette Table procure aux Navigateurs & à tous ceux qui voudroient avoir le lieu de la Lune pour un temps donné. Une autre Table, qui est comme l'inverse de celle-ci, fournit le moyen d'avoir avec la plus grande facilité, le temps auquel la Lune parviendra à une position donnée : ces Tables sont l'une & l'autre une suite de la théorie de M. de la Lande sur les interpolations; il les a calculées pour le cas particulier des mouvemens de la Lune, à cause de l'extrême importance de cet élément; les Astronomes & les Navigateurs lui devront toûjours d'avoir beaucoup facilité l'usage des interpolations, d'en avoir éclairci considérablement la théorie, & d'avoir encore pris sur lui, par la construction des Tables dont nous venons de parler, la plus grande partie du calcul que ses méthodes exigent de ceux qui voudroient s'en servir.

SUR LA CONJONCTION ÉCLIPTIQUE DE VÉNUS ET DU SOLEIL, Du 6 Juin 1761.

JAMAIS peut-être phénomène astronomique n'a été attendu avec autant d'impatience, ni observé avec autant de soin que celui-ci. L'Académie s'est hâtée de publier tout l'historique de ce phénomène, & d'indiquer les motifs des voyages que M.rs le Gentil, Pingré & l'abbé de Chappe avoient entrepris dans différentes parties du monde, pour tirer de l'observation du passage de Vénus sur le Soleil, toute l'utilité possible, tant pour la détermination des principaux élémens de la théorie de cette planète, que pour celle de la parallaxe du Soleil. Nous ne répéterons point ici ce qu'elle en a dit dans son Histoire de 1757 *, & nous nous contenterons de rapporter quel a été le fruit de toutes les peines qu'ont prises

* Voy. Hist. 1757. p. 77 & suiv.