MÉMOIRE

SUR

LA LOI DES MODIFICATIONS QUE LA RÉFLEXION IMPRIME A LA LUMIÈRE POLARISÉE.

PAR M. A. FRESNEL (1).

Lu à l'Académie des sciences, le 7 janvier 1823.

L'HYPOTHÈSE que j'ai adoptée sur la nature des vibrations lumineuses, m'a conduit à deux formules générales de l'intensité de la lumière réfléchie par les corps transparents, pour toutes les inclinaisons des rayons incidents; l'une de ces formules est relative aux rayons polarisés suivant le plan d'incidence, et l'autre à ceux qui l'ont été dans un plan perpendiculaire. On conçoit qu'elles devaient être différentes, puisque la lumière polarisée suivant le plan d'incidence éprouve une réflexion dont l'intensité croît toujours à mesure que l'obliquité des rayons augmente; tandis que pour la lu-

(1) Ce Mémoire qu'on croyait égaré, vient d'être retrouvé dans les papiers de M. Fourier. Comme il n'est connu que par des extraits tout-à-fait insuffisants (voyez *Annales de Chimie et de Physique*, tom. XXIX, p. 175), on a pensé devoir l'insérer dans ce volume.

mière polarisée perpendiculairement au plan d'incidence, il existe entre les directions perpendiculaires et parallèles à la surface, un certain degré d'obliquité qui rend la réflexion nulle, comme Malus l'a reconnu le premier. Ces formules ont été publiées dans les *Annales de Chimie et de Physique,* tome XVII, cahier de juillet 1821. J'ai fait voir comment j'étais arrivé à la première, mais je n'ai pas indiqué le chemin qui m'avait conduit à la seconde. Je vais exposer ici le principe ou la supposition mécanique qu'il faut ajouter à l'hypothèse fondamentale sur la nature des vibrations lumineuses, pour arriver à ces deux formules, en considérant toujours, comme je l'ai fait jusqu'à présent, le cas où les deux milieux contigus ont la même élasticité et ne diffèrent que par leur densité.

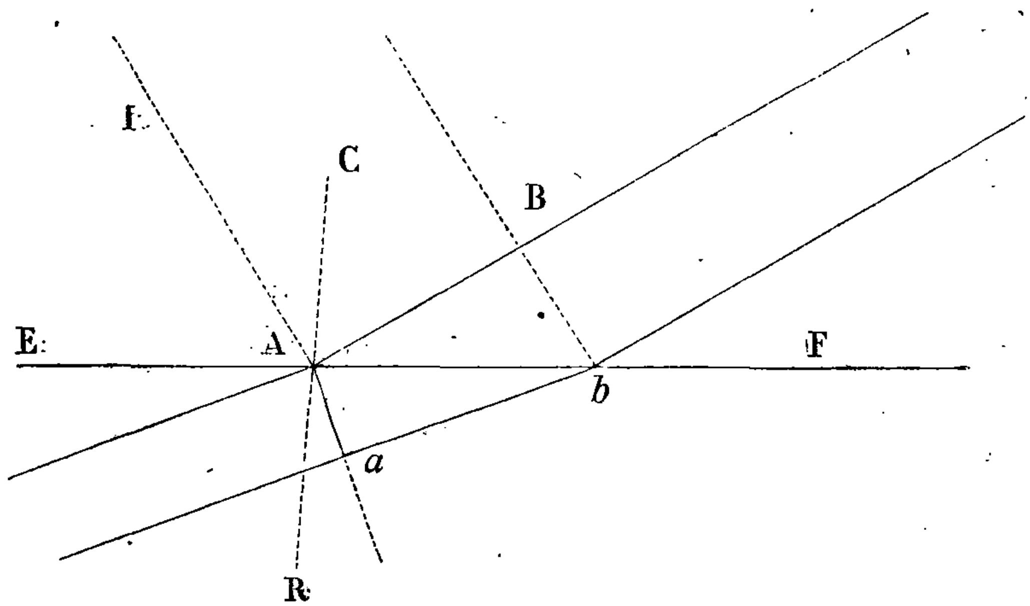
Il faut se rappeler d'abord que cette hypothèse fondamentale consiste en ce que les vibrations lumineuses s'exécutent dans le sens même de la surface de l'onde, perpendiculairement au rayon; d'où il résulte qu'un faisceau de lumière polarisée est celui dont les mouvements vibratoires conservent une direction unique et constante, et que son plan de polarisation est le plan perpendiculaire à cette direction constante des petites oscillations des molécules éthérées. Ainsi, quand le faisceau est polarisé suivant le plan d'incidence, les vibrations sont perpendiculaires à ce plan, et par conséquent sont toujours parallèles à la surface réfringente, quelle que soit l'inclinaison des rayons. Il n'en est plus de même pour ceux qui ont été polarisés perpendiculairement au plan d'incidence, parce que leurs vibrations s'exécutant alors dans ce plan, ne sont parallèles à la surface réfringente que dans le cas de l'incidence perpendiculaire, puis forment avec elle des angles d'autant plus grands que les rayons s'inclinent davantage, et lui deviennent enfin perpendiculaires quand les rayons lui sont parallèles; c'est ce qui rend le problème de la réflexion plus difficile à résoudre dans ce second cas que dans le premier. Dans celui-ci, les mouvements oscillatoires s'exécutant uniquement suivant des directions parallèles à la surface, pour les ondes réfléchie et réfractée comme pour l'onde incidente, on peut admettre que les amplitudes de ces oscillations ou que les vitesses absolues des molécules dans un élément quelconque de l'onde réfléchie ou de l'onde réfractée, ne changent pas tandis qu'elles s'éloignent de la surface (1); du moins il me semble que ce principe ne serait pas difficile à démontrer rigoureusement. J'adopte aussi la même supposition pour le cas de la lumière polarisée perpendiculairement au plan d'incidence, c'est-à-dire celui où les vibrations s'exécutent dans ce plan; bien entendu qu'il ne s'agit plus alors que des composantes des vitesses absolues parallèles à la surface réfléchissante; ainsi je suppose que ces composantes ont la même intensité lorsque l'ébranlement réfléchi ou réfracté touche encore à la surface et lorsqu'il s'en est éloigné.

Cela posé, d'après la nature de l'élasticité que je considère, qui est celle qui s'oppose au glissement d'une tranche d'un même milieu sur la tranche suivante, ou au déplacement relatif des tranches en contact de deux milieux différents, les tranches contiguës des deux milieux doivent exécuter paral-

(1) Je suppose ici, bien entendu que le centre de l'onde incidente est infiniment éloigné, en sorte qu'elle est plane ainsi que les ondes réfléchie et réfractée et que leurs intensités ne sont point affaiblies par leur propagation.

lèlement à la surface qui les sépare, des oscillations de même amplitude, sans quoi l'une de ces tranches aurait glissé sur l'autre d'une quantité d'un ordre bien supérieur aux déplacements relatifs des tranches contiguës de chaque milieu considéré séparément, d'où naîtrait une résistance beaucoup plus grande qui s'opposerait à ce déplacement. Ainsi l'on peut admettre comme une conséquence évidente de notre hypothèse fondamentale sur la nature de l'élasticité mise en jeu par les vibrations lumineuses, que les vitesses absolues des molécules voisines de la surface réfringente parallèlement à cette surface, doivent être égales dans les deux milieux : or ces mouvements, dans le premier milieu, se composent à la fois de l'ébranlement apporté par l'onde incidente et de celui de l'onde réfléchie ; c'est-à-dire que la composante, parallèle à la surface réfringente, du mouvement imprimé à chaque molécule du premier milieu par l'onde incidente et l'onde réfléchie, doit être égale à la composante parallèle de la vitesse absolue des molécules dans le second milieu ; ou en d'autres termes, et supposant la surface réfringente horizontale pour simplifier les expressions, la composante horizontale de la vitesse absolue apportée par l'onde incidente, ajoutée à la composante horizontale de la vitesse absolue imprimée par l'onde réfléchie (prise avec le signe qui lui convient), égale la composante horizontale de la vitesse absolue des molécules du second milieu dans l'onde transmise. Il est clair que cette égalité doit avoir lieu près de la surface de contact, et la supposition que nous avons énoncée d'abord et dont nous allons nous servir, consiste seulement à admettre que ces composantes horizontales restent constantes pendant que les éléments successifs des ondes réfléchies et réfractées s'éloignent de la surface, et que par conséquent l'équation dont il s'agit a lieu à toutes distances. Avant de donner les raisons sur lesquelles je fonde cette conservation des composantes horizontales, j'attendrai que je puisse traiter la question plus à fond et présenter en même temps la solution du problème pour le cas où les deux élasticités sont différentes. Je ne me propose actuellement que de déduire de cette hypothèse subsidiaire et du principe de la conservation des forces vives, les formules que j'avais publiées en 1821, et dont nous tirerons les lois qui font l'objet de ce Mémoire.

Pour appliquer ici le principe de la conservation des forces vives, il faut pouvoir comparer les masses ébranlées dans les deux milieux, ce qui devient facile au moyen de la loi connue de la réfraction.



Soit EF la surface réfringente, AB l'onde incidente, ab la même onde réfractée; si du point A on abaisse sur ab le rayon perpendiculaire Aa, et que par le point b on conçoive pareillement un rayon Bb perpendiculaire à l'onde incidente, il est clair que AB et ab seront des étendues correspondantes des deux ondes dans les deux milieux, c'est-à-dire que la partie AB de l'onde incidente occupera dans le second milieu l'étendue ab. Quant aux espaces relatifs qu'elles occupent dans le sens perpendiculaire, suivant la direction des rayons IA et Aa, ce sont précisément les longueurs d'ondulation dans les deux milieux, dont le rapport est celui du sinus de l'angle d'incidence IAC au sinus de l'angle de réfraction RAa. Si donc nous appelons i le premier angle et i' le second, les dimensions relatives des ondes dans le sens des rayons pourront être représentées par sin. i et sin. i'; et conséquemment les volumes des deux portions correspondantes que nous considérons dans les ondes incidentes et réfractées, seront entre eux comme AB.sin. i est à ab.sin. i'. Mais en prenant Ab pour rayon, AB et ab sont les cosinus respectifs des angles BAb et Aba, ou des angles i et i', auxquels ceux-ci sont égaux; les deux volumes sont donc entre eux comme sin. i cos. i est à sin. i' cos. i'. Il nous reste à les multiplier par les densités pour avoir le rapport des masses. Or comme les deux milieux sont supposés avoir la même élasticité et différer seulement en densité, les vitesses de propagation dans ces deux milieux sont en raison inverse des racines carrées de leurs densités; ainsi l'on a,

$$\sin. i : \sin. i' :: \frac{1}{\sqrt{d}} : \frac{1}{\sqrt{d'}},$$

ou

$$d : d' :: \frac{1}{\sin.^2 i} : \frac{1}{\sin.^2 i'};$$

multipliant ce rapport par celui des volumes, nous aurons pour celui des masses,

$$\frac{\sin. i \cos. i}{\sin.^2 i} : \frac{\sin. i' \cos. i'}{\sin.^2 i'},$$

ou

$$\frac{\cos. i}{\sin. i} : \frac{\cos. i'}{\sin. i'}.$$

Si donc on prend $\frac{\cos. i'}{\sin. i'}$ pour représenter la masse ébranlée dans l'onde réfractée, $\frac{\cos. i}{\sin. i}$ sera la masse ébranlée dans l'onde incidente et en même temps la masse de la partie correspondante de l'onde réfléchie, puisque les parties correspondantes des ondes incidentes et réfléchies ont le même volume et que d'ailleurs elles sont dans le même milieu.

Cela posé, je prends pour unité le coefficient commun de toutes les vitesses absolues des molécules dans l'onde incidente, et je représente par v celui des vitesses absolues dans l'onde réfléchie, et par u celui des mêmes vitesses dans l'onde réfractée : en divisant par la pensée l'onde incidente en une série d'une infinité d'ébranlements successifs, et les ondes réfléchies et réfractées en un même nombre d'éléments pareils, il est évident que le rapport entre les vitesses absolues de deux éléments correspondants de l'onde incidente et de l'onde réfractée, par exemple, sera constant pour toutes les parties de ces deux ondes, puisqu'il doit être indépendant de l'intensité plus ou moins grande des vitesses absolues dans les divers éléments de l'onde incidente. Si donc on prend pour unité l'intensité du mouvement vibratoire dans l'onde incidente, v et u seront les coefficients par lesquels il faut multiplier chacune des vitesses absolues des éléments de l'onde incidente pour avoir les vitesses absolues des éléments correspondants de l'onde réfractée et de l'onde réfléchie, et indiqueront ainsi le degré d'intensité des vitesses absolues dans ces deux ondes. Par conséquent, la masse de l'onde réfractée multipliée par u^2, plus la masse de l'onde réfléchie multipliée par v^2, doivent donner une somme égale à la masse de l'onde incidente multipliée par 1, pour que la somme des forces vives reste constante; on a donc:

$$\frac{\cos. i}{\sin. i} . 1 = \frac{\cos. i'}{\sin. i'} . u^2 + \frac{\cos. i}{\sin. i} . v^2,$$

ou

$$\frac{\cos. i}{\sin. i} (1 - v^2) = \frac{\cos. i'}{\sin. i'} . u^2,$$

ou

$$\sin. i' \cos. i (1 - v^2) = \sin. i \cos. i' u^2 \ldots\ldots (A)$$

Telle est l'équation qui résulte du principe de la conservation des forces vives et qui doit être satisfaite dans tous les cas, soit que le rayon incident ait été polarisé parallèlement ou perpendiculairement au plan d'incidence.

Nous avons admis que dans ces deux cas les mouvements parallèles à la surface réfringente devaient être égaux de chaque côté de cette surface, c'est-à-dire que les vitesses horizontales de l'onde incidente ajoutées aux vitesses horizontales de l'onde réfléchie prises avec leur signe, devaient être égales aux vitesses horizontales de l'onde transmise, et cela non-seulement contre la surface, où le principe est évident, mais encore à des distances contenant un grand nombre de fois la longueur d'ondulation. Lorsque l'onde incidente est polarisée suivant le plan d'incidence, c'est-à-dire que ses vibrations s'exécutent perpendiculairement à ce plan, elles sont toujours horizontales ainsi que celles des ondes réfléchie et transmise, et par conséquent les coefficients des vitesses horizontales sont 1, v et u pour les ondes incidente, réfléchie et réfractée, et l'on doit avoir, d'après notre hypothèse subsidiaire,

$$1 + v = u, \quad \text{ou} \quad (1 + v)^2 = u^2.$$

Divisant par cette équation celle que nous venons d'obtenir au moyen du principe de la conservation des forces vives, on a :

$$\sin. i'.\cos. i\left(\frac{1 - v}{1 + v}\right) = \sin. i\cos. i',$$

ou

$$\sin. i'.\cos. i.(1 - v) = \sin. i\cos. i'.(1 + v);$$

d'où l'on tire,

$$v = -\frac{\sin. i\cos. i' - \sin. i'\cos. i}{\sin. i\cos. i' + \sin. i'\cos. i},$$

ou

$$v = -\frac{\sin.(i - i')}{\sin.(i + i')} \ldots\ldots (1).$$

Dans le second cas, c'est-à-dire celui où la lumière est polarisée perpendiculairement au plan d'incidence, les vibrations s'exécutant alors parallèlement à ce plan et toujours perpendiculairement aux rayons incidents, réfléchis et réfractés, les composantes horizontales des vitesses absolues 1, v et u, sont $\cos. i$, $v\cos. i$ et $u\cos. i'$; on doit donc avoir, d'après l'hypothèse subsidiaire,

$$\cos. i + v\cos. i = u\cos. i', \quad \text{ou} \quad (1 + v)\cos. i = u\cos. i',$$

ou élevant au carré,

$$(1 + v)^2\cos.^2 i = u^2\cos.^2 i'.$$

Divisant l'équation (A), qui résulte du principe de la conservation des forces vives, par cette dernière équation, l'on a

$$\left(\frac{1-v}{1+v}\right)\cdot\frac{1}{\sin. i \cos. i}=\frac{1}{\sin. i' \cos. i'},$$

ou

$$(1-v)\sin. i' \cos. i'=(1+v)\sin. i \cos. i;$$

d'où l'on tire

$$v=-\frac{\sin. i \cos. i-\sin. i' \cos. i'}{\sin. i \cos. i+\sin. i' \cos. i'}\ldots\ldots(2).$$

Telle est l'expression de la vitesse absolue dans l'onde réfléchie, quand le plan de réflexion est perpendiculaire au plan de polarisation de la lumière incidente. On voit que cette expression devient nulle pour une certaine obliquité des rayons, lorsqu'on a, $\sin. i \cos. i=\sin. i' \cos. i'$, ou $\sin. 2i=\sin. 2i'$ c'est-à-dire quand $2i=180°-2i'$, ou $i=90°-i'$, c'est-à-dire enfin, quand l'angle de réfraction est le complément de l'angle d'incidence, ou, ce qui revient au même, lorsque le rayon réfracté est perpendiculaire au rayon réfléchi, conformément à la loi de Brewster. Il n'en est pas de même pour la formule (1); elle ne pourrait devenir nulle que dans le cas particulier où i' serait égal à i, c'est-à-dire où les ondes lumineuses auraient la même longueur dans les deux milieux en contact. Mais d'ailleurs les deux formules donnent la même vitesse réfléchie pour l'incidence perpendiculaire et pour l'autre limite $i=90°$; et dans le second cas elles indiquent l'une et l'autre que la totalité de la lumière est réfléchie; ce qu'on trouverait sans doute aussi par l'expérience, si l'on pouvait atteindre à cette limite. Dans le cas de l'incidence perpendiculaire, les deux formules donnent,

$$v = -\frac{\sin. i - \sin. i'}{\sin. i + \sin. i'} = -\frac{\frac{\sin. i}{\sin. i'} - 1}{\frac{\sin. i}{\sin. i'} + 1}, \quad \text{ou } v = -\frac{r-1}{r+1},$$

en appelant r le rapport constant du sinus d'incidence au sinus de réfraction. C'est précisément la formule que M. Young a donnée le premier, et à laquelle M. Poisson est arrivé ensuite par une analyse plus savante et plus rigoureuse, mais en ne considérant l'un et l'autre que le genre d'élasticité auquel les géomètres ont attribué uniquement jusqu'à ce jour la propagation des ondes sonores, je veux dire, la résistance des milieux vibrans à la compression.

L'intensité de la lumière, d'après le sens même qu'on attache aux expressions, *lumière double, lumière triple,* etc., étant mesurée par la somme des forces vives qu'elle contient, si l'on veut estimer la quantité de lumière réfléchie dans les deux cas que nous avons considérés, il faudra élever la valeur de v au carré; et en la retranchant de 1, qui représente la lumière incidente, on aura la quantité de lumière transmise. Si la lumière, au lieu d'être polarisée parallèlement ou perpendiculairement au plan d'incidence, l'était dans un autre azimut, alors connaissant la direction suivant laquelle s'exécutent ses vibrations d'après l'azimut de son plan de polarisation, qui leur est perpendiculaire, on en déduirait les composantes de ces petits mouvements parallèlement et perpendiculairement au plan d'incidence. Ainsi par exemple, si l'angle que le plan de polarisation fait avec le plan d'incidence est égal à a, l'angle que les vitesses absolues du faisceau incident feront avec ce dernier plan sera $90° - a$; par conséquent les composantes parallèles à ce plan seront toutes multipliées par sin. a, et les composantes perpendiculaires par cos. a. Si donc on représente par 1 l'amplitude de vibration de la lumière incidente, sin. a en sera la composante dans le plan d'incidence et cos. a suivant la direction perpendiculaire. C'est à la première composante qu'il faudra appliquer la formule (2), et à la seconde la formule (1) pour avoir les amplitudes d'oscillation de la lumière réfléchie; et l'on aura ainsi pour la composante suivant le plan de réflexion,

$$-\sin. a\left(\frac{\sin. i \cos. i - \sin. i' \cos. i'}{\sin. i \cos. i + \sin. i' \cos. i'}\right),$$

et la composante perpendiculaire,

$$-\cos. a\left(\frac{\sin. i \cos. i' - \sin. i' \cos. i}{\sin. i \cos. i' + \sin. i' \cos. i}\right),$$

ou bien,

$$-\sin. a \frac{\operatorname{tang.}(i-i')}{\operatorname{tang.}(i+i')},$$

et

$$-\cos. a \frac{\sin.(i-i')}{\sin.(i+i')},$$

dont la résultante est

$$-\sqrt{\sin.^2 a . \frac{\operatorname{tang.}^2(i-i')}{\operatorname{tang.}^2(i+i')} + \cos.^2 a \frac{\sin.^2(i-i')}{\sin.^2(i+i')}};$$

et si l'on veut avoir l'*intensité de la lumière réfléchie,* il suffira d'élever cette expression au carré, ce qui donnera,

$$\sin.^2 a . \frac{\operatorname{tang.}^2(i-i')}{\operatorname{tang.}^2(i+i')} + \cos.^2 a \frac{\sin.^2(i-i')}{\sin.^2(i+i')}.$$

La lumière directe, qui n'a reçu aucune polarisation préalable, peut être considérée comme l'assemblage ou la succession rapide d'une infinité de systèmes d'ondes polarisées dans tous les azimuts; en sorte qu'en décomposant les mouvements vibratoires de chacun d'eux parallèlement et perpendiculairement au plan d'incidence, on aura en somme, vu la multitude des chances, autant de mouvement suivant une ces directions que suivant l'autre; et si l'on prend toujours pour unité l'intensité de la lumière incidente, celle de la lumière réfléchie sera,

$$\frac{1}{2}\frac{\text{tang.}^2(i-i')}{\text{tang.}^2(i+i')}+\frac{1}{2}\frac{\sin.^2(i-i')}{\sin.^2(i+i')}.$$

Je n'ai encore pu vérifier cette formule que sur deux anciennes observations de M. Arago, avec lesquelles elle s'accorde d'une manière satisfaisante, comme je l'ai fait voir dans la note déja citée, des *Annales de Chimie et de Physique.*

Mais les formules (1) et (2), dont celle-ci est déduite, se trouvent vérifiées d'une manière indirecte par quatorze observations que j'avais faites depuis long-temps sur les déviations angulaires qu'éprouve le plan de polarisation d'un faisceau de lumière primitivement polarisé dans un azimut de 45° relativement au plan d'incidence, lorsque ce faisceau est réfléchi à la surface extérieure du verre ou de l'eau. On peut voir dans la même note le tableau comparatif des résultats du calcul et de ceux de l'expérience.

Il est aisé de déduire ces déviations des formules (1) et (2), pour tous les azimuts du plan primitif de polarisation. Si a est l'angle que ce plan fait avec le plan d'incidence, sin. a et cos. a serait les composantes des vitesses absolues parallèlement et perpendiculairement à celui-ci; et le système d'ondes incident pourra être considéré comme l'assemblage de deux autres systèmes d'ondes dont les vibrations s'exécuteraient, dans l'un parallèlement au plan d'incidence avec des vitesses absolues proportionnelles à sin. a, et dans l'autre perpendiculairement à ce plan avec des vitesses absolues proportionnelles à cos. a. Les mêmes vitesses absolues dans les deux systèmes d'ondes réfléchis, seront pour le premier,

$$v = -\sin . a . \frac{\text{tang.}(i-i')}{\text{tang.}(i+i')},$$

et pour le second,

$$v = -\cos . a . \frac{\sin.(i-i')}{\sin.(i+i')}.$$

Or l'un et l'autre ont parcouru le même chemin et ont été réfléchis à la surface de séparation des deux milieux, si la réflexion est partielle et les formules réelles, comme nous le supposons ici; en sorte qu'il n'y aura point entre les deux systèmes d'ondes de différence de chemins parcourus, et que dans l'un et l'autre les mêmes périodes des oscillations ou les vitesses absolues correspondantes répondront au même point du rayon; elles seront donc constamment dans le même rapport et produiront toujours le long du rayon réfléchi des résultantes dirigées suivant le même plan; ainsi la lumière réfléchie sera aussi complètement polarisée que la lumière incidente, et le nouveau plan de polarisation sera perpendiculaire aux directions de ces résultantes : or la tangente de l'angle qu'elles font avec le plan d'incidence est égale au rapport des deux valeurs de v que nous venons de trouver, c'est-à-dire à

$$\frac{\sin. a}{\cos. a} \cdot \frac{\text{tang.}(i-i')\sin.(i+i')}{\text{tang.}(i+i')\sin.(i-i')},$$

ou

$$\text{tang.}\, a. \frac{\cos.(i+i')}{\cos.(i-i')};$$

Ainsi la cotangente de l'angle du nouveau plan de polarisation avec le plan d'incidence sera égale à cette expression, ou la tangente à

$$\cot. a. \frac{\cos.(i-i')}{\cos.(i-i')}.$$

Telle est l'expression de la loi des déviations que la lumière éprouve dans son plan de polarisation, lorsqu'elle est réfléchie à la surface extérieure des corps transparents. Dans la réflexion intérieure la même loi doit avoir lieu pour les incidences correspondantes, c'est-à-dire celles des rayons réfractés qui auraient extérieurement l'incidence représentée par i; car, à raison de la généralité de la formule, si l'on représente toujours par i l'angle d'incidence des rayons extérieurs, il suffira de changer i en i' et i' en i dans l'expression ci-dessus pour avoir la tangente du nouvel azimut du plan de polarisation lorsque la réflexion s'opère en dedans du corps transparent, ce qui donnera

$$\cot. a \frac{\cos.(i'-i)}{\cos.(i+i')},$$

ou

$$\cot. a \frac{\cos.(i-i')}{\cos.(i+i')},$$

même expression que dans le cas précédent, en supposant, bien entendu, que a est toujours l'azimut du plan de polarisation du rayon immédiatement avant la réflexion.

Je n'ai pas encore vérifié la formule dans ce second cas, à cause de la nécessité de tailler les faces d'entrée et de sortie perpendiculairement aux rayons incidents et émergents pour les différentes obliquités dont on fait l'essai, si l'on veut que la déviation observée soit uniquement due à la réflexion intérieure. A la vérité, l'on pourrait faire cette vérification d'une manière indirecte en employant une glace à faces parallèles et tenant compte des déviations résultant des deux réfractions que le faisceau éprouve de la part de la première surface. Ce procédé aurait l'avantage de permettre de varier sans frais et autant qu'on le désirerait, l'obliquité des rayons incidents. Je n'ai point encore fait ces expériences, mais je ne doute pas que leurs résultats ne fussent conformes à ceux du calcul basé sur les formules que je viens de donner. On en déduit pour la tangente de l'angle que le plan de polarisation d'un rayon réfracté fait avec le plan d'incidence,

$$\frac{1}{2}\cot. a \left(\frac{\sin. 2i + \sin. 2i'}{\sin. (i+i')}\right).$$

Quand on fait tomber de la lumière ordinaire sur la surface d'un corps transparent, puisqu'elle peut toujours être considérée comme composée de quantités égales de mouvements vibratoires parallèles et perpendiculaires au plan d'incidence, si l'on veut avoir la proportion de lumière polarisée dans les rayons réfléchis, il suffira de calculer pour chaque incidence au moyen des formules

$$\frac{1}{2}\frac{\sin.^2(i-i')}{\sin.^2(i+i')} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}\frac{\text{tang.}^2(i-i')}{\text{tang.}^2(i+i')},$$

les proportions dans lesquelles se réfléchissent la lumière polarisée parallèlement au plan d'incidence et la lumière polarisée perpendiculairement au même plan, et de diviser la différence de ces deux expressions par leur somme; le quotient sera la proportion de lumière polarisée contenue dans le faisceau réfléchi. Quant à la quantité de lumière polarisée par transmission, elle sera égale à l'autre, d'après la théorie que nous venons d'exposer, comme d'après les anciennes expériences de M. Arago.

En étudiant avec un prisme les modifications que la réflexion intérieure imprime à la lumière polarisée, dans un azimut de 45° relativement au plan d'incidence, j'avais observé depuis long-temps que les rayons réfléchis ne conservaient leur polarisation primitive que jusqu'à la limite de la réflexion partielle et que lorsque la réflexion devenait complète, la lumière réfléchie se trouvait en partie dépolarisée. Cette dépolarisation devenait totale après deux réflexions semblables sous une incidence de 50° environ. J'en avais conclu, d'après les règles d'interférences des rayons polarisés, que la lumière réfléchie se trouvait alors composée de deux systèmes d'ondes égaux, différant d'un quart d'ondulation et polarisés l'un parallèlement, l'autre perpendiculairement au plan d'incidence; ce qui revient à dire que les deux faisceaux polarisés parallèlement et perpendiculairement au plan d'incidence dans lesquels on peut diviser le faisceau incident, n'ont pas été réfléchis en quelque sorte à la même profondeur, ou que s'ils l'ont été l'un et l'autre à la surface même, ils y ont éprouvé des modifications différentes dans les périodes de leurs vibrations, et de telle manière qu'après une de ces réflexions le faisceau polarisé suivant le plan d'incidence se trouve en retard d'un huitième d'ondulation sur l'autre, ou en avance de $\frac{3}{8}$, et après deux réflexions pareilles, en retard d'un quart ou en avance de $\frac{3}{4}$.

Mais cette différence de marche ou de période de vibration varie avec l'inclinaison des rayons; et la loi de ses variations m'avait paru si difficile à découvrir que depuis six ans que ces phénomènes de dépolarisation m'étaient connus, je n'avais pas même essayé d'en chercher la loi, et je n'espérais la trouver qu'après avoir résolu d'une manière complète le problème mathématique de la réflexion et de la réfraction. La solution que j'en viens de donner au commencement de ce Mémoire est sans doute bien incomplète, 1° en ce que je n'ai considéré que le cas où les deux milieux ayant la même élasticité différeraient seulement par leurs densités, tandis qu'il doit arriver le plus souvent que les deux milieux diffèrent en même temps d'élasticité; 2° en ce que j'ai appuyé mes calculs sur un principe que je n'ai point démontré, principe évident à la vérité lorsque les vibrations s'exécutent parallèlement à la surface réfringente, mais qui aurait besoin de démonstration, dans le cas contraire où les rayons sont polarisés perpendiculairement au plan de réflexion, c'est-à-dire où leurs vibrations s'exécutent dans ce plan.

Néanmoins, comme il paraît résulter des faits observés jusqu'à présent que les proportions de lumière réfléchie et transmise à la surface de contact de deux milieux, ainsi que l'angle de la polarisation complète, ne dépendent que des rapports de réfraction des deux milieux, c'est-à-dire du rapport des vitesses de propagation de la lumière dans chacun d'eux, quelles que soit d'ailleurs leur différence de nature et de densité pondérable (1), et par conséquent sans doute leur différence d'élasticité, il me paraît très-probable que si l'on avait égard dans le calcul à cette dernière différence on aurait le même résultat qu'en attribuant uniquement à une différence de densité les vitesses différentes avec lesquelles la lumière parcourt ces deux milieux, et qu'ainsi l'on retomberait encore sur les formules (1) et (2). Quant à l'hypothèse subsidiaire sur laquelle elles reposent, elle me paraît aussi d'une grande probabilité, à en juger par l'accord satisfaisant entre ces formules et toutes les observations exactes sur lesquelles j'ai pu les vérifier jusqu'à présent. Ayant donc tout lieu de croire qu'on doit les considérer comme rigoureuses (et d'autant plus qu'elles ne sont pas seulement vérifiées par des faits, mais encore établies sur des considérations théoriques déja très-probables en elles-mêmes) j'ai cherché si ces mêmes formules qui m'avaient conduit d'une manière si simple à loi des déviations que les rayons éprouvent dans leur plan de polarisation par l'effet de la réflexion extérieure, ne m'aideraient pas à deviner la loi des modifications d'une nature toute différente que la réflexion totale imprime à la lumière polarisée, et j'y suis effectivement parvenu au moyen des inductions que je vais exposer.

Les formules (1) et (2) conservent la forme réelle, pour toutes les valeurs de i comprises entre o et 90°, tant que le second milieu est plus réfringent que le premier; mais quand il l'est moins, c'est-à-dire lorsque le coefficient n par lequel

(1) J'appelle ainsi la partie de la densité du milieu qu'on peut peser, c'est-à-dire du corps; quant à l'éther contenu entre les particules de ce corps, on ne peut pas le peser, parce qu'il est incoërcible.

il faut multiplier sin. i pour avoir sin. i' est plus grand que 1, avant d'atteindre 90°, on trouve une valeur de i pour laquelle la valeur correspondante de sin. i' est égale à 1 et passé laquelle ce sinus est plus grand que l'unité; alors cos. i' devient imaginaire et avec lui les formules (1) et (2), dans lesquelles il entre. Cependant, en vertu de la loi générale de continuité, si elles étaient une expression exacte des lois de la réflexion jusqu'à la limite dont nous venons de parler, elles doivent encore l'être après; mais l'embarras est de les interpréter et de deviner ce que l'analyse annonce dans ces expressions imaginaires. C'est néanmoins ce que nous allons tâcher de faire, sinon par des raisonnements rigoureux, au moins par les inductions les plus naturelles et les plus probables.

Pour fixer les idées, prenons d'abord la formule (1),

$$v = -\frac{\sin. i \cos. i' - \sin. i' \cos. i}{\sin. i \cos. i' + \sin. i' \cos. i},$$

qu'on peut mettre sous la forme,

$$v = -\frac{\sin. i \sqrt{1 - n^2 \sin.^2 i} - n \sin. i \cos. i}{\sin. i \sqrt{1 - n^2 \sin.^2 i} + n \sin. i \cos. i},$$

ou multipliant haut et bas par le numérateur,

$$v = -\frac{\sin.^2 i (1 - n^2 \sin.^2 i) + n^2 \sin.^2 i \cos.^2 i - 2n \sin.^2 i \cos. i \sqrt{1 - n^2 \sin.^2 i}}{\sin.^2 i (1 - n^2 \sin.^2 i) - n^2 \sin.^2 i \cos.^2 i},$$

ou

$$v = -\frac{1 - n^2 \sin.^2 i + n^2 \cos.^2 i - 2n \cos. i \sqrt{1 - n^2 \sin.^2 i}}{1 - n^2 \sin.^2 i - n^2 \cos.^2 i}.$$

Tant que $n^2 \sin.^2 i$ est plus petit que 1, cette valeur de v est réelle; quand $1 = n^2 \sin.^2 i$, elle devient $-\frac{n^2 \cos.^2 i}{-n^2 \cos.^2 i}$, ou $+1$;

c'est-à-dire que la totalité de la lumière incidente est réfléchie; mais lorsque $n^2 \sin.^2 i$ est plus grand que 1, le radical $\sqrt{1 - n^2 \sin.^2 i}$, qui s'était évanoui dans le dernier cas, reparaît, et de réel qu'il était auparavant devient imaginaire; alors nous le mettrons sous la forme $\sqrt{n^2 \sin.^2 i - 1} . \sqrt{-1}$, et la valeur de v sous celle-ci,

$$v = \frac{1 - n^2 \sin.^2 i + n^2 \cos.^2 i}{-1 + n^2 \sin.^2 i + n^2 \cos.^2 i} + \frac{-2n \cos. i \sqrt{n^2 \sin.^2 i - 1} \times \sqrt{-1}}{-1 + n^2 \sin.^2 i + n^2 \cos.^2 i},$$

ou

$$v = \frac{1 + n^2 - 2n^2 \sin.^2 i}{n^2 - 1} - \frac{2n \sqrt{1 - \sin.^2 i} \sqrt{n^2 \sin.^2 i - 1} \times \sqrt{-1}}{n^2 - 1} \ldots\ldots (A)$$

On voit que cette valeur de v est la somme d'une quantité réelle et d'une quantité imaginaire : quand $n^2 \sin.^2 i = 1$, le terme imaginaire s'évanouit et le terme réel devient égal à 1; mais lorsque $n^2 \sin.^2 i$ est plus grand que 1, quoique la valeur de v renferme alors un terme imaginaire et que le terme réel devienne plus petit que 1, il est certain, d'après la théorie (1) comme d'après l'expérience, que la totalité de la lumière incidente est encore réfléchie; d'une autre part rien n'est changé dans le milieu que parcourent les rayons réfléchis: c'est toujours le premier milieu; ainsi nous savons d'avance que le coefficient commun des vitesses absolues des

---

(1) A l'aide du principe des interférences, on démontre aisément (du moins pour un point éloigné de la surface réfringente d'une distance très-grande relativement à la longueur d'ondulation) que la lumière transmise est nulle dans ce cas, et par conséquent, d'après le principe de la conservation des forces vives, la lumière réfléchie doit être égale à la lumière incidente.

molécules dans les ondes réfléchies doit être réel et égal à 1; que signifie donc le terme imaginaire qui entre dans ce coefficient v? Il signifie sans doute que les périodes de vibration des ondes réfléchies, qui, dans les bases du calcul, avaient été supposées coïncider *à la surface* pour les ondes incidentes et réfléchies, ne coïncident plus; en effet, si c'est la véritable interprétation de l'expression imaginaire, l'analyse ne pouvant pas abandonner dans ses réponses la supposition fondamentale de cette coïncidence, nous donnera nécessairement, pour coefficient des vitesses absolues réfléchies, une quantité imaginaire; car si l'on représente par x le chemin parcouru à partir de la surface et que $\sin.(a+x)$ soit la vitesse absolue d'un point de l'onde réfléchie à la distance x dans le cas où ses périodes de vibration coïncidaient à la surface avec celles de l'onde incidente, si ces périodes sont retardées ou avancées dans l'onde réfléchie d'une certaine quantité, la vitesse absolue du même point sera $\sin.(a'+x)$: or quel que soit le coefficient réel A par lequel on multiplie $\sin.(a+x)$ on ne pourra jamais faire que $A\sin.(a+x)$ soit égal à $\sin.(a'+x)$ par toutes les valeurs de x; c'est-à-dire qu'en continuant à compter les périodes de vibration comme on l'avait fait d'abord, il n'est aucun coefficient constant réel qui puisse servir à représenter les vitesses absolues dont les diverses molécules du milieu sont animées à chaque instant par l'effet des ondes réfléchies. Cela posé, et suivant toujours la même idée, nous pouvons concevoir le système d'ondes réfléchi décomposé en deux autres différant d'un quart d'ondulation et dont l'un aurait toujours à la surface, entre ses vibrations et celle des ondes incidentes, la coïncidence de période que nous avions supposée primitivement dans notre calcul, ou en d'autres termes serait réfléchi à la surface même de séparation des deux milieux; alors le coefficient de ce système d'ondes sera réel et celui de l'autre imaginaire. Si la forme à laquelle nous avons amené la valeur de v met en évidence ces deux coefficients, il faut que le carré du premier terme

$$\frac{1 - n^2 \sin.^2 i + n^2 \cos.^2 i}{-1 + n^2},$$

plus le carré du second

$$\frac{-2n \cos. i \sqrt{n^2 \sin.^2 i - 1}}{-1 + n^2},$$

qui dans la valeur de v est affecté du facteur imaginaire $\sqrt{-1}$, donnent une somme égale à l'unité : or c'est effectivement ce qui a lieu. Nous pouvons donc, avec un espoir bien fondé de ne pas nous méprendre, déterminer la position du système d'ondes réfléchi d'après ces deux systèmes composants, dont l'un partant de la surface même a pour coefficient de ses vitesses absolues

$$\frac{1 + n^2 - 2n^2 \sin.^2 i}{n^2 - 1},$$

et l'autre, qui diffère du premier d'un quart d'ondulation, a pour coefficient

$$\frac{-2n \sqrt{1 - \sin.^2 i} \sqrt{n^2 \sin.^2 i - 1}}{n^2 - 1}.$$

Après déterminé de cette manière la position du système d'ondes résultant, le procédé le plus direct pour vérifier le résultat du calcul serait de comparer par interférence la différence de marche entre deux rayons voisins dont l'un aurait éprouvé la réflexion totale sous une inclinaison donnée, et dont l'autre, réfléchie sous la même inclinaison et par la même surface, ne l'aurait été que partiellement, au moyen du contact d'un liquide réfringent en son point d'incidence. Je n'ai pas encore eu le temps de faire cette expérience ; et comme l'objet principal de mes recherches théoriques était de découvrir la loi des modifications imprimées à la lumière polarisée par la réflexion totale, modifications qui dépendent de la différence de position que cette réflexion établit entre les ondes polarisées suivant le plan d'incidence et celles qui sont polarisées perpendiculairement à ce plan, j'ai dû calculer d'abord cette différence et voir si elle s'accordait avec les faits que je connaissais, puis en vérifier l'expression générale par des expériences nouvelles.

Pour avoir les coefficients des deux systèmes d'ondes composants de la lumière réfléchie, lorsque les rayons incidents sont polarisés perpendiculairement au plan de réflexion, il faut appliquer à la formule (2) les transformations et les raisonnements que nous venons d'employer pour la formule (1) : et d'abord nous chasserons les imaginaires du dénominateur en multipliant haut et bas par le numérateur, ce qui nous donnera

$$v = -\frac{\sin.^2 i \cos.^2 i + \sin.^2 i' \cos.^2 i' - 2 \sin. i \cos. i \sin. i' \cos. i'}{\sin.^2 i \cos.^2 i - \sin.^2 i' \cos.^2 i'},$$

expression qu'on peut mettre sous la forme

$$v = -\frac{\cos.^2 i + n^2(1 - n^2 \sin.^2 i) - 2n \cos. i \sqrt{n^2 \sin.^2 i - 1} \times \sqrt{-1}}{\cos.^2 i + n^2 (n^2 \sin.^2 i - 1)},$$

ou

$$v = +\frac{(n^4 + 1)\sin.^2 i - n^2 - 1}{(n^2 - 1)[(n^2 + 1)\sin.^2 i - 1]} + \frac{2n\sqrt{(1 - \sin.^2 i)(n^2 \sin.^2 i - 1)} \times \sqrt{-1}}{(n^2 - 1)[(n^2 + 1)\sin.^2 i - 1)} \ldots (B).$$

Nous considérerons donc la lumière réfléchie comme composée de deux systèmes d'ondes séparés par un quart d'ondulation, dont l'un parti de la surface aura pour coefficient de ses vitesses absolues

$$\frac{(n^4+1)\sin.^2 i - n^2 - 1}{(n^2-1)\left[(n^2+1)\sin.^2 i - 1\right]},$$

et l'autre

$$\frac{2n\sqrt{(1-\sin.^2 i)(n^2\sin.^2 i - 1)}}{(n^2-1)\left[(n^2+1)\sin.^2 i - 1\right]};$$

et l'on trouve en effet que la somme des carrés de ces deux coefficients est égale à 1.

Pour les simplifier, remplaçons la constante n^2 par c et la quantité variable $\sin.^2 i$ par x; alors ils deviennent:

$$\frac{(c^2+1)x - c - 1}{(c-1)\left[(c+1)x - 1\right]},$$

et

$$\frac{2\sqrt{c(1-x)(cx-1)}}{(c-1)\left[(c+1)x-1\right]}.$$

Par le même changement de lettres dans la formule (A), on a

$$\frac{c+1-2cx}{c-1},$$

et

$$\frac{-2\sqrt{c(1-x)(cx-1)}}{c-1},$$

pour les coefficients correspondants dans le cas où la lumière incidente est polarisée suivant le plan d'incidence.

On sait que pour déterminer la position de chacun des deux systèmes d'ondes résultants, quand ses deux systèmes composants sont comme ici séparés par un quart d'ondulation, le calcul d'interférence est absolument semblable au calcul qu'on fait en statique pour trouver la direction de la résultante de deux forces rectangulaires. Ainsi, la longueur d'ondulation étant représentée par une circonférence entière, si nous représentons par l'angle α la distance qui sépare les points homologues du système résultant et du système composant réfléchi à la surface, nous aurons pour le cas où la lumière incidente est polarisée suivant le plan de réflexion,

$$\cos.\alpha = \frac{c + 1 - 2cx}{c - 1},$$

et

$$\sin.\alpha = \frac{-2\sqrt{c(1-x)(cx-1)}}{c-1};$$

et représentant par l'angle 6, la distance du système résultant au système composant réfléchi à la surface, dans le cas où les rayons ont été polarisés perpendiculairement au plan d'incidence, nous aurons,

$$\cos.6 = \frac{(c^2+1)x - c - 1}{(c-1)[(c+1)x - 1)},$$

et

$$\sin.6 = \frac{2\sqrt{c(1-x)(cx-1)}}{(c-1)[(c+1)x-1)}.$$

Pour avoir l'intervalle qui sépare les points correspondants des deux systèmes d'ondes résultants, c'est-à-dire, leur différence de marche, il suffit de calculer $\alpha - 6$, ce qu'on peut faire aisément au moyen de la formule

$$\cos.(\alpha - 6) = \cos.\alpha\cos.6 + \sin.\alpha\sin.6;$$

substituant à la place de $\cos.\alpha$, $\sin.\alpha$, $\cos.6$, $\sin.6$, leurs valeurs, on a:

$$\cos.(\alpha-\beta)=\frac{(c+1-2cx)[(c^2+1)x-c-1)-4c(1-x)(cx-1)}{(c-1)^2[(c+1)x-1)};$$

ou, effectuant les multiplications du numérateur et ordonnant par rapport à x,

$$\cos.(\alpha-\beta)=\frac{-2c(c-1)^2x^2+(c+1)(c-1)^2x-(c-1)^2}{(c-1)^2[(c+1)x-1)},$$

ou enfin, divisant haut et bas par $(c-1)^2$,

$$\cos.(\alpha-\beta)=\frac{-2cx^2+(c+1)x-1}{(c+1)x-1}.$$

Pour employer cette formule il faut se rappeler que x est le carré du sinus d'incidence intérieure, c le carré du rapport de réfraction, et que l'arc $\alpha-\beta$ divisé par la circonférence exprime la fraction d'ondulation dont le système d'ondes polarisé perpendiculairement au plan d'incidence est en avance ou en arrière du système d'ondes polarisé suivant ce plan, après la réflexion; car le signe de l'arc $\alpha-\beta$ ne peut pas être indiqué par son cosinus.

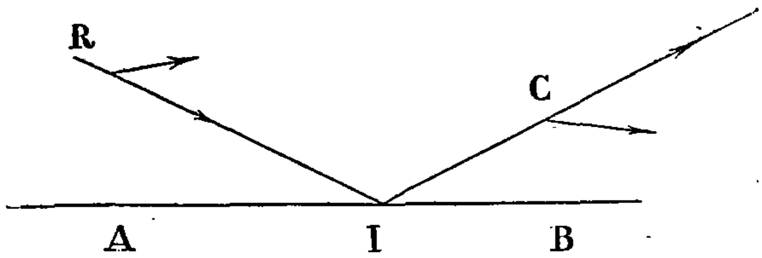
La formule (2), qui nous a donné le coefficient des vitesses absolues de l'onde réfléchie, quand les rayons incidents sont polarisés perpendiculairement au plan de réflexion, présente dans l'interprétation de son signe une petite difficulté qui pourrait, au premier abord, faire penser qu'elle ne s'accorde pas avec les observations sur la déviation du plan de polarisation dans la réflexion extérieure : pour nous faire mieux entendre, prenons le cas où l'angle i est presque égal à 90°, c'est-à-dire où les rayons incidents sont presque parallèles à la surface; on sait qu'alors le plan de polarisation des rayons réfléchis est sur le prolongement des rayons incidents. Cependant la valeur

$$v = -\frac{\sin. i \cos. i - \sin. i' \cos. i'}{\sin. i \cos. i + \sin. i' \cos. i'}$$

devient alors $v = +1$, tandis que l'autre formule

$$v = -\frac{\sin. i \cos. i' - \sin. i' \cos. i}{\sin. i \cos. i' + \sin. i' \cos. i}$$

donne dans le même cas $v = -1$, ce qui semblerait indiquer au premier abord que le premier système d'ondes exécute ses vibrations au point d'incidence dans le même sens que le faisceau incident, et le second système d'ondes en sens contraire du faisceau incident qui l'a produit, d'où résulterait un mouvement composé perpendicule à celui de l'ensemble des deux faisceaux incidents. Mais il faut faire attention que cette interprétation du signe est vraie pour les rayons polarisés suivant le plan d'incidence, dont les vibrations sont toujours parallèles dans les ondes incidentes, transmises et réfléchies, quelle que soit l'inclinaison de ces rayons; tandis qu'on ne peut pas entendre de la même manière le signe plus dans le second cas, où la direction des vibrations réfléchies fait en général un certain angle avec celle des vibrations incidentes. Quand les rayons sont perpendiculaires à la surface, ces deux directions coïncident, mais à mesure que l'obliquité augmente, elles s'écartent l'une de l'autre et ne finissent par coïncider de nouveau à l'autre limite, qu'après avoir décrit chacune 90° ou ensemble 180°, d'où l'on pourrait déja conclure que le signe de la valeur de v doit être interprété d'une manière opposée. Et en effet, si l'on remonte à l'équation par laquelle nous avons exprimé que la composante horizontale de la vitesse absolue dans l'onde transmise était égale à la somme de celle de l'onde incidente et celle de l'onde réfléchie prise avec son signe, on verra que le signe positif ou négatif de celle-ci indique qu'elle porte les molécules, parallèlement à la surface, dans le même sens que l'onde incidente ou en sens contraire : or, considérons le cas où les rayons ayant dépassé l'inclinaison de la polarisation complète, la valeur de v est devenue positive ; soit I C



l'onde incidente qui a produit l'onde réfléchie IR ; il est évident, par la seule inspection de la figure, que dire que les composantes des deux vitesses absolues parallèles à la surface AB ont le même signe, agissent dans le même sens, c'est dire que si la vitesse absolue qui agit suivant IC tend à éloigner la molécule I du milieu inférieur, la vitesse absolue de l'onde réfléchie agissant suivant RI tend à l'y faire entrer, et qu'en conséquence, à la limite, lorsque les rayons étant parallèles à la surface les deux ondes lui seront perpendiculaires, leurs vitesses absolues agiront précisément en sens contraires. Ainsi puisque d'après nos calculs, la vitesse absolue a le même signe que sa composante horizontale, nous nous rappellerons que la valeur positive de v indique seulement la similitude de signe dans les composantes horizontales des ondes incidentes et réfléchies, ou ce qui est plus simple pour le cas dont nous nous occupons, changer le signe de v, en convenant que les vitesses absolues dans les ondes incidentes et réfléchies porteront le même signe, quand elles pousseront les molécules de la surface du même côté, et des signes contraires, lorsqu'une les poussera en dedans du premier milieu et l'autre en dedans du second.

Cela posé, la valeur de v changeant de signe dans le cas où les rayons incidents sont polarisés perpendiculairement au plan de réflexion, $\sin.6$ et $\cos.6$ en changent aussi et par conséquent la valeur de $\cos.(\alpha-6)$, qui devient :

$$\cos.(\alpha-6)=\frac{2cx^2-(c+1)x+1}{(c+1)x-1}\ \ldots.\ (\mathrm{C}).$$

Vérifions d'abord cette formule sur les faits qui nous sont connus : nous savons d'abord qu'aux deux limites de la réflexion totale il n'y a plus aucune dépolarisation partielle du faisceau incident polarisé dans l'azimut de 45°; et en effet, pour la première, $n\sin.i=1$, par conséquent $n^2\sin.^2 i$, ou $cx=1$; $\cos.(\alpha-6)=\frac{2x-1+x+1}{1+x-1}$, ou $\cos.(\alpha-6)=1$; pour la seconde limite, quand les rayons sont parallèles à la surface, $x=1$, et $\cos.(\alpha-6)=\frac{2c-c-1+1}{c+1-1}=1$; ainsi dans un cas comme dans l'autre l'angle $\alpha-6$ est égal à zéro ou à un nombre entier de circonférences, et conséquemment il n'y a pas de différence de marche entre les deux systèmes d'ondes polarisés parallèlement et perpendiculairement au plan d'incidence qui composent le faisceau réfléchi; leur réunion doit donc reproduire une lumière complètement polarisée, comme la lumière incidente, et précisément dans l'azimut donné par l'expérience.

Nous savons encore que sous l'incidence de 50°, la différence de marche entre les deux systèmes d'ondes réfléchis est égale à un huitième d'ondulation, ou du moins n'en diffère que très-peu : or si l'on met dans la formule, $\sin.^2 (50°)$ à la place de x, et à la place de c le carré de 1,51, qui est l'index de réfraction de la glace de St.-Gobain, on trouve, $\cos.(\alpha - 6) = \frac{0,6456}{0,9248}$, ce qui donne pour $\alpha - 6$ un arc de $45°.43'\frac{1}{2}$, quantité presque exactement égale au huitième de la circonférence, puisqu'elle n'en diffère pas d'un soixantième.

J'avais reconnu aussi dans mes anciennes observations que la dépolarisation partielle produite par une seule réflexion dans le verre ne dépasse guère ce terme, et qu'après avoir resté quelque temps au même point pendant qu'on augmente l'inclinaison des rayons incidents, elle diminue continuellement jusqu'à la seconde limite de réflexion totale, où elle devient tout-à-fait insensible. On peut, à l'aide de la formule (C) calculer ce maximum, qui répond au minimum de $\cos.(\alpha - 6)$, en différentiant par rapport à x et égalant le coefficient différentiel à zéro, ce qui donne, après plusieurs réductions, $(c+1)x - 2 = 0$, d'où l'on tire, $x = \frac{2}{c+1}$, et substituant cette valeur de x dans la formule (C), on a $\cos.(\alpha - 6) = \frac{8c}{(c+1)^2} - 1$, en substituant à la place de c sa valeur, on trouve $45°.56'\frac{1}{2}$ pour le maximum de $\alpha - 6$, ce qui excède bien peu, comme on voit, le huitième de la circonférence. En mettant aussi pour c sa valeur dans la formule x ou $\sin.^2 i = \frac{2}{c+1}$, on trouve $i = 51°.20'\frac{1}{3}$; tel est l'angle d'incidence qui donne le maximum de dépolarisation partielle produite par une seule réflexion intérieure du verre de Saint-Gobain.

Après m'être assuré ainsi que la formule (C) représentait bien la marche générale du phénomène entre les deux limites de la réflexion complète et donnait précisément à ces deux limites et pour l'incidence de 50° les résultats que j'avais observés depuis long-temps, j'ai fait quelques expériences nouvelles pour vérifier cette formule dans les incidences intermédiaires. Le degré de dépolarisation le plus facile à constater est celui de la dépolarisation complète, parce qu'il donne deux images d'égale intensité quand on analyse la lumière avec un rhomboïde de spath d'Islande, et deux images incolores quand on la fait passer dans un tube rempli de térébenthine; c'est pourquoi j'ai toujours fait en sorte d'arriver à la dépolarisation complète par la succession des réflexions totales, dans les expériences nouvelles que je vais rapporter.

D'après la valeur maximum que nous venons de trouver pour $\alpha - \beta$ et qui excède à peine d'un degré le huitième de la circonférence, il est clair que pour avoir entre les deux faisceaux une différence de marche égale à un quart d'ondulation, il faut au moins deux réflexions totales dans l'intérieur du verre. J'ai voulu déduire de la formule (C) l'incidence exacte qui satisfaisait à cette condition, c'est-à dire donnait rigoureusement un huitième d'ondulation de différence à chaque réflexion, et pour que la formule pût servir à d'autres expériences où le nombre des réflexions serait plus considérable, j'ai résolu le problème d'une manière générale en représentant par a le cosinus de la partie quelconque de circonférence à laquelle on voulait que l'arc $\alpha - \beta$ fût égal, et égalant la valeur de $\cos.(\alpha - \beta)$ au cosinus donné a, j'ai eu l'équation,

$$\frac{2cx^2-(c+1)x+1}{(c+1)x-1}=a,$$

ou

$$2cx^2-(c+1)x+1=a(c+1)x-a,$$

ou enfin,

$$\frac{x^2-(c+1)(a+1)x}{2c}+\frac{a+1}{2c}=0;$$

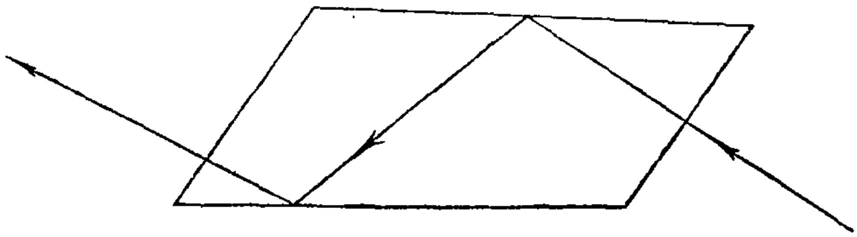
d'où l'on tire,

$$x=\frac{(c+1)(1+a)\pm\sqrt{(1+a)[(c+1)^2(1+a)-8c]}}{4c}=\sin.^2 i\ldots(D).$$

On voit que x, ou $\sin.^2 i$, a en général deux valeurs différentes, qui ne deviennent égales que dans le cas du maximum de la différence de marche $\alpha-\beta$, parce qu'alors a étant égal à $\frac{8c}{(c+1)^2}-1$, ou $a+1$ à $\frac{8c}{(c+1)^2}$, $(c+1)^2(1+a)-8c=0$, et le radical s'évanouit.

Quand on fait a égal à $\cos. 45°$ ou $\sqrt{\frac{1}{2}}$, on trouve pour les deux valeurs correspondantes de l'angle d'incidence, $i=48°.37'\frac{1}{2}$, et $i=54°.37'\frac{1}{3}$.

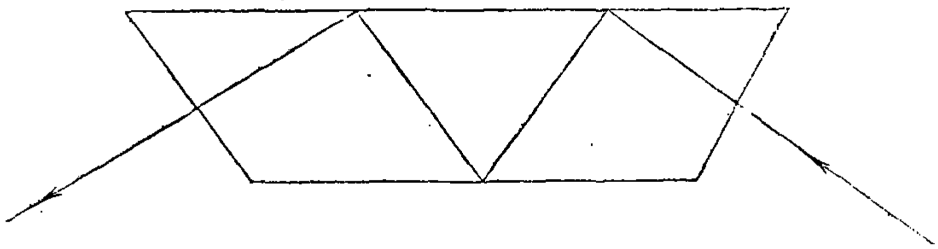
La première des valeurs étant plus voisine que l'autre de la première limite de la réflexion complète, qui est différente pour les diverses espèces de rayons, on sent aisément que calculée d'après le rapport de réfraction des rayons jaunes, elle devra donner des résultats moins semblables pour les rayons de différente réfrangibilité; c'est donc la seconde valeur qu'il faut adopter de préférence, si l'on veut avoir plus d'uniformité dans les modifications imprimées aux diverses espèces de rayons colorés qui composent la lumière blanche. J'ai fait tailler un parallélipipède de verre de St.-Gobain, dont les faces d'entrée et de sortie étaient inclinées de 54°.37′ sur les deux autres, de manière qu'elles fussent perpendiculaires au faisceau polarisé dans l'azimut de 45°, qui éprouvait successivement deux réflexions intérieures sur celles-ci, sous l'incidence calculée de 54°.37′.



Alors analysant les rayons émergents avec un rhomboïde de spath calcaire, j'ai trouvé les deux images sensiblement incolores et d'égale intensité, dans quelque azimut que je tournasse sa section principale.

Cette expérience n'étant guère qu'une répétition de celles que j'avais faites anciennement, mais seulement plus exacte et éclairée par la théorie, ne pouvait en être considérée comme une vérification nouvelle; c'est pourquoi j'ai essayé de produire la même modification, ou d'obtenir une différence de marche d'un quart d'ondulation, d'abord par trois et ensuite par quatre réflexions totales.

Dans le premier cas, il faut que $\alpha - \beta$ soit égal à un tiers de quadrant, ou que a soit égal à cos. 30° : cette valeur substituée dans la formule (D), donne pour l'angle d'incidence i qui satisfait à cette condition, 43°. 10′ $\frac{2}{3}$ et 69°. 12′ $\frac{1}{3}$. J'ai voulu vérifier par l'expérience ces deux valeurs de i, et pour cela j'ai fait tailler deux verres trapézoïdaux dont les faces d'entrée et de sortie étaient inclinées en sens contraires sur les deux faces réfléchissantes, dans l'un de 43°. 11′ et dans l'autre de $69^\circ.12'$, de sorte qu'elles fussent perpendiculaires aux rayons incidents et émergents réfléchis dans le premier verre sous l'incidence de $43^\circ.11'$, et dans le second sous celle de $69^\circ.12'$.



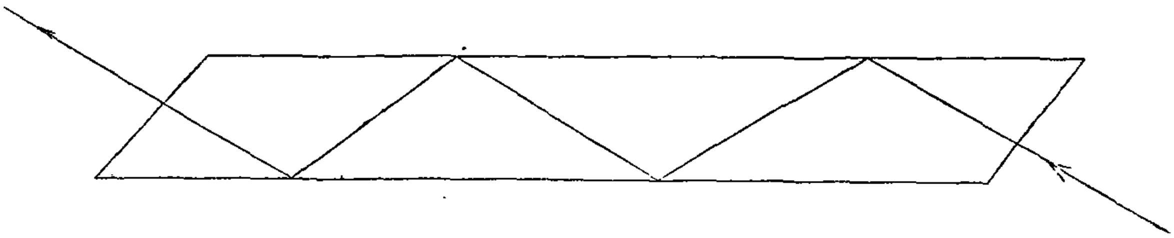
La première incidence s'approche trop de l'origine de la réflexion totale pour que la valeur de $\alpha - 6$ ne varie pas sensiblement d'une espèce de rayons aux autres; aussi ai-je remarqué quelques traces de coloration dans les deux images, en analysant le faisceau émergent avec un rhomboïde de spath calcaire; mais d'ailleurs il paraissait aussi complètement dépolarisé qu'on pouvait s'y attendre.

L'autre verre taillé d'après l'incidence de $69^\circ.12'$, m'a procuré un faisceau modifié d'une manière beaucoup plus uniforme pour les diverses espèces de rayons, et qui analysé par la double réfraction donnait toujours deux images blanches et d'égale intensité dans quelque azimut qu'on tournât la section principale du cristal.

J'ai ensuite produit la même modification par quatre réflexions consécutives; il faut pour cela que $\alpha - 6$ soit égal à un quart de quadrant, ou que $a = \cos. 22^\circ.30'$; ce qui donne pour i les deux valeurs suivantes,

$$i = 42^\circ.19'.50'', \text{ et } i = 74^\circ.41'.50''.$$

La première valeur de i était trop voisine de l'origine de la réflexion totale (que les rayons jaunes éprouvent à 41°.28′.20″ d'incidence) pour que je ne fusse pas certain d'avance qu'elle me donnerait des images colorées; c'est pourquoi je n'ai employé que la seconde, en faisant tailler un parallélipipède de verre dont les faces d'entrée et de sortie faisaient un angle de 74°.42′ avec les deux surfaces réfléchissantes, et dont la longueur était calculée de façon que les rayons éprouvassent dans son intérieur les quatre réflexions totales sous l'incidence calculée.



J'ai obtenu de cette manière un faisceau parfaitement dépolarisé, ou en d'autres termes, qui avait reçu bien complètement la polarisation circulaire.

J'ai voulu vérifier encore mes formules par une expérience sur la réflexion totale au contact du verre et de l'eau. J'ai cherché d'abord la valeur maximum que cette réflexion pouvait donner pour $\alpha - 6$, et j'ai trouvé 14°, qui répond à l'incidence $i = 69°.34'$; par conséquent six réflexions pareilles ne suffiraient pas pour atteindre 90° et produire exactement la dépolarisation complète; il en faudrait au moins sept, et comme elles auraient lieu sous des incidences assez obliques, il faudrait une plaque de verre d'une assez grande longueur pour que l'on pût craindre que, quelque bien recuite qu'elle fût, elle ne produisît sur un assez long trajet entre les deux faisceaux quelque différence de marche indépendante des réflexions complètes et provenant d'une double réfraction trèsfaible. C'est pourquoi j'ai préféré combiner seulement deux réflexions totales au contact du verre et de l'eau avec deux réflexions totales au contact du verre et de l'air qui devaient compléter la dépolarisation commencée par celles-là. J'ai trouvé que l'incidence qui donnerait $\alpha - \beta = 31°$ dans la réflexion intérieure du verre seul était $i = 68°.27'$, différant peu, comme on voit, de l'incidence $i = 69°.34'$, qui répond au maximum de $\alpha - \beta$ pour le contact du verre et de l'eau; or, comme une quantité varie peu autour de son maximum, en adoptant l'incidence de $68°.27'$, je devais avoir encore bien près de $14°$ pour la réflexion au contact du verre et de l'eau; et en effet j'ai trouvé par le calcul $13°.53'\frac{2}{3}$, qui ajouté à $31°$ donne $44°.53'\frac{2}{3}$, dont le double est $89°.47'\frac{1}{3}$, qui diffère bien peu, comme on voit, d'un quart de circonférence. J'ai donc fait tailler un parallélipipède de verre, dont les faces d'entrée et de sortie étaient inclinées sur les deux autres de $68°.27'$, et dont la longueur avait été déterminée de manière qu'après quatre réflexions intérieures sous l'incidence de $68°.27'$, les rayons incidents qui entraient par le milieu de la face intérieure sortissent aussi par le milieu de la seconde, en sorte qu'il suffisait d'incliner le parallélipipède de verre jusqu'à ce que la face d'entrée vînt se peindre au milieu de la face de sortie pour être certain que les rayons qui arrivaient à l'œil avaient été réfléchis sous l'incidence calculée (1). Lorsque le parallélipipède de verre n'était en contact qu'avec l'air, le faisceau émergent analysé par un rhomboïde de spath

(1) J'avais réglé de la même manière la longueur des autres morceaux de verre employés dans les expériences précédentes.

calcaire donnait deux images d'intensités variables et généralement inégales, et l'on pouvait reconnaître que la lumière avait passé le point de la polarisation circulaire. Mais quand on appliquait une feuille de papier mouillé sur une des faces réfléchissantes, le faisceau émergent paraissait complètement dépolarisé, ou polarisé circulairement, conformément au calcul. Enfin quand on mouillait les deux faces réfléchissantes, la lumière n'était dépolarisée qu'en partie, et l'on pouvait reconnaître, à la direction de son plan de polarisation partielle, qu'elle était encore en-deçà et non pas au-delà de la dépolarisation complète, comme dans le cas où aucune des deux faces n'avait été mouillée.

Je me suis borné jusqu'à présent à ces cinq expériences, qui, jointes à mes anciennes observations sur les mêmes phénomènes, me paraissent établir suffisamment l'exactitude de la formule (C).

Je ne doute pas qu'elle ne fournisse aussi une représentation fidèle des phénomènes de coloration très-sensible qu'on observe surtout dans le voisinage de la limite commune des réflexions totale et partielle, en supposant toujours qu'on emploie de la lumière polarisée dans un azimut de 45° relativement au plan de réflexion, et qu'on analyse le faisceau émergent avec un rhomboïde de spath calcaire (1). Pour vérifier la formule dans ce cas, il faudrait d'abord calculer,

(1) M. Brewster est le premier qui ait remarqué ces phénomènes; mais d'après la manière dont il les décrit et les lois qu'il leur suppose, il paraît qu'il a confondu, avec ces effets de la réflexion totale, des phénomènes ordinaires de polarisation résultant de quelque trempe accidentelle des prismes qu'il aura employés.

d'après les différents degrés de réfrangibilité des diverses espèces de rayons colorés, les différentes valeurs de $\alpha-\beta$ qui correspondraient à l'incidence donnée : ayant déterminé ainsi la différence de marche entre les deux systèmes d'ondes émergents polarisés parallèlement et perpendiculairement au plan d'incidence, pour les sept principales espèces de rayons colorés, on calculerait aisément, au moyen des formules d'interférence, l'intensité que chaque espèce devrait avoir dans l'image ordinaire et l'image extraordinaire pour un azimut quelconque de la section principale du rhomboïde, et substituant les intensités trouvées dans la formule empirique de Newton qui donne la couleur résultant d'un mélange de rayons, on trouverait les teintes que doivent offrir les deux images, et l'on verrait si elles s'accordent avec l'observation.

Je me propose de faire ces expériences et ces calculs lorsque j'aurai plus de loisir; mais je crains que l'époque où il me sera possible de les entreprendre et de compléter la vérification directe des formules (1) et (2) ne soit encore un peu éloignée.

Malgré tout ce que mes recherches sur la réflexion laissent encore à désirer, tant sous le rapport théorique que sous celui des vérifications expérimentales, il me semble qu'elles établissent déja avec un haut degré de probabilité l'exactitude des formules que j'ai données dans ce Mémoire, vu le nombre des faits exacts par lesquels elles sont déja confirmées et la variété des phénomènes qu'elles embrassent. Car les formules (1) et (2), par exemple, qui s'accordent avec les phénomènes connus de la réflexion de la lumière polarisée et se trouvent vérifiées par deux observations très-précises de M. Arago sur l'intensité de la lumière réfléchie sous des incidences obliques, représentent encore très-bien les déviations que j'avais observées dans le plan de polarisation de la lumière réfléchie à la surface extérieure du verre et de l'eau, et cela par une déduction qui est une conséquence immédiate et forcée des idées théoriques qui m'ont servi à découvrir ces formules. Quant à la formule (C) que j'en ai tirée aussi et qui représente la loi des modifications imprimées par la réflexion totale, je dois convenir qu'elle n'en découle pas d'une manière aussi nécessaire; mais elle m'en paraît l'interprétation la plus naturelle, quand la valeur de v devient imaginaire; et cette interprétation qui se vérifie sur les formules mêmes, se trouve d'ailleurs confirmée par les cinq expériences que je viens de rapporter et par mes observations antérieures.

Pour résoudre le problème rigoureusement, au lieu de chercher à deviner ce que l'analyse indique dans des formules qui deviennent imaginaires, il aurait fallu recommencer le calcul pour le cas de la réflexion complète, en y exprimant la condition que le mouvement vibratoire ne peut pas se propager dans le second milieu, ou que du moins s'il y pénètre, comme certaines expériences paraissent l'indiquer, il ne s'étend qu'à une petite distance de la surface de contact des deux milieux. Je me propose de reprendre par la suite le problème dans son entier, et de le traiter d'une manière plus rigoureuse et plus générale, en supposant que les deux milieux diffèrent non-seulement en densité, mais encore en élasticité. Dans ces nouvelles recherches théoriques, les résultats que j'ai obtenus déja me seront très-utiles; car c'est un grand point de connaître d'avance les théorèmes auxquels on doit arriver et de n'avoir plus qu'à les démontrer.

Je me proposais d'exposer à la fin de ce Mémoire des calculs d'interférences qui présentent sous une forme très-simple le genre de vibrations imprimées aux rayons polarisés par la réflexion complète; mais n'en ayant pas le temps et ces calculs étant d'ailleurs sans difficulté, je me contenterai d'en énoncer les résultats principaux.

Lorsque le faisceau incident est polarisée dans un azimut de 45° relativement au plan de réflexion, les deux systèmes d'ondes polarisés parallèlement et perpendiculairement à ce plan dont la lumière réfléchie est composée sont d'égale intensité, si par deux ou un plus grand nombre de réflexions totales on a établi entre eux une différence de marche égale a un quart d'ondulation, ou à un nombre entier et impair de quarts d'ondulation, les molécules décriront de petits cercles autour de leurs positions d'équilibre et avec une vitesse uniforme : si la différence de marche est un nombre pair de quarts d'ondulation, elles décriront des lignes droites; enfin si cette différence n'est pas un nombre entier de quarts d'ondulation, les courbes décrites seront des ellipses. Ce seront encore des ellipses, la différence de marche étant un nombre entier et impair de quarts d'ondulation, si les deux systèmes d'ondes n'ont pas la même intensité, comme cela aurait lieu dans le cas où la lumière incidente n'aurait pas été polarisée à 45° du plan de réflexion, ou si deux systèmes d'ondes polarisées venant à interférer dans des circonstances quelconques, leurs plans de polarisation n'étaient pas rectangulaires.